Concours Blanc : épreuve de mathématiques

PTSI A et B Lycée Eiffel

26 mai 2014

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

La qualité de la rédaction et le soin apporté à la présentation de la copie seront pris en compte lors de la correction. En particulier, toute tentative de bluff ou résultat affirmé sans justification sera fortement sanctionné.

Exercice 1

Partie I. Étude d'une fonction f.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x}$ si $x > 0$, et $f(0) = 1$.

1. Ecrire le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 2, au voisinage de 0. En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
3. Déterminer une fonction φ telle que, $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.
4. Étudier les variations de φ sur $]0, +\infty[$, et en déduire le tableau de variations complet de la fonction f.

Partie II. Étude d'une suite.

On introduit désormais la suite (u_n) définie pour tout entier n non nul par $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{e^{-\frac{u}{n}}}{1+u}\, du$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant \dfrac{1}{e}\ln(n+1)$. En déduire la limite de la suite (u_n).
2. Expliquer pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ existe, et prouver que

   $0 \leqslant \displaystyle\int_0^n \frac{1}{1+u}\, du - u_n \leqslant \int_0^1 f(x)\, dx$.
3. Donner alors un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On effectue une suite de lancers d'une pièce déséquilibrée, donnant Pile avec une probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec probabilité $q = 1-p$ à chaque lancer. On admet que les différents lancers sont indépendants. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on dit que le k-ème lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)$-ème lancer. On note par ailleurs X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers. Ainsi, pour $n = 6$, la suite de lancers $PPFFFP$ contient deux changements, pour $k = 3$ et $k = 6$, donc $X_6 = 2$ dans cet exemple (on notera P et F en lieu et place de Pile et Face pour ne pas surcharger l'énoncé).

1. Donner la loi de X_2.
2. (a) Donner la loi de X_3.
   (b) Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3-8pq)$.
3. (a) Trouver la loi de X_4.
   (b) Calculer $E(X_4)$.
4. On se place désormais dans le cas général.
   (a) Exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de p, q et n.
   (b) En décomposant l'événement $(X_n = 1)$ en une réunion d'événements incompatibles, montrer que $P(X_n = 1) = \dfrac{2pq}{q-p}(q^{n-1} - p^{n-1})$.
   (c) En distinguant les cas n pair et n impair, exprimer $P(X_n = n-1)$ en fonction de p et q.
5. On se place pour cette dernière question dans le cas particulier où $p = q = \dfrac{1}{2}$.
   (a) Vérifier que X_3 et X_4 suivent alors une loi binômiale donc on précisera le paramètre.
   (b) Prouver plus généralement que X_n suit une loi binômiale dont on précisera le paramètre, l'espérance et la variance.

Exercice 3

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln(x) - 2$. On donne pour tout l'exercice $\ln(2) \simeq 0,7$.

1. (a) Déterminer les variations de la fonction g.
   (b) Calculer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.
   (c) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α, et prouver que $1 < \alpha < 2$.
   (d) Déterminer le signe de $g(x)$.
   (e) Tracer dans un repère orthonormé une allure de la courbe représentative de g, en faisant notamment apparaitre les points d'abscisse 1 et 2.
2. (a) Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_1^\alpha \ln(x)\,dx$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\int_1^\alpha g(x)\,dx = \frac{8-2\alpha^3}{3} - \alpha$.
3. On souhaite maintenant construire une suite déterminant une valeur approchée de α. On définit pour cela la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2 - \ln(u_n)}$.
   (a) On pose, $\forall x \in [1,2]$, $h(x) = \sqrt{2-\ln(x)}$. Déterminer $h'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction h sur $[1,2]$, et prouver que $h([1,2]) \subset [1,2]$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est bien définie et qu'on a toujours $u_n \in [1,2]$.

(c) Prouver que, $\forall x \in [1,2]$, $|h'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(d) Montrer que $h(\alpha) = \alpha$, et en déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

(e) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, en déduire la convergence de (u_n) et la valeur de sa limite.

Exercice 4

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ étant données, on suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.
On définit la suite de matrices (U_n) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la manière suivante : $U_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n = L + A^n(U_0 - L)$.

   Dans la suite de l'exercice on pose $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   On note par ailleurs :
   - id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
   - a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.
   - b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est B.

2. (a) Prouver que le vecteur $u = (x, y, z)$ appartient à l'image de b si et seulement si $-x + y + z = 0$, puis prouver que $\mathrm{Im}\ (b) = \mathrm{Im}\ (\mathrm{id} - a)$.

   (b) Déterminer une base de $\ker(a - \mathrm{id})$.

   (c) Montrer que la famille constituée des vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (0, -1, 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, qu'on notera $\mathcal{B}$ dans la suite de l'exercice.

   (d) Écrire la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$.

3. Écrire la matrice D de l'endomorphisme a ainsi que la matrice B' de l'endomorphisme b dans la base $\mathcal{B}$.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. En écrivant D^n comme la somme de trois matrices diagonales judicieusement choisies, prouver l'existence de trois matrices E, F, G indépendantes de n telles que pour tout entier naturel n, $A^n = E + \dfrac{1}{2^n}F + \dfrac{1}{3^n}G$. Expliciter la matrice E (mais pas les autres) sous forme de tableau de nombres.

6. Déterminer par le calcul, une matrice L' de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ telle que $L' = DL' + B'$.

7. Montrer que la matrice $L = PL'P^{-1}$ vérifie $L = AL + B$ (on peut faire cette question sans avoir répondu à la précédente).

8. Établir que $EL = 0$.

9. Montrer que chacun des coefficients de la matrice U_n a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, les coefficients de la matrice $EU_0 + L$.