Devoir Maison n°3

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 4 novembre 2013

Exercice 1

On cherche dans cet exercice à trouver une belle formule pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$.

1. Déterminer quatre réels a, b, c et d tels que $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2} + \dfrac{d}{k+3}$.
2. En déduire la valeur de la somme cherchée.
3. Redémontrer la formule obtenue à la question précédente par récurrence.

Exercice 2

On considère dans cet exercice l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 2z(1-z)$. On identifiera cette application à une application du plan muni d'un repère orthonormé dans lui-même, en notant, si M est l'image du nombre complexe z dans le plan, $f(M)$ l'image du nombre complexe $2z(1-z)$

1. (a) Déterminer les points invariants par f, c'est-à-dire les points M vérifiant $f(M) = M$.
   (b) Déterminer les antécédents par f de -4, puis ceux de $2 + 2i$.
2. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes distincts. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z_1 et z_2 pour que $f(z_1) = f(z_2)$. Interpréter cette condition géométriquement. L'application f est-elle injective ?
3. Déterminer l'ensemble des points du plan ayant un antécédent par f, puis ceux ayant un unique antécédent par f. L'application est-elle surjective ?
4. On note D l'axe des abscisses dans le plan.
   (a) Déterminer l'image par f de la droite D.
   (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante simple sur z pour que $f(z)$ soit un nombre réel. En déduire l'image réciproque de D par f.
5. Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique dans le plan.
   (a) En notant $z = e^{i\theta}$ un nombre complexe dont l'image est sur $\mathcal{C}$, déterminer le module et un argument de $f(z)$ en fonction de θ.
   (b) Représenter dans le plan les images $f(z)$ lorsque $\theta \in \left\{0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}, \pi\right\}$ (on effectuera évidemment les calculs nécessaires sur la copie). En déduire une allure de l'image du demi-cercle trigonométrique supérieur par f (on admettra que les tangentes à cette image sont verticales aux points correspondant à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$).
   (c) Comment peut-on déduire très simplement de la courbe précédente l'image du demi-cercle trigonométrique inférieur par f ?
   (d) Tracer l'allure de l'image complète par f de $\mathcal{C}$.