Devoir Maison n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

23 septembre 2013

Exercice 1

1. C'est bien évidemment vrai, il suffit de prendre $x = -12$ par exemple (ou tout autre réel négatif).
2. Là, c'est faux, une fois le réel x fixé, on peut toujours trouver un autre réel strictement positif et strictement plus petit, par exemple $y = \frac{x}{2}$.
3. C'est vrai, il suffit de prendre $y = e^x$, qui sera en effet toujours strictement positif.
4. Non, c'est faux, car il existe un (et un seul!) contre-exemple pour $x = 0$, qui est tout seul à avoir pour valeur absolue 0. L'affirmation serait vraie en mettant $\forall x \in \mathbb{R}^*$.
5. C'est vrai, une fois x et y fixés strictement positifs, on peut toujours trouver un z suffisamment grand pour que son produit par x soit plus grand que y. Les plus courageux vérifieront que $z = x \times \left(Ent\left(\frac{1}{y}\right) + 1 \right)$ convient toujours.

Exercice 2

1. La seule valeur pouvant poser problème est celle qui annule le dénominateur, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{1\}$.
2. Le plus simple est de faire un tableau de signe de ce qui se trouve dans la valeur absolue. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, donc s'annule pour $x_1 = \frac{-3-1}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-3+1}{2} = -1$. Le dénominateur s'annule évidemment en 1, d'où les signes suivants :

x		-2		-1		1	
$x^2 - 3x + 1$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$x - 2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{x^2+3x+2}{1-x}$	0	$\frac{x^2+3x+2}{x-1}$	0	$\frac{x^2+3x+2}{1-x}$		$\frac{x^2+3x+2}{x-1}$

3. Les antécédents de 0 ont déjà été déterminés, il s'agit de -2 et de -1. Pour les antécédents de 2, il s'agit en fait de résoudre deux équations, tout d'abord $\frac{x^2+3x+2}{1-x} = 2$, qui donne $x^2 + 3x + 2 = 2 - 2x$ puis $x^2 + 5x = 0$, équation ayant pour solutions triviales -5 et 0 ; et $\frac{x^2+3x+2}{x-1} = 2$, qui donne $x^2 + 3x + 2 = 2x - 2$, puis $x^2 + x + 4 = 0$, équation dont le discriminant vaut $\Delta = 1 - 16 = -15$, qui n'admet donc pas de racine réelle. Les deux valeurs obtenues appartenant bien à des intervalles compatibles avec l'expression prise pour résoudre l'équation, 2 admet donc deux antécédents par f : 0 et -5.
   Même méthode pour 5, la première équation donne $x^2+3x+2 = 4-4x$, soit $x^2+7x-2 = 0$, dont le discriminant vaut $49 + 8 = 57$, et admet deux racines $x_1 = \frac{-7-\sqrt{57}}{2}$, et $x_2 = \frac{-7+\sqrt{57}}{2}$; la deuxième équation donne $x^2 + 3x + 2 = 4x - 4$, soit $x^2 - x + 6 = 0$, dont le discriminant vaut

$1-24<0$, qui n'a donc pas de racine réelle. La première racine x_1 étant clairement inférieure à -2, et la deuxième comprise entre 0 et 1 (puisque $7 \leq \sqrt{57} \leq 8$), les deux valeurs sont à nouveau acceptables, et 4 a lui aussi deux antécédents par f.

4. La fonction g a le même domaine de définition que f, et $g'(x) = \dfrac{(2x+3)(x-1)-(x^2+3x+2)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-5}{(x-1)^2}$. Le discriminant du numérateur vaut $\Delta = 4+20 = 24$, donc ce numérateur s'annule en $x_3 = \dfrac{2-\sqrt{24}}{2} = 1-\sqrt{6}$, et en $x_4 = 1+\sqrt{6}$. Calculons les valeurs des extrema correspondants : $g(1+\sqrt{6}) = \dfrac{(1+\sqrt{6})^2+3(1+\sqrt{6})+2}{1+\sqrt{6}-1} = \dfrac{7+2\sqrt{6}+3+3\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}} = 5+2\sqrt{6} \simeq 9.9$. De même, $g(1-\sqrt{6}) = 5-2\sqrt{6} \simeq 0.1$. Les limites ne posent aucun problème : à l'aide du quotient des termes de plus haut degré, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$; et comme $x = 2+3x+2$ prend une valeur positive en 1, on obtient $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = +\infty$. On peut résumer tout cela dans le tableau de variations suivant :

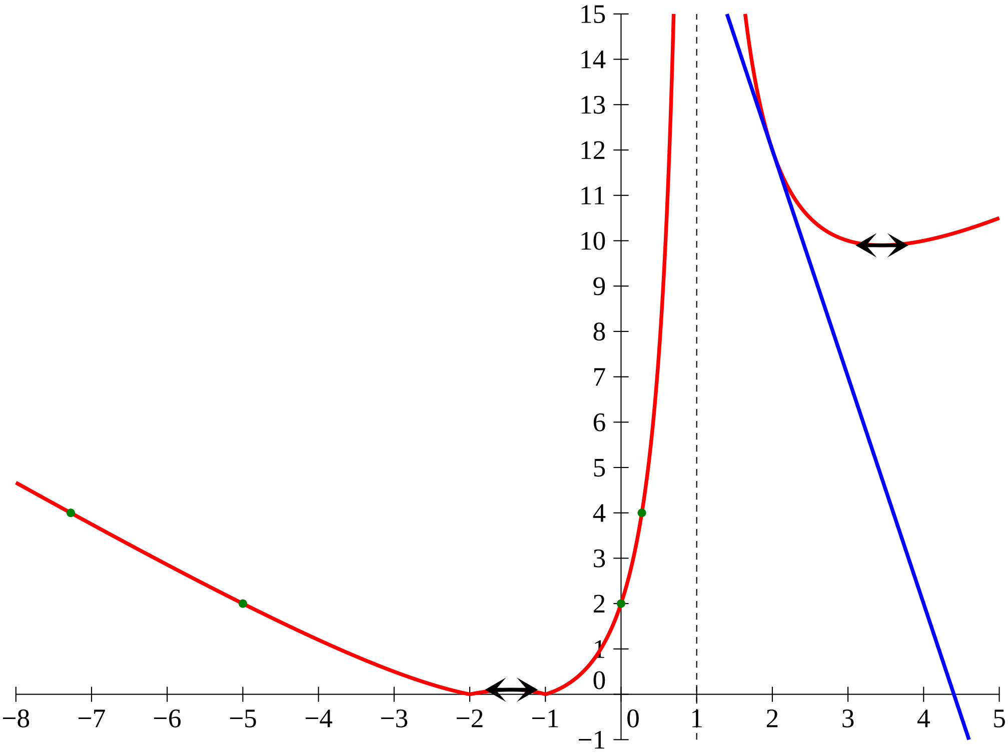
x	$-\infty$		$1-\sqrt{6}$		1		$1+\sqrt{6}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$5-2\sqrt{6}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$5+2\sqrt{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Il suffit d'inverser les variations de g sur les intervalles où f est négative, ce qui donne :

x	$-\infty$		-2		$1-\sqrt{6}$		-1		1		$1+\sqrt{6}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$5-2\sqrt{6}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$5+2\sqrt{6}$	$\nearrow$	$+\infty$

6. Pour $x=2$, on a $f(2) = 12$, et $f'(2) = g'(2) = -5$ puisque 2 se situe dans un intervelle où f et g coincident. L'équation de la tangente est donc $y = -5(x-2)+12 = -5x+22$.

7. Voici la courbe (en rouge) avec sa tangente en bleu. Les points verts indiquent les points de la courbe qui correspondent aux antécédents de 2 et de 4.



Exercice 3 (d'après vieux sujet de bac)

1. Toutes ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$. La fonction $f_1 : x \mapsto xe^{-x}$ a pour dérivée $f_1'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$. L'exponentielle étant évidemment toujours positive, la fonction f_1 est croissante sur $]-\infty; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$. Elle admet en 1 un maximum de valeur $f_1(1) = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \simeq 0.37$ (comme chacun sait). La fonction $f_2 : x \mapsto x^2e^{-x}$ a pour dérivée $f_2'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$. On peut faire un tout petit tableau de signes pour vérifier que f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $[2; +\infty[$ et croissante sur $[0; 2]$. On calcule également $f_2(0) = 0$ (toutes les fonctions f_k s'annulent en 0) et $f_2(2) = \dfrac{4}{e^2} \simeq 0.5$. Enfin, la fonction $f_3 : x \mapsto x^3e^{-x}$ a pour dérivée $f_3'(x) = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = x^2(3-x)e^{-x}$. La dérivée est du signe de $3-x$, donc f_3 est croissante sur $]-\infty; 3]$ et décroissante sur $[3; +\infty[$. Elle admet un maximum en 3 de valeur $f_3(3) = \dfrac{27}{e^3} \simeq 1.3$.

   Les limites en $+\infty$ peuvent se calculer simultanément pour toutes les fonctions, puisqu'on a, quelle que soit la valeur de k, une croissance comparée qui permet d'affirmer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = 0$. En $-\infty$, e^{-x} tendra vers $+\infty$, et est multiplié par x^k qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon la parité de k. On a donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x) = +\infty$. On peut résumer tout ceci avec les trois tableaux suivants :

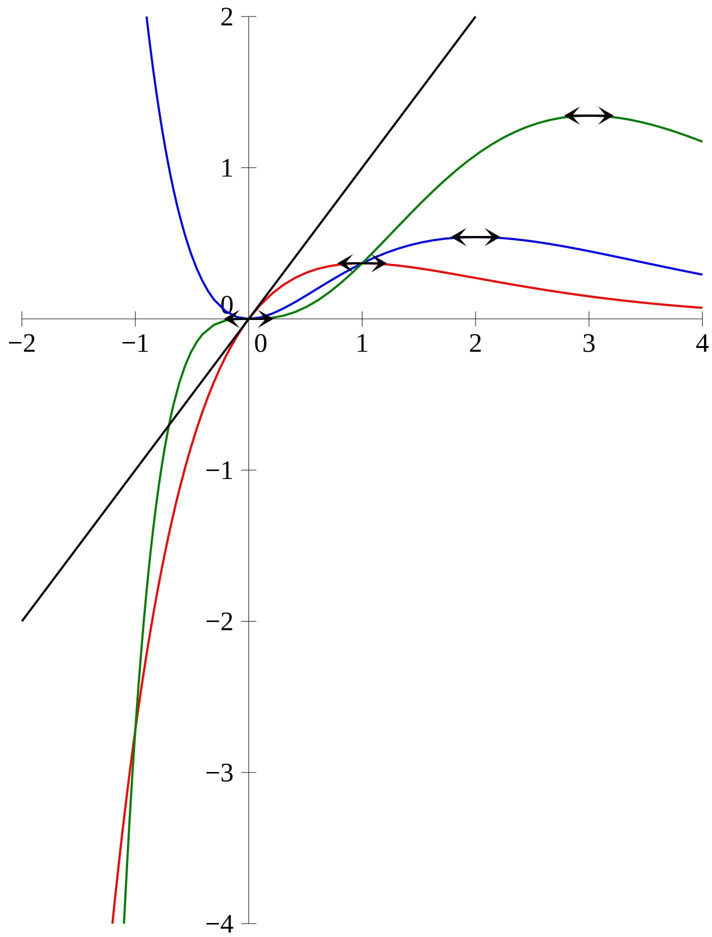
x	$-\infty$	1	$+\infty$
f_1	$-\infty$ $\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$ 0

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f_2	$+\infty$	0	$\frac{4}{e^2}$	0

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f_3	$-\infty$	$\frac{27}{e^3}$	0

Restent les tangentes à l'origine : on a déjà signalé qu'on aurait toujours $f_k(0) = 0$, et $f'_k(0) = 0$ dès que $k \geq 2$ car il y aura toujours un facteur x dans la dérivée. La tangente est alors horizontale. Pour $k = 1$, par contre, $f'_k(0) = 1$, donc la tangente a pour équation $y = x$.

2. Nous avons déjà vu que l'origine était un point commun à toutes les courbes. C'est également le cas du point de coordonnées $\left(1, \frac{1}{e}\right)$, puisqu'on aura toujours $f_k(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ (et ce sont les seuls, car 0 et 1 sont les seules valeurs qui ont toutes leurs puissances égales).
3. Il s'agit simplement de généraliser ce qui a été fait plus haut. La fonction f_k a pour dérivée $f'_k(x) = kx^{k-1}e^{-x} - x^k e^{-x} = x^{k-1}(k - x)e^{-x}$. Lorsque k est impair, le signe de la dérivée est celui de $k - x$ (car x^{k-1} est toujours positif), donc f_k est croissante sur $]-\infty; k]$ et décroissante sur $[k; +\infty[$. Elle admet un maximum pour $x = k$, de valeur $f_k(k) = \frac{k^k}{e^k}$ (ces maxima sont de plus en plus grands et tendent vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$). Lorsque k est pair, la dérivée change également de signe en 0, la fonction est alors décroissante sur $]-\infty; 0]$, admet un minimum à l'origine, est croissante sur $[0; k]$ puis à nouveau décroissante ensuite, avec un maximum donné par la même formule que dans le cas impair. Les limites ont déjà été données dans le cas général un peu plus haut : toujours 0 en $+\infty$ et $-\infty$ ou $+\infty$ selon la parité de k en $-\infty$.
4. Pour cela le plus simple est de déterminer le signe de $f_{k+1}(x) - f_k(x) = x^{k+1}e^{-x} - x^k e^{-x} = x^k(x - 1)e^{-x}$. Les courbes sont donc de plus en plus bas sur $[0; 1]$, et de plus en plus haut sur $[1; +\infty[$. Du côté de $\mathbb{R}^-$, c'est un peu plus compliqué, puisque les courbes sont alternativement au-dessus et en-dessous de l'axe des abscisses. Il est en fait plus cohérent de comparer dans ce cas f_k et f_{k+2} (deux courbes se trouvant du même côté de l'axe), dont la différence vaut $x^k(x^2 - 1)e^{-x}$. Les courbes correspondant à des valeurs paires de k sont donc de plus en plus haut sur $]-\infty; -1]$ et de plus en plus bas sur $[-1; 0]$, et c'est le contraire pour les valeurs impaires de k.
5. Voici donc les trois courbes, f_1 en rouge, f_2 en bleu et f_3 en vert, les tangentes en noir :



2
1
0
−1
−2
−3
−4
−2
−1
0
1
2
3
4