Devoir Maison n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

14 octobre 2013

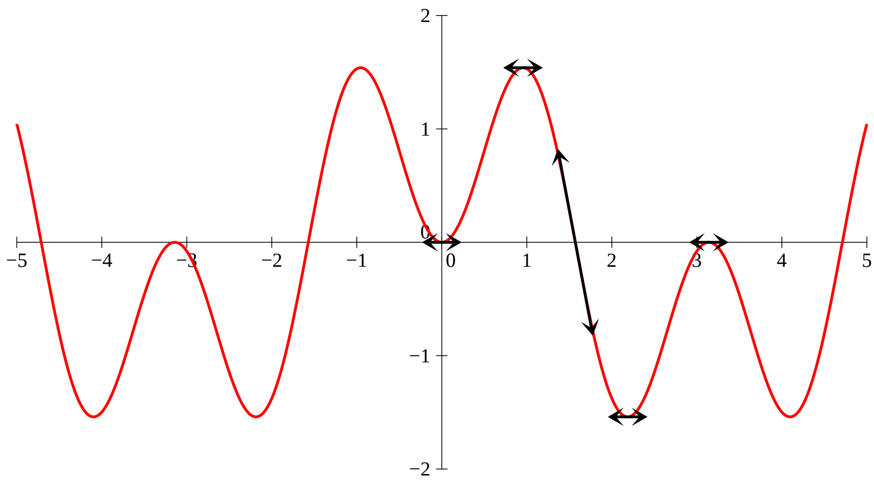
Exercice 1

La fonction f est bien évidemment définie sur $\mathbb{R}$, paire (puisque la fonction cos est paire) et 2π-périodique. On peut donc restreindre son étude à l'intervalle $[0, \pi]$. La fonction est dérivable, de dérivée $f'(x) = -\sin(x) + 3\sin(3x) = 8\sin(x) - 12\sin^3(x)$ en utilisant la formule de triplication du sinus. On peut factoriser f' sous la forme $f'(x) = 4\sin(x)(2 - 3\sin^2(x))$. La dérivée s'annule donc lorsque $\sin(x) = 0$, c'est-à-dire en 0 et en π pour l'intervalle d'étude, et lorsque $\sin(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (la valeur négative du sinus ne nous intéressant pas sur l'intervalle $[0, \pi]$), ce qui se produit deux fois sur notre intervalle. On notera $\theta_1 = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ (qui se trouve donc entre 0 et $\frac{\pi}{2}$) et $\theta_2 = \pi - \theta_1$, qui elle se trouve entre $\frac{\pi}{2}$ et π. On peut calculer sans difficulté $f(0) = 1 - 1 = 0$ et $f(\pi) = -1 - (-1) = 0$, ce sera évidemment plus délicat pour les autres extrema locaux. Pour les plus motivés, tout de même, $\cos(\theta_1) > 0$, donc $\cos(\theta_1) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta_1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. On en déduit que $\cos(3\theta_1) = 4\cos^3(\theta_1) - 3\cos(\theta_1) = \frac{4}{3\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{5}{3\sqrt{3}}$, puis $f(\theta_1) = \frac{8}{3\sqrt{3}} \simeq 1.54$. Puisque seul le signe du cosinus change, on aura de même $f(\theta_2) = -\frac{8}{3\sqrt{3}}$.

On peut ajouter à ces calculs une étude du signe de f : $f(x) = \cos(x) - \cos(3x) = 4\cos(x) - 4\cos^3(x) = 4\cos(x)(1 - \cos^2(x))$ en utilisant encore les formules de triplication. La fonction s'annule donc pour tous les multiples entiers de $\frac{\pi}{2}$ (tous les angles ayant pour cosinus 0, 1 ou -1). On peut alors dresser le tableau de variations complet suivant sur $[0, \pi]$ (on a ajouté le petit calcul suivant : $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 3 = -4$) :

x	0		θ_1		$\frac{\pi}{2}$		θ_2		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	-4	$-$	0	$+$	0
f	0	$\nearrow$	$\frac{8}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{8}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0

On conclut bien évidemment par une magnifique courbe :



Exercice 2

1. (a) On sait que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, donc $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2(x) - 1)^2 - 1 = 2(4\cos^4(x) - 4\cos^2(x) + 1) - 1 = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$.

   (b) En posant $x = \frac{\pi}{5}$, on aura $4x = \frac{4\pi}{5} = \pi - x$, donc $\cos(4x) = -\cos(x)$. Au vu de la relation précédente, on a donc $8\alpha^4 - 8\alpha^2 + 1 = -\alpha$, soit $8\alpha^4 - 8\alpha^2 + x + 1 = 0$.

   (c) La racine la plus évidente est -1 : $8(-1)^4 - 8(-1)^2 - 1 + 1 = 0$. On peut donc factoriser : $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = (x+1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) = ax^4 + (a+b)x^3 + (b+c)x^2 + (c+d)x + d$. On a donc $a = 8$; $a + b = 0$, soit $b = -8$; $b + c = -8$ soit $c = 0$; $c + d = 1$ soit $d = 1$. Soit $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = (x+1)(8x^3 - 8x^2 + 1)$. Reste à trouver une deuxième racine, $x = \frac{1}{2}$ convient puisque $\frac{8}{8} - \frac{8}{4} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$. On peut donc à nouveau factoriser : $8x^3 - 8x^2 + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(ex^2 + fx + g) = ex^3 + \left(f - \frac{1}{2}e\right)x^2 + \left(g - \frac{1}{2}f\right)x - \frac{1}{2}g$. Par identification, on obtient $e = 8$; $f - \frac{1}{2}e = -8$, soit $f = -4$; $g - \frac{1}{2}f = 0$ soit $g = -2$. Finalement, $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(8x^2 - 4x - 2)$.

   (d) Déterminons les racines du dernier facteur obtenu ci-dessus. Le trinome $4x^2 - 2x - 1$ (on peut factoriser par 2) a pour discriminant $\Delta = 4 + 16 = 20$, et admet deux racines $x_1 = \frac{2 + \sqrt{20}}{8} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, et $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$. La valeur de α est donc celle d'une des quatre racines trouvées pour l'équation. Ce n'est sûrement pas -1 puisque $\alpha > 0$ (c'est le cosinus d'un angle inférieur à $\frac{\pi}{2}$), pas non plus x_2 qui est également négative, et ça ne peut pas être $\frac{1}{2}$ puisqu'on sait qu'il s'agit du cosinus de l'angle $\frac{\pi}{3}$, et que la fonction cosinus ne peut pas prendre deux fois cette valeur avant $\frac{\pi}{2}$. Finalement, $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

2. (a) Prenons plutôt les choses à l'envers : $\sin(4x) = 2\sin(2x)\cos(2x) = 4\sin(x)\cos(x)(2\cos^2(x) - 1) = 2\sin(x)(4\cos^2(x) - 2\cos(x))$, donc pour tous les angles vérifiant $\sin(x) \neq 0$, $\frac{\sin(4x)}{2\sin(x)} = 4\cos^2(x) - 2\cos(x) = \cos(3x) + \cos(x)$ puisqu'on sait que $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

   (b) On a donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{\sin(\frac{4\pi}{5})}{2\sin(\frac{\pi}{5})}$. Or, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Finalement, $\alpha + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$.

(c) À l'aide de la formule de transformation d'un produit en somme, $\alpha \times \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{-2\pi}{5}\right)$. Or, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$; et de même $\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$. Au vu du résultat de la question précédente, on a donc $\alpha\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

(d) Le réel α est donc solution de l'équation $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, dont le discriminant est $\Delta = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$, et qui admet pour racines $x_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$. Comme dans la première partie de l'exercice, on conclut pour des raisons de signe que $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. On a au passage prouvé que $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 3 (pour ceux qui ont trouvé le 2 vraiment trop facile)

1. Si $\sin\left(\frac{h}{2}\right) = 0$, c'est que $\frac{h}{2} \equiv 0[\pi]$, donc $h \equiv 0[2\pi]$. Mais alors on a , pour tout entier k, $\cos(a+kh) = \cos(a)$ et $\sin(a+kh) = \sin(a)$, donc $S_n(a,h) = n\sin(a)$ et $C_n(a,h) = n\cos(a)$.
2. Je donne le calcul avec les complexes car c'est quand même plus agréable : $C_n(a,h) + iS_n(a,h) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kh)} = e^{ia}\frac{1-e^{inh}}{1-e^{ih}} = e^{ia}\frac{e^{i\frac{nh}{2}}2i\sin(\frac{nh}{2})}{e^{i\frac{h}{2}}2i\sin(\frac{h}{2})} = e^{i(a+(n-1)\frac{h}{2})}\frac{\sin(\frac{nh}{2})}{\sin(\frac{h}{2})}$. Il ne reste plus qu'à prendre les parties réelle et imaginaire pour obtenir les formules demandées.
3. Parmi les quatre cosinus dont x_1 est la somme, seul le dernier est négatif puisque $\frac{3\pi}{17} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{5\pi}{17} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\frac{7\pi}{17} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, $\cos\left(\frac{11\pi}{17}\right) = -\cos\left(\frac{6\pi}{17}\right)$ et $\cos\left(\frac{6\pi}{17}\right) < \cos\left(\frac{5\pi}{17}\right)$, donc $\cos(5\theta) + \cos(11\theta) > 0$, et x_1, obtenu en ajoutant encore deux termes positifs, est bien positif.
4. La somme $x_1 + x_2$ est exactement de la forme $C_n(a,h)$, avec $a = \theta$, $h = 2\theta$ et $n = 8$. D'après la question 2, on a donc $x_1 + x_2 = \frac{\sin(8\theta)\cos(8\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{2}\frac{\sin(16\theta)}{\sin(\theta)}$. Mais $16\theta = \frac{16\pi}{17} = \pi - \theta$, donc $\sin(16\theta) = \sin(\theta)$ et $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$.
5. Il faut y croire :

$$\begin{aligned} x_1x_2 \; = \; & \cos(3\theta)\cos(\theta) + \cos(3\theta)\cos(9\theta) + \cos(3\theta)\cos(13\theta) + \cos(3\theta)\cos(15\theta) \\ + \; & \cos(5\theta)\cos(\theta) + \cos(5\theta)\cos(9\theta) + \cos(5\theta)\cos(13\theta) + \cos(5\theta)\cos(15\theta) \\ + \; & \cos(7\theta)\cos(\theta) + \cos(7\theta)\cos(9\theta) + \cos(7\theta)\cos(13\theta) + \cos(7\theta)\cos(15\theta) \\ + \; & \cos(11\theta)\cos(\theta) + \cos(11\theta)\cos(9\theta) + \cos(11\theta)\cos(13\theta) + \cos(11\theta)\cos(15\theta) \end{aligned}$$

On utilise les formules de transformation produit/somme et on obtient x_1x_2, comme sommes des cosinus des 32 angles suivants (on peut oublier les signes puisques le cos est pair) : 4θ, 2θ, 12θ, 6θ, 16θ, 10θ, 18θ, 12θ, 6θ, 4θ, 14θ, 4θ, 18θ, 8θ, 20θ, 10θ, 8θ, 6θ, 16θ, 2θ, 20θ, 6θ, 22θ, 8θ, 12θ, 10θ, 20θ, 2θ, 24θ, 2θ, 26θ et 4θ. Or, $26\theta \equiv -8\theta[2\pi]$, donc $\cos(26\theta) = \cos(8\theta)$. De même, $\cos(24\theta) = \cos(10\theta)$, $\cos(22\theta) = \cos(12\theta)$, $\cos(20\theta) = \cos(14\theta)$ et $\cos(18\theta) = \cos(16\theta)$. En regroupant tout ceci, on obtient $x_1x_2 = 2(\cos(2\theta) + \cos(4\theta) + \cos(6\theta) + \cos(8\theta) + \cos(10\theta) + \cos(12\theta) + \cos(14\theta) + \cos(16\theta))$. La parenthèse vaut $C_8(2\theta, 2\theta) = \frac{\sin(8\theta)\cos(9\theta)}{\sin(\theta)}$, avec $\cos(9\theta) = \cos(\frac{\pi}{2} - 8\theta) = -\cos(8\theta)$, d'où $x_1x_2 = -2(x_1+x_2) = -1$.

6. On connait la somme et le produit de x_1 et x_2, ils sont solutions de l'équation $x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 2 = 0$, de discriminant $1 + 16 = 17$. Comme on l'a vu plus haut, $x_1 > 0$, donc on a $x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$.

7. Allons-y : $y_1y_2 = \cos(3\theta)\cos(7\theta) + \cos(3\theta)\cos(11\theta) + \cos(5\theta)\cos(7\theta) + \cos(5\theta)\cos(11\theta) = \frac{1}{2}(\cos(10\theta)+\cos(4\theta)+\cos(14\theta)+\cos(8\theta)+\cos(12\theta)+\cos(2\theta)+\cos(16\theta)+\cos(6\theta)) = \frac{1}{4}x_1x_2 = -\frac{1}{4}$.
De même, $y_3y_4 = \cos(\theta)\cos(9\theta) + \cos(\theta)\cos(15\theta) + \cos(13\theta)\cos(9\theta) + \cos(13\theta)\cos(15\theta) = \frac{1}{2}(\cos(10\theta) + \cos(8\theta) + \cos(16\theta) + \cos(14\theta) + \cos(22\theta) + \cos(4\theta) + \cos(28\theta) + \cos(2\theta)) = -\frac{1}{4}$ (après simplifications similaires à celles faites pour x_1x_2).

8. y_1 et y_2 ayant pour somme x_1 et produit $-\frac{1}{4}$, ils sont solutions de l'équation $x^2 - x_1x - \frac{1}{4}$, donc le discriminant vaut $x_1^2 + 1 = \frac{1}{2}x_1 + 2 = \frac{17+\sqrt{17}}{8}$ et les solutions $\frac{1+\sqrt{17}\pm\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}$. La solution positive est égale à y_1, car y_2 est somme de deux cosinus négatifs. De même, on obtient $y_3 = \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$ et $y_4 = \frac{1-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$.

9. De plus en plus facile : $\cos(\theta)\cos(13\theta) = \frac{1}{2}(\cos(14\theta) + \cos(12\theta)) = \frac{1}{2}(-\cos(5\theta) - \cos(3\theta)) = -\frac{y_1}{2}$. Comme de plus $\cos(\theta)+\cos(13\theta) = y_3$, les réels $\cos(\theta)$ et $\cos(13\theta)$ sont solutions de l'équation $x^2-y_3x-\frac{y_1}{2}$, $\cos(\theta)$ étant la solution positive. Le discriminant de l'équation vaut $y_3^2+2y_1 = \frac{1+17+34-2\sqrt{17}-2\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{578-34\sqrt{17}}}{64} + \frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4} = \frac{68+12\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\sqrt{578-34\sqrt{17}}}{64}$ et on a ensuite $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}+2\sqrt{34-2\sqrt{17}}+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2\sqrt{578-34\sqrt{17}}}}{16}$.
Étonnant, non ?