Devoir Maison n°10

PTSI B Lycée Eiffel

à rendre au plus tard le 23 mai 2014

Ce sujet est constitué de trois exercices (sur quatre), à peine modifiés, d'une épreuve de concours récente de 4 heures. Pour vous entraîner, vous pouvez donc essayer de le traiter en trois heures en conditions d'examen.

Exercice 1

Un centre de vacances étudie le comportement d'un client qui a le choix chaque jour entre trois activités notées A, B et C. On considère que, si le client a choisi une activité au jour n, il en change systématiquement le lendemain, et choisit de manière équiprobable entre les deux autres activités. Le premier jour (c'est-à-dire pour $n = 1$), notre client a choisi l'activité B.

On note pour tout l'exercice A_n l'événement « le client a choisi l'activité A au jour n » et a_n sa probabilité (de même pour B et C). On notera également $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

On définit par ailleurs les matrices suivantes : $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1. (a) Par la méthode du pivot de Gauss, prouver que P est une matrice inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Vérifier que $M = PDP^{-1}$.
2. (a) Montrer, pour tout entier $n \geq 1$, $U_{n+1} = MU_n$.
   (b) Établir que, $\forall n \geq 1$, $U_n = PD^{n-1}P^{-1}U_1$.
3. En déduire les valeurs de a_n, de b_n et de c_n ainsi que leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \ln(x^2 - ex + e)$. On notera $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que, pour tout réel x, $x^2 - xe + e > 0$. En déduire le domaine de définition de la fonction f.
   (b) On note $P(x) = 2x^2 - 2ex + e^2 - 2e$. Déterminer les racines de P, notées α et β, et le signe de P.
2. (a) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(e-1)$ et $f(e)$. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
   (b) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. On donnera les valeurs de $f'(0)$ et $f'(e)$.

(c) Dresser le tableau de variations de f en faisant apparaitre toutes les valeurs calculées ci-dessus.

3. Vérifier que $f''(x) = \dfrac{P(x)}{(x^2 - ex + e)^2}$ et en déduire les valeurs d'annulation de f''. Déterminer l'équation des tangentes à $\mathcal{C}_f$ en ces points.
4. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis un développement asymptotique de $f(x)$ à trois termes significatifs quand x tend vers $+\infty$.
5. Tracer une allure soignée de $\mathcal{C}_f$. On donne $f\left(\dfrac{e}{2}\right) \simeq 1.1$, $\alpha \simeq 0.4$ et $\beta \simeq 2.3$.

Exercice 3

Un opérateur téléphonique propose trois forfaits : un forfait numéro 1 à 10 euros par mois, un forfait 2 à 20 euros par mois et un forfait 3 à 30 euros par mois.

Un groupe de n clients se rend dans une boutique de cet opérateur, et chaque client choisit un des trois forfaits au hasard, les choix étant équiprobables et indépendants les uns des autres. On note X_1 le nombre de clients ayant choisi le forfait 1, X_2 et X_3 pour les forfaits 2 et 3, et H la somme globale versée par ces n clients à l'opérateur chaque mois.

1. (a) Justifier que X_1 suit une loi usuelle que l'on précisera. On donnera également $X_1(\Omega)$ et l'expression de $P(X_1 = k)$ pour tous les entiers k appartenant à $X_1(\Omega)$.
   (b) Donner l'espérance $E(X_1)$ et la variance $V(X_1)$.
   (c) Justifier que X_2 et X_3 suivent la même loi que X_1.
2. (a) Justifier que $X_1 + X_2 = n - X_3$ et en déduire la variance de $X - 1 + X_2$.
   (b) Calculer $P_{X_1=0}(X_3 = k)$ (pour toutes les valeurs de k pertinentes). Les événements $X_1 = 0$ et $X_3 = k$ sont-ils indépendants ?
3. Exprimer H en fonction de X_1, X_2 et X_3, et en déduire la valeur de $E(H)$. Comment aurait-on pu démontrer plus facilement ce résultat ?