Devoir Maison n°10 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

23 mai 2014

Exercice 1

1. (a) Puisqu'on nous impose la méthode du pivot de Gauss, allons-y :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 3L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow 3L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftarrow -L_2/4 \\ L_3 \leftarrow -L_3/3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

La matrice P est donc inversible, et $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) On calcule aisément $PD = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, puis $PDP^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} M$.

2. (a) Il faut appliquer la formule des probabilités totales au système complet d'événements A_n, B_n, C_n (le fait qu'il s'agisse d'un système complet est évident). L'énoncé nous signale que $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0$ et $P_{B_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$, donc $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{2}c_n$. De même, on trouve les relations $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + c_n)$ et $c_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$. Cela revient exactement à dire que $U_{n+1} = AU_n$.

(b) Faisons donc une petite récurrence : au rang 1, $PD^0P^{-1}U_1 = U_1$ donc la propriété est vérifiée. Supposons-la vérifiée au rang n, alors $U_{n+1} = MU_n = PDP^{-1}PD^{n-1}P^{-1}U_1 = PD^nP^{-1}U_1$, ce qui achève la récurrence.

3. On sait déjà que $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ puisque le client a choisi l'activité B au jour 1. Il ne reste plus qu'à calculer le produit matriciel : $PD^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & (-\frac{1}{2})^{n-1} & (-\frac{1}{2})^{n-1} \\ 1 & -(-\frac{1}{2})^{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & -(-\frac{1}{2})^{n-1} \end{pmatrix}$, puis $PD^{n-1}P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-(-\frac{1}{2})^{n-2} & 1-(-\frac{1}{2})^{n-1} & 1-(-\frac{1}{2})^{n-1} \\ 1-(-\frac{1}{2})^{n-1} & 1-(-\frac{1}{2})^{n-2} & 1-(-\frac{1}{2})^{n-1} \\ 1-(-\frac{1}{2})^{n-1} & 1-(-\frac{1}{2})^{n-1} & 1-(-\frac{1}{2})^{n-2} \end{pmatrix}$. On en déduit que $a_n = c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, et $b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$. La suite géométrique ayant une limite nulle, les trois suites ont pour limite commune $\frac{1}{3}$.

Exercice 2

1. (a) Le discriminant du trinôme vaut $\Delta = e^2 - 4e = e(e-4) > 0$ puisque $e < 4$. Le trinôme est donc toujours strictement positif, et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

(b) Encore un calcul de discriminant : $\Delta = 4e^2 - 8(e^2 - 2e) = 16e - 4e^2 = 4e(4-e) > 0$. Les racines sont donc $\alpha = \frac{2e - \sqrt{4e(4-e)}}{4} = \frac{e - \sqrt{e(4-e)}}{2}$, et $\beta = \frac{e + \sqrt{e(4-e)}}{2}$. Le trinôme P est négatif sur $[\alpha, \beta]$ et positif le reste du temps.

2. (a) Calculons : $f(0) = 1 - \ln(e) = 0$; $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$; $f(e-1) = 1 - \ln(e^2 - 2e + 1 - e^2 + e + e) = 1$ et $f(e) = 1 - \ln(e^2 - e^2 + e) = 0$. Les seules limites à calculer sont en $+\infty$ et en $-\infty$, et elles sont sans difficulté égales à $-\infty$ toutes les deux.

(b) La fonction f est dérivable et $f'(x) = \frac{e - 2x}{x^2 - ex + e}$, qui est du signe de $e - 2x$. La dérivée f' est donc positive sur $\left]-\infty, \frac{e}{2}\right]$ et négative sur $\left[\frac{e}{2}, +\infty\right[$. En particulier, $f'(0) = \frac{e}{e} = 1$, et $f'(e) = \frac{-e}{e} = -1$.

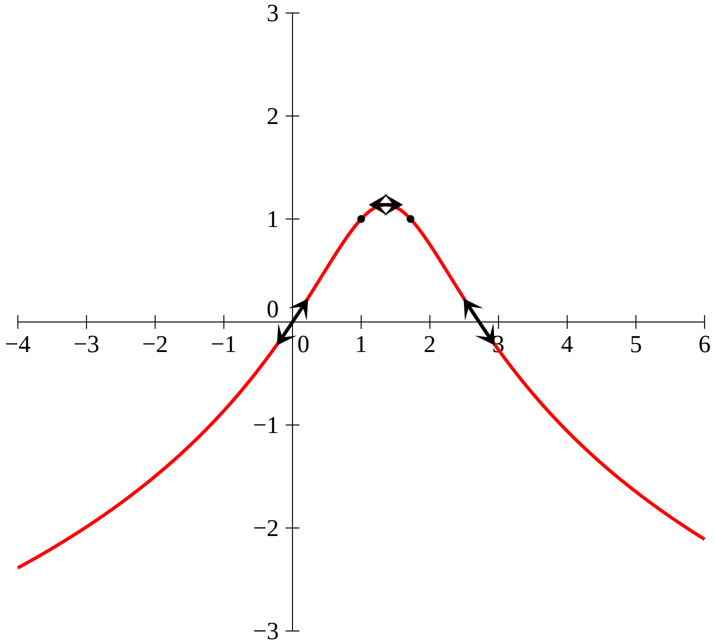
(c) Allons-y pour un joli tableau, en ajoutant que $f\left(\frac{e}{2}\right) = 1 - \ln\left(e - \frac{e^2}{4}\right) = -\ln\left(1 - \frac{e}{4}\right)$:

x	$-\infty$		0		1		$\frac{e}{2}$		$e-1$		e		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$-\ln(1-\frac{e}{4})$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3. Dérivons une seconde fois : $f''(x) = \frac{-2(x^2 - ex + e) + (e - 2x)^2}{(x^2 - ex + e)^2} = \frac{-2x^2 + 2ex - 2e + e^2 - 4ex + 4x^2}{(x^2 - ex + e)^2} = \frac{2x^2 - 2ex + e^2 - 2e}{(x^2 - ex + e)^2}$. On obtient le résultat annoncé, et f'' s'annule donc en α et en β. Les calculs pour les tangentes sont complètement ignobles et sans intérêt : par définition, $\alpha^2 = 2e\alpha + 2e - e^2$ (et de même pour β), donc $f(\alpha) = 1 - \ln(e\alpha + 3e - e^2) = -\ln(\alpha + 3 - e)$ (même formule pour β), soit $f(\alpha) = -\ln\left(3 - \frac{e + \sqrt{e(4-e)}}{2}\right)$. De même, $f(\beta) = -\ln\left(3 - \frac{e - \sqrt{e(4-e)}}{2}\right)$.

Même technique pour les dérivées : $f'(\alpha) = \dfrac{e-2\alpha}{3e+e\alpha-e^2} = \dfrac{2\sqrt{e(4-e)}}{6e-e^2-\sqrt{e(4-e)}}$. Formule similaire pour $f'(\beta)$, écrire les équations de tangente n'a aucun intérêt.

4. Attention à ne pas composer d'équivalent : $f(x) = 1 - \ln\left((x^2\left(1-\dfrac{e}{x}+\dfrac{e}{x^2}\right)\right) = 1-2\ln(x) - \ln\left(1-\dfrac{e}{x}+\dfrac{e}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -2\ln(x)$ (le deuxième logarithme tendant vers 0) Pour un développement asymptotique à trois termes, il suffit de faire un développement limité à l'ordre 1 du deuxième ln puisqu'on dispose déjà de deux termes avec $1-2\ln(x)$, c'est-à-dire d'en prendre un équivalent : $f(x) = -2\ln(x)+1+\dfrac{e}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ puisque $\ln\left(1-\dfrac{e}{x}+\dfrac{e}{x^2}\right) = -\dfrac{e}{x}+\dfrac{e}{x^2}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (équivalent classique du ln en 0).
5. Difficile à vrai dire de placer α et β correctement sur le graphe :



Exercice 3

1. (a) La variable X_1 compte le nombre de clients ayant choisi le forfait 1, sachant que les n clients ont une probabilité indépendante égale à $\dfrac{1}{3}$ de le choisir. On est dans une situation typique de loi binômiale : $X_1 \sim \mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{3}\right)$. En particulier, $X_1(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$, et $P(X_1 = k) = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{3}\right)^k\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-k} = \dbinom{n}{k}\dfrac{2^{n-k}}{3^n}$.
   (b) C'est évidemment du cours : $E(X_1) = \dfrac{n}{3}$, et $V(X_1) = \dfrac{2n}{9}$.
   (c) On ne voit pas très bien quoi justifier tellement c'est évident.
2. (a) L'égalité $X_1 + X_2 = n - X_3$ découle de la relation triviale $X_1 + X_2 + X_3 = n$. On en déduit que $V(X_1 + X_2) = V(n - X_3) = V(X_3) = \dfrac{2n}{9}$.
   (b) Toutes les valeurs de k comprises entre 0 et n sont pertinentes. Si on suppose $X_1 = 0$, l'événement $X_3 = k$ se produit si $n-k$ client ont choisi le forfait 2 et k ont choisi le forfait 3, mais parmi seulement deux forfaits possibles, avec donc une probabilité $\dfrac{1}{2}$ de choisir

chacun des deux. On a donc $P_{X_1=0}(X_3 = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$. Cette probabilité n'est pas la même que $P(X_3 = k)$, les événements ne sont donc sans surprise pas indépendants.

3. Vu les tarifs des trois forfaits, $H = 10X_1 + 20X_2 + 30X_3$. Par linéarité de l'espérance, $E(H) = 10E(X_1) + 20E(X_2) + 30E(X_3) = 60E(X_1) = 20n$. Oui, on peut retrouver le résultat plus facilement : chaque client paye mensuellement un abonnement qui a une chance sur trois de coûter 10 euros, une chance sur trois de coûter 20 euros et une chance sur trois de coûter 30 euros. Il paye donc en moyenne 20 euros par mois, à multiplier par le nombre de clients.