# Suites

PTSI B Lycée Eiffel

19 janvier 2013

*Une méthode est un truc qui a été utilisé plusieurs fois.*

George Polya (1887-1985), mathématicien hongrois.

*Deux suites adjacentes décident d'aller s'éclater dans une soirée « no limit ». Mais elles se refouler à l'entrée parce qu'elles convergent !*

## Introduction

**Objectifs du chapitre :**

- connaitre précisément le vocabulaire sur les suites, et comprendre la signification des définitions de limite, équivalence et négligeabilité
- maîtriser les techniques classiques de calcul de limite et d'étude de suite
- savoir étudier une suite récurrente ou une suite implicite en faisant intervenir des fonctions

## 1 Structure de l'ensemble $\mathbb{R}$

Nous ne donnerons pas dans ce cours de construction rigoureuse de l'ensemble $\mathbb{R}$, mais nous contenterons de dégager quelques éléments de structure sur $\mathbb{R}$, qui nous permettrons de mieux comprendre certains théorèmes sur les limites de suites.

### 1.1 Relations d'ordre

**Définition 1.** Une **relation** $R$ sur un ensemble $E$ est un sous-ensemble de $E^2$. On dit que deux éléments $x$ et $y$ de $E$ sont en relation, et on note en général $xRy$, si $(x, y) \in E$.

**Exemples :** Une relation est en fait simplement quelque chose qui relie deux éléments d'un ensemble. L'ordre dans lequel on place les deux éléments est en général important. Quelques exemples de relations plus ou moins classiques en méthématiques pour montrer la diversité que peut recouvrir cette définition :

- la relation de perpendicularité sur l'ensemble des droites du plan (ici, l'ordre n'est pas important).
- la relation de divisibilité sur l'ensemble des entiers (naturels ou relatifs).

- la relation $xRy$ si $x$ a un dénominateur plus petit que $y$ lorsqu'on écrit les deux nombres sous forme de fractions irréductibles (cette relation ne peut être définie que sur $\mathbb{Q}$).
- la relation $ARB$ s'il existe une application $f : A \to B$ injective sur $\mathbb{P}(\mathbb{R})$.

**Définition 2.** Une relation sur un ensemble $E$ est une **relation d'ordre** si elle a les trois caractéristiques suivantes :
- réflexive : $\forall x \in E$, $xRx$.
- antisymétrique : si $xRy$ et $yRx$, alors $y = x$.
- transitive : si $xRy$ et $yRz$, alors $xRz$.

**Définition 3.** Une relation d'ordre est **totale** si, $\forall (x, y) \in E^2$, on a soit $xRy$, soit $yRx$.

*Remarque* 1. Les propriétés faisant d'une relation une relation d'ordre sont des propriétés naturelles pour que la relation permette de classer les éléments d'un ensemble. On considérera que $xRy$ signifie que $x$ est « plus petit » que $y$ au sens de la relation $R$ (qui ne correspond pas toujours à l'ordre usuel sur l'ensemble considéré quand il y en a un). Une relation d'ordre est total si on peut toujours comparer deux éléments de l'ensemble. Ce n'est par exemple pas le cas de la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$ (qui est pourtant une relation d'ordre).

**Théorème 1.** La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$.

*Démonstration.* On ne peut évidemment rien prouver sans donner de définition de ce qu'est l'ensemble $\mathbb{R}$. Ce résultat est en fait plus un axiome qu'un véritable théorème. □

## 1.2 Borne supérieure

Toutes les définitions de ce paragraphe seront données dans le cas particulier de la relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{R}$, mais elles peuvent être facilement généralisées à une relation d'ordre $R$ sur un ensemble $E$ quelconque.

**Définition 4.** Soit $A \subset \mathbb{R}$. Le réel $M$ est un **majorant de** $A$ (ou $A$ est **majorée par** $M$) si $\forall x \in A$, $A \leqslant M$. On définit un **minorant** $m$ de façon symétrique par la condition $\forall x \in A$, $m \leqslant x$. Le réel $M$ constitue une **borne supérieure de** $A$ si de plus, pour tout autre majorant $M'$ de $A$, on a $M \leqslant M'$. On définit de même une **borne inférieure** comme un plan grand minorant de l'ensemble $A$. On note ces réels respectivement $\sup(A)$ et $\inf(A)$.

*Remarque* 2. Un majorant n'appartient pas nécessairement à l'ensemble $A$. Si c'est le cas, on dit que $M$ constitue un maximum de $A$ (symétriquement un minimum si c'est un minorant appartenant à $A$).

**Proposition 1.** Si un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, celle-ci est unique.

*Démonstration.* Supposons donc qu'il y en ait deux, que nous noterons $M_1$ et $M_2$. Par définition de la borne supérieure, on a donc $M_1 \leqslant M_2$, puisque $M_2$ est également un majorant de l'ensemble, et de même $M_2 \leqslant M_1$. L'antisymétrie de la relation d'ordre assure alors que $M_1 = M_2$ (ce résultat reste valable pour une relation d'ordre quelconque. □

**Théorème 2.** Tout sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

*Démonstration.* Ce résultat est en fait un des axiomes constitutifs de l'ensemble $\mathbb{R}$. □

**Proposition 2.** Caractérisation de la borne supérieure.
Un réel $M$ est la borne supérieure de l'ensemble $A$ si et seulement si $M$ est un majorant de $A$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$, $M - \varepsilon \leqslant x$.

*Démonstration.* Supposons que $M = \sup(A)$, alors $M$ est un majorant de $A$. De plus, si la propriété énoncée ci-dessus n'est pas vérifiée, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in A$, $x \leqslant M - \varepsilon$. Dans ce cas, le réel $M - \varepsilon$ est un majorant de l'ensemble $A$, qui est plus petit que sa borne supérieure $M$. Ceci contredit la définition d'une borne supérieure.
Dans l'autre sens, il est plus facile de raisonner par contraposée. Si $M \neq \sup(A)$, il existe donc un majorant de $A$ plus petit que $M$, notons-le $M'$ et posons $\varepsilon = M - M'$. On a bien $\varepsilon > 0$ et, $M'$ étant un majorant de $A$, $\forall x \in A$, $x \leqslant M' = M - \varepsilon$, ce qui contredit la caractérisation de l'énoncé. □

**Définition 5.** On note $\overline{\mathbb{R}}$, et on appelle **droite réelle achevée** l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.

*Remarque* 3. On peut prolonger sur $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{R}$ en posant $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant x$, et $x \leqslant +\infty$. Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet alors une borne supérieure et une borne inférieure.

**Proposition 3.** $\mathbb{R}$ est **archimédien** : $\forall (x, y) > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $y \leqslant nx$.

*Démonstration.* Procédons par l'absurde. Si la propriété est fausse, cela revient à dire que, pour un certain $x$, l'ensemble $\{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré (par $y$). Notons alors $M$ sa borne supérieure, et appliquons la caractérisation de la borne supérieure en prenant $\varepsilon = x$. Il existe donc un entier $n$ pour lequel $M - x \leqslant nx$. Mais alors $M < M + x \leqslant (n + 2)x$, ce qui contredit violemment le fait que $M$ est un majorant de notre ensemble. □

**Définition 6.** Pour tout nombre réel $x$, il existe un unique entier relatif $n$ vérifiant $n \leqslant x < n + 1$. Cet entier est appelé **partie entière** de $x$, et noté $Ent(x)$, ou $\lfloor x \rfloor$.

*Démonstration.* Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe certainement un entier $n$ à partir duquel $n > x$. Il suffit alors de prendre le maximum de l'ensemble constitué des entiers inférieurs à $x$ pour obtenir sa partie entière. □

**Définition 7.** Un **intervalle** est une partie convexe de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un sous-ensemble $I$ pour lequel, si $(x, y) \in I^2$, tout réel vérifiant $x \leqslant z \leqslant y$ appartient à $I$.

Nous ne détaillerons volontairement pas tous les types d'intervalles existant dans $\mathbb{R}$, travail fastidieux et sans grand intérêt. Les propriétés des intervalles sont supposées connues.

**Définition 8.** Un sous-ensemble $A$ de $\mathbb{R}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient un élément de $A$.

**Théorème 3.** L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est également dense dans $\mathbb{R}$.

*Démonstration.* La preuve étant compliquée dans le cas des irrationnels, on admettra ce résultat. □

# 2 Généralités sur les suites

## 2.1 Vocabulaire

**Définition 9.** Une **suite** d'élements d'un ensemble $E$ est une application $u : \mathbb{N} \to E$. On note habituellement $u_n$ l'image par une telle application de l'entier $n$, aussi appelé **terme d'indice** $n$ de la suite et on désigne par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des termes de la suite, c'est-à-dire la suite elle-même. On parle également de suite de **terme général** $u_n$ lorsqu'on donne l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

On peut définir une suite réelle de bien des façons, les plus fréquentes étant les suivantes :

- par la liste de ses éléments, par exemple $u_0 = 2$ ; $u_1 = 4$ ; $u_2 = 6$ ; $u_3 = 8$ ; $u_4 = 10$ etc. C'est la méthode la plus naturelle, mais elle trouve très vite ses limites puisqu'il faut que la suite soit suffisamment simple pour qu'on devine tous les termes à partir des premiers.

- par une formule explicite pour le terme général, par exemple $u_n = n^2 - 4n + 1$. C'est une définition qui ressemble beaucoup à la définition usuelle d'une fonction, et qui est extrêmement pratique pour les calculs. C'est celle qu'on cherchera à obtenir le plus souvent.
- un cas très fréquent est le cas de la définition par récurrence. Elle consiste à donner une relation de récurrence entre les termes de la suite, c'est-à-dire à exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$, et à préciser la valeur de $u_0$ (sinon, c'est comme pour une récurrence non initialisée, ça ne sert à rien). Par exemple, $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 5$. C'est beaucoup moins pratique pour les calculs qu'une définition explicite, mais c'est souvent la définition la plus naturelle que nous aurons d'une suite. Il peut arriver qu'une suite soit définie par récurrence double ($u_{n+2}$ en fonction de $u_{n+1}$ et $u_n$), auquel cas il faut préciser les valeurs de $u_0$ et $u_1$, voire par récurrence triple ou pire (mais c'est plus rare !).
- de façon implicite, par exemple $u_n$ est l'unique réel positif vérifiant $e^{u_n} - u_n - 2 = n$ (croyez-moi sur parole, il y en a un et un seul pour chaque valeur de $n$). Pas vraiment extrêmement pratique pour les calculs, mais on n'arrive pas toujours à obtenir une formule explicite. Dans ce cas, on arrive quand même à étudier la suite à l'aide d'études de fonctions.

*Remarque* 4. L'ensemble des suites réels est naturellement muni d'opération de somme (on additionne les deux suites terme à terme) et de produit par un réel, qui lui donnent une structre d'espace vectoriel réel. Il existe également une opération de produit sur les suites.

**Définition 10.** Une suite réelle $(u_n)$ est **croissante** (resp. **décroissante**) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n \geqslant u_{n+1}$ ; je vous fais grâce des définitions de croissance et décroissance stricte). Une suite réelle est **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n = u_{n_0}$.

**Exemple** : Une technique classique pour étudier le sens de variation d'une suite est de calculer $u_{n+1}-u_n$ et de déterminer son signe. Prenons la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2+u_n+2$, alors $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 2 > 0$, donc la suite est strictement croissante.

**Définition 11.** Une suite $(u_n)$ est **majorée** (resp. **minorée**) par un réel $m$ si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant m$ (resp. $u_n \geqslant m$). Elle est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

*Remarque* 5. Une suite est majorée si $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré.

## 2.2 Suites usuelles

**Définition 12.** Une **suite arithmétique** de raison $r \in \mathbb{R}$ est une suite $(u_n)$ vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

**Proposition 4.** Une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$ vérifie les résultats suivants :
- formule explicite : $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_n = u_0 + nr$.
- variations : si $r > 0$, la suite $(u_n)$ est strictement croissante ; si $r < 0$, elle est strictement décroissante.
- sommes partielles : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$.

*Démonstration.*
- Une petite récurrence permet de prouver $P_n : u_n = u_0+nr$. C'est vrai au rang 0 : $u_0 = u_0+0\times r$, et en le supposant vrai au rang $n$, on a par définition $u_{n+1} = u_n+r = u_0+nr+r = u_0+(n+1)r$, donc $P_{n+1}$ est vérifiée. D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- Cela découle de façon immédiate de la constatation que $u_{n+1} - u_n = r$.
- $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} u_0 + kr = \sum_{k=0}^{k=n} u_0 + r\sum_{k=0}^{k=n} k = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2u_0 + nr))(n+1)}{2} = \frac{(u_0 + u_0 + nr)(n+1)}{2} = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$. On a réutilisé pour ce calcul une des sommes classiques calculées au chapitre sur les ensembles.

□

**Définition 13.** Une **suite géométrique** de raison $q \in \mathbb{R}$ est une suite vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.

**Proposition 5.** Une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$ vérifie les résultats suivants :

- formule explicite : $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
- variations : si $q > 1$ et $u_0 > 0$, la suite $(u_n)$ est strictement croissante ; si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, elle est strictement décroissante (si $u_0 < 0$, c'est le contraire). Si $q < 0$, les termes de la suite sont de signe alterné.
- sommes partielles : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $q \neq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

*Démonstration.*

- Une petite récurrence permet de prouver $P_n : u_n = u_0 \times q^n$. C'est vrai au rang 0 : $u_0 = u_0 \times q^0$, et en le supposant vrai au rang $n$, on a par définition $u_{n+1} = u_n \times q = u_0 \times q^n \times q = u_0 \times q^{n+1}$, donc $P_{n+1}$ est vérifiée. D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
- On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 q^n (q - 1)$. Toues les résultats concernant le sens de variation en découlent.
- $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} u_0 \times q^k = u_0 \sum_{k=0}^{k=n} q^k = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

□

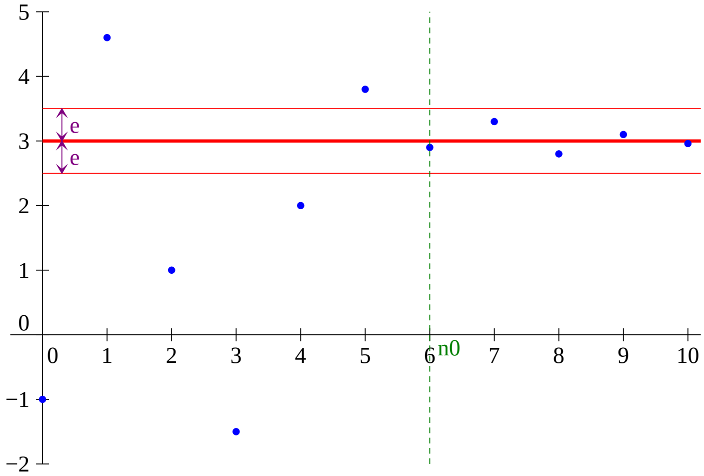
# 3 Convergence de suites

Une petite remarque préliminaire : dans la partie précédente, la plupart des résultats peuvent s'étendre à des suites qui ne sont pas à valeurs réelles (oui, mêmes les notions de suites arithmétique ou géométrique). Pour les résultats de convergence, nous allons nous restreindre au cas des suites réelles.

## 3.1 Limites finies

**Définition 14.** Une suite réelle $(u_n)$ **converge** vers une **limite** $l \in \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - l| < \varepsilon$. On note alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$. Toute suite convergeant vers une limite $l$ est appelée suite **convergente**. Sinon, la suite est dite **divergente** (même si elle peut avoir une limite infinie).

Rappelons que $|u_n - l| < \varepsilon$ signifie que $u_n \in ]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$. Autrement dit, aussi petit que soit l'intervalle que l'on prend autour du réel $l$ (c'est-à-dire aussi proche de 0 que soit $\varepsilon$ dans notre définition), les valeurs de la suite vont finir par être **toutes** dans cet intervalle, à condition qu'on attende suffisamment longtemps (jusqu'à $n_0$). Sur la figure ci-dessous, on a $l = 3$, et pour $\varepsilon = 0.5$ (noté $e$ sur la figure), $n_0 = 6$.




**Méthode** : Pour prouver qu'une suite donnée converge vers un certain réel à l'aide de cette définition (ce qu'on fera heureusement assez rarement, mais il est important de bien comprendre les mécanismes cachés derrière le formalisme), on procède ainsi :

- On fixe $\varepsilon$ à une valeur strictement positive quelconque.
- On calcule $|u_n - l|$.
- On cherche une valeur de $n_0$ (qui va naturellement dépendre de $\varepsilon$) à partir de laquelle cette expression est inférieure à $\varepsilon$.

**Exemple** : Considérons la suite définie par $u_n = \dfrac{n+3}{n+2}$, et prouvons que sa limite vaut 1. Soit $\varepsilon > 0$, alors $|u_n - 1| = \left|\dfrac{n+3}{n+2} - 1\right| = \left|\dfrac{n+3-(n+2)}{n+2}\right| = \left|\dfrac{1}{n+2}\right| = \dfrac{1}{n+2}$. L'expression étant positive, il suffit de déterminer pour quelles valeurs de $n$ on a $\dfrac{1}{n+2} < \varepsilon$, ce qui nous donne $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 2$. On peut donc choisir $n_0 = Ent\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 2\right) + 1$ (remarquez que, plus $\varepsilon$ est proche de 0, plus $n_0$ devient grand, ce qui est logique).

*Remarque* 6. Le fait qu'une suite converge vers une limite $l$ est équivalent à avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - l = 0$.

**Proposition 6.** Soit $(u_n)$ une suite convergente, alors sa limite $l$ est unique.

*Démonstration.* Nous allons recourir à un raisonnement par l'absurde pour démontrer cette proposition. Supposons donc que le résultat énoncé est faux, c'est-à-dire qu'une même suite $(u_n)$ admet deux limites distinctes $l$ et $l'$ (notons par exemple $l'$ la plus grande des deux). Appliquons donc la définition de la limite avec $\varepsilon = \dfrac{l'-l}{3}$ : on peut donc trouver d'une part un entier $n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in ]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$ ; d'autre part un entier $n_1$ tel que $\forall n \geqslant n_1$, $u_n \in ]l'-\varepsilon; l'+\varepsilon[$. Mais alors, dès que $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a $u_n \in ]l-\varepsilon; l+\varepsilon[ \cap ]l'-\varepsilon; l'+\varepsilon[$, ce qui est très gênant puisque cette intersection est vide d'après la définition de $\varepsilon$. Conclusion, l'hypothèse effectuée était absurde, et une suite ne peut pas avoir deux limites différentes. □

**Proposition 7.** Toute suite convergente est bornée.

*Démonstration.* Appliquons la définition de la limite avec par exemple $\varepsilon = 1$. On obtient un entier $n_0$ tel que, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in ]l-1; l+1[$. Par ailleurs, les termes de la suite d'indice inférieur à $n_0$ sont en nombre fini, il en existe donc un qui est le plus grand (notons sa valeur $M$) et un qui est le plus petit (on va le noter $m$). Il est alors facile de constater que la suite est minorée par $\min(m, l-1)$ et majorée par $\max(M, l+1)$. □

**Définition 15.** Une **sous-suite** d'une suite $(u_n)$ (aussi appelée **suite extraite**) est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Les sous-suites que nous manipulerons le plus souvent sont les sous-suites de la forme $(u_{2n})$ (on ne garde que les termes d'indice pair de la suite), $(u_{2n+1})$ (on garde les termes d'indice impair), $u_{3n}$, etc.

**Proposition 8.** Soit $(u_n)$ une suite réelle convergeant vers une limite $l$. Alors toute sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de $(u_n)$ converge vers cette même limite $l$.

*Démonstration.* C'est évident. Si on fixe un $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $n_0$ à partir duquel $|u_n - l| < \varepsilon$, et l'application $\varphi$ étant strictement croissante, on aura a fortiori $|u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$ dès que $n \geqslant n_0$. □

*Remarque* 7. La réciproque de cette proposition est évidemment fausse. Un contre-exemple classique (qui est aussi un contre-exemple à la réciproque de la proposition sur le caractère borné des suites convergentes) est la suite définie par $u_n = (-1)^n$. Pour cette suite, la suite extraite $(u_{2n})$ a pour limite 1 puisqu'elle est constante, la suite $(u_{2n+1})$ converge quant à elle vers $-1$, et $(u_n)$ n'est pas convergente.

**Proposition 9.** Si les deux sous-suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ d'une suite $(u_n)$ convergent vers une même limite $l$, alors $(u_n)$ converge vers $l$.

*Démonstration.* Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un entier $n_0$ et un entier $n_1$ à partir desquels on aura respectivement $|u_{2n} - l| < \varepsilon$ et $|u_{2n+1} - l| < \varepsilon$. Si $n \geqslant \max(2n_0, 2n_1+1)$, $u_n$ est de la forme $2p$ (s'il est pair) ou $2p+1$ (s'il est impair) pour un entier $p \geqslant \max(n_0, n_1)$, donc on aura $\forall n \geqslant \max(2n_0, 2n_1+1)$, $|u_n - l| < \varepsilon$, ce qui prouve que $(u_n)$ converge vers $l$. □

**Théorème 4.** Bolzano-Weierstraß.
De tout suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

*Démonstration.* Ce théorème est complètement HORS-PROGRAMME, interdiction absolue de l'utiliser en devoir. Nous en verrons tout de même une démonstration amusante un peu plus bas. □

**Théorème 5.** Théorème de convergence monotone :
Toute suite décroissante et minorée converge. Toute suite croissante et majorée converge.

*Démonstration.* Plaçons-nous dans le cas d'une suite croissante majorée. L'ensemble des termes de la suite étant majoré, il admet une borne supérieure $M$. On va prouver que la suite converge vers $M$. Soit $\varepsilon > 0$, par caractérisation de la borne supérieure, il existe un entier $n_0$ tel que $M - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant M$. Mais, la suite étant croissante et $M$ étant un majorant de la suite, on a alors $\forall n \geqslant n_0$, $M - u_n < u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant M$, et en particulier $|u_n - l| < \varepsilon$. Ceci prouve la convergence de la suite vers $M$. □

*Remarque* 8. Attention ! Une suite croissante et majorée par un réel $M$ ne converge pas nécessairement **vers M**. La suite a tout un paquet de majorants, dont un seul est sa limite. En fait, on aura toujours dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup(\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\})$.

**Exemple :** La suite définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx$ est croissante (car, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} \leqslant x^n$, donc $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant \dfrac{1}{1+x^{n+1}}$), et majorée par 1 (car $\forall x \in [0;1]$, $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx \leqslant \int_0^1 1dx = 1$), donc convergente. Mais ces arguments ne prouvent en aucun cas que sa limite est 1. Le calcul de la limite est d'ailleurs loin d'être simple (nous reverrons des exemples de ce genre dans le chapitre sur l'intégration).

*Démonstration.* du théorème de Bolzano-Weierstraß.
Soit donc $(u_n)$ une suite bornée. Notons $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p \geqslant n,\ u_n \geqslant u_p\}$. Deux possibilités : soit l'ensemble est fini, soit il est infini. Si $A$ est infini, on considère la sous-suite contenant tous les termes de $(u_n)$ dont l'indice appartient à $A$. Cette sous-suite est par construction décroissante puisque chacun de ses termes est plus grand que tous les termes suivants dans la suite $(u_n)$. Comme ladite sous-suite est par ailleurs minorée puisque $(u_n)$ est bornée, elle converge d'après le théorème de convergence monotone. Si $A$ est infini, considérons un $n_0$ plus grand que le plus grand élément de $A$. Puisque $n_0 \notin A$, il existe certainement un entier $n_1 > n_0$ pour lequel $u_{n_0} < u_{n_1}$. De même, $n_1 \notin A$, donc on peut trouver un entier $n_2$ tel que $u_{n_1} < u_{n_2}$. On construit ainsi petit à petit une suite d'indices correspondant à une sous-suite croissante de $(u_n)$. Cette sous-suite étant majorée, elle converge. Remarquons qu'on a en fait démontré le résultat suivant : de toute suite réelle, on peut extraire une sous-suite monotone. □

### 3.2 Limites infinies

**Définition 16.** Une suite réelle $(u_n)$ **diverge vers** $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant n_0, u_n > A$. On le note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. De même, une suite réelle $(u_n)$ **diverge vers** $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \geqslant n_0, u_n < A$. On le note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

**Exemple :** Considérons la suite définie par $u_n = n^2$ et montrons à l'aide de cette définition que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Comme pour le cas d'une limite finie, on commence pour cela par fixer la valeur de $A$. Constatons ensuite que $u_n > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A}$ (si $A \geqslant 0$ ; mais si $A < 0$, il n'y a pas vraiment de souci puisque dans ce cas $u_n$ est toujours supérieur à $A$). On peut donc choisir $n_0 = Ent(\sqrt{A}) + 1$, et on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

**Proposition 10.** Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$. Une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

*Démonstration.* Soit $(u_n)$ une suite croissante et non majorée. Cette dernière hypothèse signifie que $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{R}, u_{n_0} > A$. Mais la suite étant croissante, on a en fait $\forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant u_{n_0} > A$, ce qui prouve exactement la divergence vers $+\infty$. Inutile de refaire quoi que ce soit pour le deuxième cas : si $(v_n)$ est décroissante non minorée, alors $(-v_n)$ est croissante non majorée, et on se ramène au cas précédent. □

*Remarque* 9. Une autre façon de voir les choses est de dire que dans $\overline{\mathbb{R}}$, le théorème de convergence monotone reste vrai même en supprimant l'hypothèse de majoration ou de minoration.

### 3.3 Opérations et limites

**Proposition 11.** Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites ayant une limite (finie ou infinie), alors la limite de leur somme $(u_n + v_n)$ est donnée par le tableau suivant (f.i. signifiant forme indéterminée) :

| $(u_n)\backslash(v_n)$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $l$ | $l + l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $f.i.$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $f.i.$ | $-\infty$ |

*Démonstration.* Prouvons par exemple le cas où les deux suites ont une limite finie, notées respectivement $l$ et $l'$. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un entier $n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in \left]l - \frac{\varepsilon}{2}; l + \frac{\varepsilon}{2}\right[$ (oui, la division par 2 est volontaire, après tout $\frac{\varepsilon}{2}$ est un réel strictement positif auquel on peut appliquer la définition de la limite) ; et un entier $n_1$ tel que $\forall n \geqslant n_1$, $v_n \in \left]l' - \frac{\varepsilon}{2}; l' + \frac{\varepsilon}{2}\right[$. En notant $N = \max(n_0, n_1)$, on obtient alors en ajoutant les deux encadrements $\forall n \geqslant N$, $u_n + v_n \in ]l + l' - \varepsilon, l + l' + \varepsilon[$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n = l + l'$. Les autres cas se démontrent de façon similaire et ne présentent pas de grosse difficulté. $\square$

**Proposition 12.** Soit $(u_n)$ une suite réelle et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors, si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda u_n = \lambda l$. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda u_n = \pm\infty$ (le signe dépendant du signe de la limite de $(u_n)$ et de celui de $\lambda$ suivant la règle des signes).

*Démonstration.* Prouvons le cas où la limite est finie. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$ (c'est la même astuce que pour la démonstration de la limite d'une somme), donc pour $n \geqslant n_0$, $|\lambda u_n - \lambda l| < \varepsilon$, ce qui prouve bien que $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda u_n = \lambda l$. Le cas des limites infinies est très similaire. $\square$

**Proposition 13.** Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites ayant une limite (finie ou infinie), alors la limite de leur produit $(u_n v_n)$ est donnée par le tableau suivant :

| $(u_n)\backslash(v_n)$ | $l' > 0$ | $l' < 0$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $l > 0$ | $l.l'$ | $l.l'$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $l < 0$ | $l.l'$ | $l.l'$ | $0$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $f.i.$ | $f.i.$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $f.i.$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $f.i.$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

*Démonstration.* Commençons par prouver le cas où les deux suites ont pour limite 0, et considérons $\varepsilon > 0$. Il existe deux réels $n_0$ et $n_1$ tels que, respectivement, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n| < \sqrt{\varepsilon}$ ; et $\forall n \geqslant n_1$, $|v_n| < \sqrt{\varepsilon}$. On en déduit que $\forall n \geqslant \max(n_0, n_1)$, $|u_n v_n| < \varepsilon$, ce qui prouve que $(u_n v_n)$ tend vers 0.

Supposons désormais que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l' \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - l) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - l') = 0$, donc en utlisant ce qu'on vient juste de démontrer $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - l)(v_n - l') = 0$. Or, $(u_n - l)(v_n - l') = u_n v_n - l v_n - l' u_n + ll'$, ou encore $u_n v_n = (u_n - l)(v_n - l') + l v_n + l' u_n - ll'$. D'après les propositions démontrées auparavant (limite d'une somme et d'un produit par un réel), on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = 0 + ll' + l'l - ll' = ll'$. $\square$

**Définition 17.** On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^+$ lorsque la suite $(u_n)$ tend vers 0 en étant positive à partir d'un certain rang. De même, on notera $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^-$ si $(u_n)$ est négative à partir d'un certain rang.

**Proposition 14.** Soit $(u_n)$ une suite réelle qui ne s'annule plus à partir d'un certain rang, et ayant une limite, alors la limite de $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est donnée par le tableau suivant :

| $(u_n)$ | $l \neq 0$ | $0^+$ | $0^-$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ | $\dfrac{1}{l}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0^+$ | $0^-$ |

*Démonstration.* Prouvons par exemple le cas où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^+$. Soit $A > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0$, $|u_n| < \dfrac{1}{A}$. Quitte à changer la valeur de $n_0$ pour atteindre le rang à partir duquel $(u_n)$ est positive et ne s'annule plus, on a même $0 < u_n < \dfrac{1}{A}$, d'où $\dfrac{1}{u_n} > A$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$. $\square$

**Proposition 15.** Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites ayant une limite (finie ou infinie), alors la limite de leur produit $(u_n v_n)$ est donnée par le tableau suivant :

| $(u_n)\backslash(v_n)$ | $l'>0$ | $l'<0$ | $0^+$ | $0^-$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $l>0$ | $\frac{l}{l'}$ | $\frac{l}{l'}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0^+$ | $0^-$ |
| $l<0$ | $\frac{l}{l'}$ | $\frac{l}{l'}$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $0^-$ | $0^+$ |
| $0^+$ | 0 | 0 | $f.i.$ | $f.i.$ | 0 | 0 |
| $0^-$ | 0 | 0 | $f.i.$ | $f.i.$ | 0 | 0 |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $f.i.$ | $f.i.$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $f.i.$ | $f.i.$ |

*Démonstration.* Pas besoin de preuve, puisqu'un quotient n'est rien d'autre que le produit par un inverse. □

**Exemple** : $u_n = \dfrac{\ln n + n^2 + 2}{e^n + \sqrt{n}} = \dfrac{n^2}{e^n} \times \dfrac{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{\ln n}{n^2}}{1 + \frac{\sqrt{n}}{e^n}}$. En utilisant nos connaissances sur les croissances comparées, il est facile de constater que le premier quotient tend vers 0 et le deuxième vers 1, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

### 3.4 Inégalités et limites

**Proposition 16.** Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites convergeant repectivement vers $l$ et $l'$ et telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Alors $l \leqslant l'$.

*Démonstration.* Petit raisonnement par l'absurde : supposons $l > l'$ et posons $\varepsilon = \dfrac{l-l'}{3}$, alors à partir d'un certain rang on aura $u_n \in ]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ et $v_n \in ]l'-\varepsilon, l'+\varepsilon[$. Mais comme $l'+\varepsilon < l-\varepsilon$ (par construction de $\varepsilon$), ceci est incompatible avec le fait que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. L'hypothèse est donc absurde et $l \leqslant l'$. □

*Remarque* 10. Cette proposition est souvent utilisée sous la forme plus simple où l'une des deux suites est constante. Ainsi, si $(u_n)$ converge et que $u_n \leqslant A$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant A$. Notamment, la limite d'une suite de signe constant est de même signe que la suite.

*Remarque* 11. L'inégalité sur la limite est toujours large, même si on a une inégalité stricte entre $u_n$ et $v_n$. Par exemple, $\forall n \geqslant 1$, $1 + \dfrac{1}{n} > 1 + \dfrac{1}{n^2}$, mais ces deux suites ont la même limite.

**Théorème 6.** Théorème des gendarmes (ou théorème d'encadrement si vous voulez faire plus sérieux).
Soient $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ trois suites vérifiant $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$, alors $\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} u_n$ (ces limites ont le droit d'être infinies).

*Démonstration.* Occupons-nous du cas où la limite commune de $(u_n)$ et $(w_n)$ est un réel $l$, et choisissons $\varepsilon > 0$. Alors à partir d'un certain rang, on aura $|u_n - l| < \varepsilon$ et $|v_n - l| < \varepsilon$. Autrement dit, $u_n$ et $v_n$ appartiennent tous deux à l'intervalle $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. Mais alors $w_n$, qui se situe entre les deux, appartient lui aussi à cet intervalle, et $\lim_{n\to+\infty} w_n = l$. Le cas des limites infinies est tout aussi simple (une seule des deux suites encadrantes suffit même). □

**Exemple** : Considérons la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k^2}$. Très pénible à étudier avec sa somme à nombre de termes variable, mais si on ne veut que la limite, c'est beaucoup plus facile. Chacun des termes de la somme est compris entre le plus petit, en l'occurence $\dfrac{1}{(2n)^2}$, et le plus grand, à savoir $\dfrac{1}{(n+1)^2}$, donc $\dfrac{n}{(2n)^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{(n+1)^2}$ (il y a $n$ dans la somme définissant $u_n$). Chacune des deux suites encadrant $u_n$ ayant pour limite 0, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**Définition 18.** Deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont **adjacentes** si elles vérifient les deux propriétés suivantes :
- l'une est croissante et l'autre décroissante.
- $\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$.

**Théorème 7.** Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

*Démonstration.* Supposons par exemple $(u_n)$ croissante et $(v_n)$ décroissance, et commençons par constater que la suite $(u_n - v_n)$ est croissante et a pour limite 0. Cela implique que cette suite est à termes négatifs : en effet, si on avait, pour un rang $n_0$, $u_{n_0} - v_{n_0} = \alpha > 0$, $(u_n - v_n)$ serait supérieure à $\alpha > 0$ à partir d'un certain rang, donc ne pourrait pas converger vers 0. Conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
Mais alors, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Autrement dit, $(u_n)$ est croissante et majorée donc convergente. De même, $(v_n)$ est décroissante et minorée par $u_0$, donc converge également. Si on note $l$ et $l'$ leurs limites respectives, on a $\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = l - l' = 0$, donc $l = l'$, ce qui achève la démonstration. □

**Exemple** : Considérons les suites définies par $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Comme $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, la suite $(u_n)$ est croissante. Par ailleurs, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)} - u_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{(n+1)^2}$, qui est négatif. La suite $(v_n)$ est donc décroissante. Reste à vérifier que $\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$, ce qui n'a rien de difficile puisque $u_n - v_n = -\frac{1}{n}$.
Les deux suites sont donc adjacentes (pour les curieux, leur limite commune vaut $\frac{\pi^2}{6}$).

**Proposition 17.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Les deux suites définies par $a_n = \frac{Ent(10^n x)}{10^n}$, et $b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$ sont adjacentes et ont pour limite commune $x$. Le réel $a_n$ est appelé **approximation décimale par défaut de $x$ à $10^{-n}$ près**, et le réel $b_n$ **approximation décimale par excès de $x$ à $10^{-n}$ près**.

*Démonstration.* Par définition des parties entières, on a $Ent(10^n x) \leqslant 10^n x < Ent(10^n x) + 1$, donc $a_n \leqslant x < b_n$. En multipliant cet encadrement par 10, on obtient $10\,Ent(10^n x) \leqslant 10^{n+1} x < 10\,Ent(10^n x) + 1$. Le membre de gauche et celui de droite dans cet encadrement étant des nomrbes entiers, la caractérisation de la partie entière permet d'affirmer que $10\,Ent(10^n x) \leqslant Ent(10^{n+1} x) \leqslant 10^{n+1} x < Ent(10^{n+1} x) + 1 \leqslant 10\,Ent(10^n x) + 1$, soit en divisant le tout par $10^{n+1}$, $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant x < b_{n+1} \leqslant b_n$. Autrement dit, la suite $(a_n)$ est croissante et la suite $(b_n)$ décroissante. De plus, $b_n - a_n = \frac{1}{10^n}$ a certainement une limite nulle quand $n$ tend vers $+\infty$. Les deux suites sont donc adjacentes et convergent vers une même limite. Les encadrement donnés plus haut indiquent que cette limite commune est nécessairement inférieure ou égale à $x$ (puisque la suite $(a_n)$ est majorée par $x$), mais également supérieure ou égale à $x$ (puisque $(b_n)$ est minorée par $x$). Elle est donc nécessairement égale à $x$. □

*Remarque* 12. Les nombres $a_n$ et $b_n$ correspondent effectivement aux valeurs usuelles utilisées pour les approximations décimales. Par exemple, si $x = \pi$, on obtiendra $a_3 = 3.141$ et $b_3 = 3.142$.

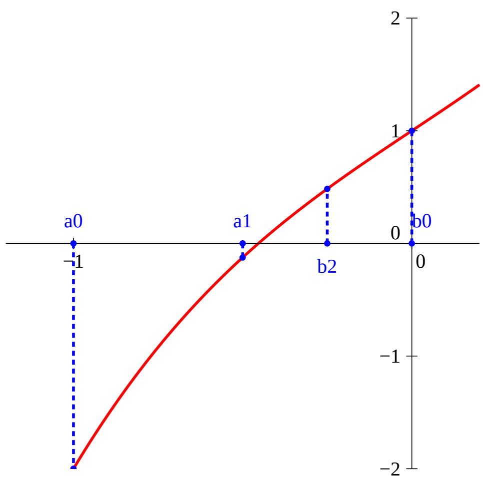
**Théorème 8.** Théorème des segments emboîtés.
Soit $(I_n = [a_n; b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de segments (intervalles fermés aux deux bornes) de $\mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$, et $\lim_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0$. Alors l'intersection de tous les segments $I_n$ est réduite à un unique réel $x$.

*Démonstration.* Il suffit de constater que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes, ce qui découle immédiatement des hypothèses : l'emboîtement des intervalles implique que $(a_n)$ est croissante et $(b_n)$ décroissante, et la limite de leur différence est supposée nulle. Les deux suites convergent donc vers une limite commune $x$, et vérifient $a_n \leqslant x \leqslant b_n$, ce qui implique que $x \in I_n$. Le réel $x$ est nécessairement unique : supposons par exemple qu'il eixste un $y < x$ appartenant à tous les $I_n$, et notons $\varepsilon = \dfrac{x-y}{2}$. À partir d'un certain rang, on aura $x - \varepsilon \leqslant a_n$, donc a fortiori $y < a_n$, et $y$ n'appartient plus à l'intervalle $I_n$, ce qui est contradictoire. □

**Proposition 18.** Méthode de dichotomie.
Soit $f$ une fonction continue sur un segment $[a;b]$, telle que $f(a)f(b) < 0$ (autrement dit, $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé). On construit deux suites récurrentes $(a_n)$ et $(b_n)$ en posant $a_0 = a$ et $b_0 = b$ puis en procédant ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, si $f(a_n)f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ ; dans le cas contraire on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$. Les deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont alors adjacentes, et elles convergent vers une limite commune $\alpha$ vérifiant $f(\alpha) = 0$. De plus, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, ce qui majore l'erreur commise en approchant $\alpha$ par $a_n$ ou $b_n$.

*Démonstration.* Cette propriété est une conséquence du théorème précédent. Les segments $[a_n;b_n]$ sont emboîtés par construction, reste à prouver que leur largeur tend vers 0, ce qui découle de l'affirmation $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Prouvons cette affirmation par récurrence. Au rang 0, on a $b_0 - a_0 = b - a = \dfrac{b-a}{2^0}$, donc la proriété est vraie. Supposons la vraie au rang $n$. On a alors, au choix, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n-a_n}{2}$, ou $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \dfrac{a_n+b_n}{2} = \dfrac{b_n-a_n}{2}$. Dans les deux cas, en exploitant l'hypothèse de récurrence, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2^n} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$. Il existe donc un unique réel $\alpha$ appartenant simultanément à tous les segments $[a_n;b_n]$. Reste à prouver que $f(\alpha) = 0$. Supposons par exemple $f(a) > 0$. Par construction, on aura toujours $f(a_n) \geqslant 0$ donc, la fonction étant continue, par passage à la limite, $f(\alpha) \geqslant 0$. De même, $f(b_n) \leqslant 0$, ce qui implique $f(\alpha) \leqslant 0$. On conclut que $f(\alpha) = 0$. □

**Exemple d'utilisation :** On cherche à étudier les variations de la fonction $f(x) = x^4 + 4x^2 + 4x - 5$. Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 4x^3 + 8x + 4x = 4g(x)$, avec $g(x) = x^3 + 2x + 1$. Cette fonction $g$ est elle-même dérivable et $g'(x) = 3x^2 + 2 > 0$. La fonction $g$ est strictement croissante, elle s'annule en un unique réel $\alpha$, et $f$ est donc décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$.



On aimerait déterminer une valeur approchée de $\alpha$. Ayons pour cela recours à la dichotomie, mais il faut commencer par trouver un premier encadrement de $\alpha$. On constate que $g(0) = 1$ et $g(-1) = -2$, donc la racine de $g$ se trouve dans l'intervalle $[-1; 0]$. On calcule ensuite $g(-0.5)$, qui se trouve être négatif, donc $\alpha \in [-0.5; 0]$. Puis on calcule $g(-0.25)$, qui est positif, donc $g(\alpha) \in [-0.5; -0.25]$. On sait donc déjà que $\alpha \simeq -0.375$, à 0.125 près. On aura naturellement recours à la calculatrice ou à l'ordinateur pour effectuer ce genre d'algorithmes de façon plus poussée. Remarquons que pour obtenir une valeur approchée à $\varepsilon > 0$ près, il suffit de choisir $n$ tel que $\dfrac{b-a}{2^n} < \varepsilon$.

# 4 Relations de comparaison

## 4.1 Négligeabilité

**Définition 19.** Une suite $(u_n)$ est **négligeable** par rapport à une suite $(v_n)$ s'il existe une suite auxilaire $(a_n)$ telle que $u_n = a_n v_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. On le note $u_n = o(v_n)$. Une suite $(u_n)$ est **majorée en ordre de grandeur** par une suite $(v_n)$ s'il existe une suite $(a_n)$ telle que $u_n = a_n v_n$, avec la suite $(a_n)$ bornée. On note alors $u_n = O(v_n)$.

*Remarque* 13.

- En pratique, on utilisera très souvent une caractérisation plus simple : lorsque la suite $(v_n)$ ne s'annule pas, on aura $u_n = o(v_n)$ si $\dfrac{u_n}{v_n}$ a une limite nulle.
- Ces relations ne sont pas des relations d'ordre sur les suites. Elles sont toutes les deux transitives, mais le $o$ n'est pas réflexif (ni antisymétrique) et le $O$ est réflexif mais pas antisymétrique.
- Dire que $u_n = o(1)$ revient à dire que $(u_n)$ converge vers 0. Dire que $u_n = O(1)$ est équivalent à dire que la suite $(u_n)$ est bornée.
- La suite $(v_n)$ sera pratiquement toujours une suite très simple. On n'écrira par exemple jamais $u_n = o(2n^2 + 1)$, mais plus simplement $u_n = o(n^2)$, ce qui est totalement équivalent. Ce sont les ordres de grandeur des suites considérérées qui sont importants.
- Les égalités faisant intervenir les $o$ seront vraiment traitées en tant qu'égalités, et on se permettra de faire un peu de calcul algébrique avec. Ainsi, si $u_n - n = o(\sqrt{n})$, on a le droit d'écrire que $u_n = n + o(\sqrt{n})$.

**Proposition 19.** Règles de calcul sur la relation de négligeabilité.

- Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$, alors $u_n + w_n = o(v_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(t_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n t_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et que les suites ne s'annulent plus à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{v_n} = o\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

*Remarque* 14. On peut par exemple résumer la première propriété en écrivant des égalités du genre $o(n) + o(n) = o(n)$. Bien sûr, celà peut sembler perturbant au premier abord, mais il faut bien prendre conscience que $o(n)$ ne désigne pas une suite précise, mais toute un ensemble de suites, et donc que le $o(n)$ du membre de droite n'a aucune raison d'être égal (au sens strict du terme) à chacun des $o(n)$ du membre de gauche. Une fois admises ces singularités, la symbolisme du $o$ permet d'écrire des calculs de façon très souple et efficace.

*Démonstration.* Toutes ces propriétés sont très faciles à démontrer, surtout si on suppose que la suite $(v_n)$ ne s'annule pas, ce qui permet de les écrire comme simples calculs de limites. Ainsi pour la première, on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{w_n}{v_n} = 0$, et on veut prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n + w_n}{v_n} = 0$, ce qui est une conséquence évidente des résultats classiques sur la limite des sommes. Tout le reste est similaire. □

## 4.2 Equivalence

**Définition 20.** Deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont **équivalentes** si on peut écrire $u_n = a_n v_n$, où $(a_n)$ est une suite vérifiant $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$. On le note $u_n \sim v_n$.

**Proposition 20.** Deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont équivalentes si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$.

*Démonstration.* En effet, si $u_n = a_n v_n$, avec $(a_n)$ ayant pour limite 1, alors $u_n - v_n = (a_n - 1)v_n$, avec évidemment $(a_n - 1)$ qui tend vers 0. ce résultat apparemment anodin est en fait tout à fait fondamental, puisqu'on s'en sert très fréquemment lorsqu'on rédige des calculs faisant intervenir les notions d'équivalence et de négligeabilité. □

*Remarque* 15.

- Comme dans le cas de la négligeabilité, on utilisera souvent la caractérisation $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.
- La relation d'équivalence est réflexive, transitive et symétrique (dès que $u_n \sim v_n$, on a automatiquement $v_n \sim u_n$). Ce type de relation porte justement le nom de relations d'équivalence.
- Dire que $u_n \sim 0$ revient à dire que la suite $(u_n)$ est nulle à partir d'un certain rang. En général, quand on écrit celà, on est en train de faire une grosse bêtises (souvent, on voulait simplement dire que la suite $(u_n)$ a une limite nulle).
- Si $k$ est un réel non nul (cf ci-dessus), dire que $u_n \sim k$ est équivalent à dire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = k$.
- Si deux suites sont équivalentes, et qu'elles admettent des limites (éventuellement infinies), alors leurs limites sont égales.

**Proposition 21.** Régles de calcul.

- Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $u_n w_n \sim v_n t_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n$ ne s'annule plus à partir d'un certain rang, alors $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors $\forall \alpha \neq 0$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

*Démonstration.* Encore une fois, tout cela est complètement évident. □

*Remarque* 16. **ATTENTION**, on ne peut pas additionner des équivalents, c'est même une source d'horreurs mathématiques hélas très utilisée. Par exemple $n^2 + n \sim n^2$, et $-n^2 - 3 \sim -n^2$, mais la somme nous donnerait $n - 3$ équivalent à 0, ce qui est risible. Plus subtil, les équivalents ne se composent pas non plus en général. Ainsi, on peut écrire $n^2 + n \sim n^2$ mais $e^{n^2+n} \not\sim e^{n^2}$ (le quotient de ces deux suites est égal à $e^n$, qui tend vers $+\infty$). Si on tient vraiment à manipuler des sommes, il faudra systématiquement retraduire les équivalences à l'aide de $o$.

**Exemples :** La stabilité des équivalences par quotient et produit va enfin nous permettre de rédiger rapidement des calculs de limites faisant par exemple intervenir des croissances comparées (on rappelera ces résultats juste en-dessous). Ainsi, $\frac{n^2 + \sqrt{n} + 1}{e^n - n^4} \sim \frac{n^2}{e^n}$, on obtient directement une limite nulle pour ce quotient.

Attention, le concept de « garder le terme le plus fort » ne s'applique que dans le cas d'une somme, et certainement pas pour un produit. Ainsi, $n + \ln(n) \sim n$, mais $n\ln(n) \not\sim n$.

Un cas un peu plus pénible, on cherche la limite de la suite définie par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Bien qu'on ait le droit de prendre des équivalents sous la racine carrée pour écrire $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$, on ne peut sûrement pas soustraire $\sqrt{n}$ à cet équivalent. Si on tente d'écrire les choses avec des $o$, on trouve $u_n = \sqrt{n} + o(\sqrt{n}) - \sqrt{n} = o(\sqrt{n})$. Malheureusement, on ne peut rien conclure de ce résultat (une suite négligeable devant $\sqrt{n}$ peut encore avoir n'importe quoi comme limite). Il faut donc commencer par multiplier par la quantité conjuguée avant d'utiliser les $o$ : $u_n = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$. On peut en déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ (et on a même obtenu beaucoup plus précis puisqu'on possède un équivalent simple de $u_n$).

### 4.3 Résultats classiques

**Proposition 22.** Croissances comparées.

- Si $\alpha < \beta$, $n^\alpha = o(n^\beta)$
- $\forall a > 1$, $\forall b > 0$, $n^b = o(a^n)$
- $\forall b > 0$, $\forall c > 0$, $(\ln n)^c = o(n^b)$
- $\forall a > 1$, $a^n = o(n!)$
- $n! = o(n^n)$

*Démonstration.* Nous ne reviendrons pas sur les trois premiers résultats qui ont déjà été vus dans le cadre des fonctions usuelles. Prouvons la quatrième propriété en posant $u_n = \dfrac{n!}{a^n}$. Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{a}$ a pour limite $+\infty$, il existe certainement un rang $n_0$ à partir duquel $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 2$, soit $u_{n+1} \geqslant 2u_n$. Par une récurrence facile, on prouve alors que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 2^{n-n_0}u_{n_0}$. Le membre de droite de cette inégalité tend certainement vers $+\infty$, donc $u_n$ aussi. La dernière propriété est encore plus facile : $\dfrac{n^n}{n!} = \dfrac{n \times n \times \cdots \times n}{1 \times 2 \times \cdots \times n} = n \times \dfrac{n}{2} \times \cdots \times 1 > n$, donc là aussi la limite du quotient sera infinie. □

**Proposition 23.** Un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré.

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de la première propriété de croissance comparée : toutes les puissances de $n$ inférieures à celle apparaissant dans le terme de plus haut degré seront négligeables. □

**Proposition 24.** Équivalente classiques.
Soit $(u_n)$ une suite telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. Alors :

- $\ln(1 + u_n) \sim u_n$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $\sin(u_n) \sim u_n$
- $\tan(u_n) \sim u_n$
- $1 - \cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$

*Démonstration.* Les quatre premiers résultats découlent tous d'une même propriété plus générale : si $f$ est une fonction dérivable en 0, et que $(u_n)$ tend vers 0, alors $f(u_n) - f(0) \sim f'(0)u_n$. Cette propriété est une simple réécriture de la définition de la dérivée comme quotient du taux d'accroissement : $\dfrac{f(u_n) - f(0)}{u_n - 0}$ a pour limite $f'(0)$ quand $u_n$ tend vers 0. On applique ici cette propriété aux fonctions $f_1 : x \mapsto \ln(1 + x)$ (qui a pour dérivée en 0, $\dfrac{1}{1+0} = 1$ ; puis à $f_2 : x \mapsto e^x$, qui a pour dérivée en 0 $e^0 = 1$ ; à $f_3 : x \mapsto \sin(x)$, qui a pour dérivée en 0 $\cos(0) = 1$, et enfin à $f_4 : x \mapsto \tan(x)$, qui a pour dérivée $1 + \tan^2(0) = 1$. La dernière propriété est un peu plus complexe (on ne voit pas bien d'où sort ce carré), nous l'admettrons provisoirement en attendant un futur chapître sur les développements limités. □

**Exemple :** Le fait que la suite tende vers 0 est absolument essentiel. Par exemple, $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$, mais $\ln(n+1) \not\sim n$ (c'est en l'occurence équivalent à $\ln(n)$).

## 5 Compléments

### 5.1 Suites classiques

**Définition 21.** Une suite réelle $(u_n)$ est **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels $a \notin \{0 : 1\}$ et $b \neq 0$ tels qu'elle vérifie la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

**Théorème 9.** Soit $(u_n)$ une suite arithmético-géométrique, alors, en notant $\alpha$ l'unique solution de l'équation $x = ax + b$ (aussi appelée **équation de point fixe** de la suite), la suite $(v_n)$ définie par $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique de raison $a$.

*Démonstration.* L'existence et l'unicité du réel $\alpha$ découlent du fait qu'on a imposé $a \neq 1$ dans la définition d'une suite arithmético-géométrique. Remarquons ensuite que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - \alpha = au_n - a\alpha = a(u_n - \alpha) = av_n$.
La suite $(v_n)$ est donc géométrique de raison $a$. □

*Remarque* 17. On déduit du théorème précédent que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + \alpha = v_0 \times a^n + \alpha = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha$, ce qui donne une expression explicite du terme de $u_n$. En pratique, en présence d'une suite arithmético-géométrique, on présentera les calculs de la façon suivante :

- calcul du point fixe $\alpha$.
- définition de la suite $(v_n)$.
- vérification que $(v_n)$ est suite géométrique.
- conclusion : expression du terme général $u_n$.

**Exemple** Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$. L'équation de point fixe de la suite est $x = 3x - 4$, qui a pour unique solution $x = 2$, on pose donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2$. On remarque que $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 3u_n - 4 - 2 = 3u_n - 6 = 3(u_n - 2) = 3v_n$, donc la suite $(v_n)$ est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 3$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3^{n+1}$, donc $u_n = v_n + 2 = 3^{n+1} + 2$.

**Définition 22.** Une suite réelle est dite **récurrente linéaire d'ordre** 2 si elle vérifie une relation de récurrence double linéaire à coefficients constants, c'est-à-dire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, où $a$ et $b$ sont deux réels non nuls.

**Définition 23.** Soit $(u_n)$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On appelle **équation caractéristique** de la suite l'équation du second degré $r^2 - ar - b = 0$.

**Théorème 10.** Si l'équation caractéristique d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 $(u_n)$ admet deux racines réelles distinctes $r$ et $s$, le terme général de la suite peut s'écrire sous la forme $u_n = \alpha r^n + \beta s^n$, $\alpha$ et $\beta$ étant deux réels pouvant être déterminés à l'aide des deux premiers termes de la suite.
Si l'équation caractéristique admet une racine réelle double $r$, alors $u_n = (\alpha + \beta n)r^n$ (avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$).
Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$, alors $u_n = r^n(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))$.

*Démonstration.* Constatons que, si $r$ et $s$ sont racines de l'équation caractéristique, toutes les suites de la forme $u_n = \alpha r^n + \beta s^n$ vérifient la récurrence linéaire : en effet, $r^2 = ar + b \Rightarrow r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$ (et de même pour $s^{n+2}$), donc $u_{n+2} = \alpha r^{n+2} + \beta s^{n+2} = \alpha(ar^{n+1} + br^n) + \beta(as^{n+1} + bs^n) = au_{n+1} + bu_n$. Comme de plus la suite $u_n$ est complètement déterminée par ses deux premiers termes et la relation de récurrence double, une suite vérifiant cette même relation de récurrence et ayant les deux mêmes premiers termes que $(u_n)$ est égale à celle-ci. Les autres cas se font de façon similaire. On notera une grande similitude formelle entre ces récurrences linéaires d'ordre 2 et les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.
Le point délicat de toute cette démonstration, que nous allons subtilement esquiver, est en fait d'arriver à prouver qu'il existe toujours une suite du type donné ayant les deux mêmes premiers termes que $u_n$. Nous nous contenterons pour l'instant d'admettre (et de constater sur des exemples) que c'est bien le cas, et qu'on ne peut pas en général se contenter d'une forme plus simple (par exemple avec une seule des deux racines dans le premier cas). □

**Exemple** : suite de Fibonacci. Il s'agit de la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. L'équation caractéristique de la suite est $x^2 = x + 1$, soit $x^2 - x - 1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 4 = 5$, et qui admet donc deux solutions $r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (plus connu sous le petit nom de nombre d'or), et $s = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. On en déduit comme précédemment que $u_n = \alpha r^n + \beta s^n$. Comme $u_0 = u_1 = 1$, on obtient les équations $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \beta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$. Procédons par substitution pour résoudre le système : on a $\beta = 1 - \alpha$, donc en remplaçant dans la deuxième équation $\alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} - \alpha\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$, soit encore en regroupant et mettant tout au même dénominateur $\alpha\sqrt{5} = 1 - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Autrement dit, ${}^{\alpha} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. On obtient ensuite $\beta = 1 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Conclusion : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$. Il n'est pas le moins du monde évident que ces formules vont donner des valeurs entières pour tous les termes de la suite, et pourtant c'est bien le cas !

### 5.2 Suites implicites

Dans ce paragraphe comme dans le suivant, on se contentera d'énoncer quelques grands principe généraux, et de les appliquer sur un exemple concret. Les suites implicites auxquelles nous allons nous intéresser sont définies par des équations de la forme $f_n(u_n) = 0$, où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues. On peut alors dresser la courte liste de méthodes suivante, en constatant que tous les calculs s'appuieront sur unr étude préalable des variations des fonctions $f_n$ :

- Pour majorer ou minorer une telle suite par un réel $M$, on se contente de calculer $f_n(M)$ et d'utiliser le tableau de variations de la fonction.
- Pour étudier la monotonie de la suite, on tentera d'exprimer $f_{n+1}(u_n)$ (ou $f_n(u_{n+1})$) sous une forme simple, pour le comparer à $f_{n+1}(u_{n+1})$ (qui est nul par hypothèse). Là encore, les variations de $f_n$ permettront de conclure.
- Pour déterminer la limite éventuelle de la suite, on tentera de passer à la limite dans la relation $f_n(u_n) = 0$. De même, les calculs d'équivalent repartiront toujours de cette égalité.

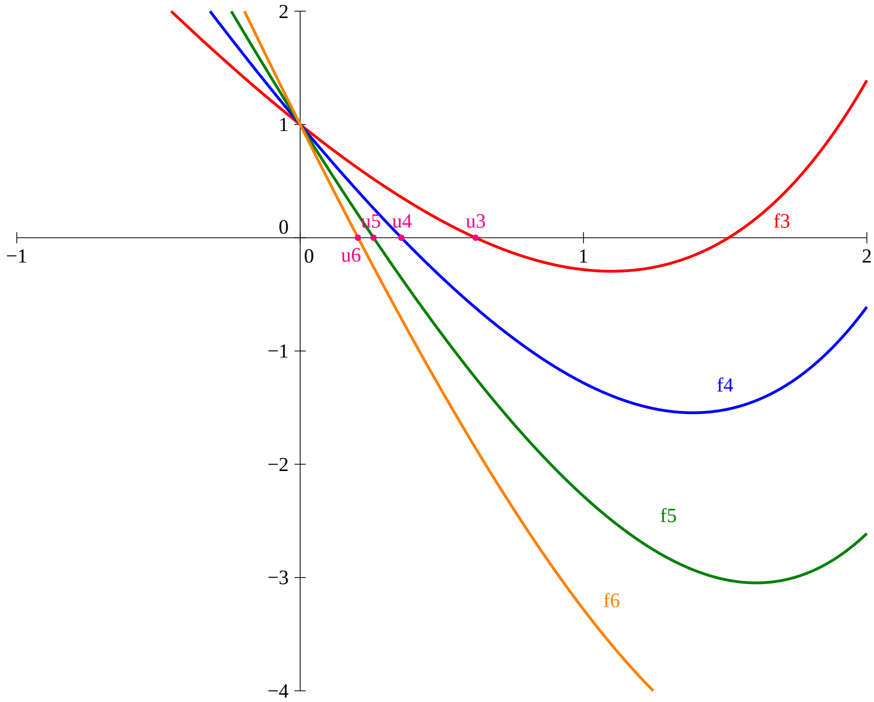
**Exemple :** On définit la suite $(u_n)$ de la façon suivante : $\forall n \geqslant 3$, $u_n$ est la plus petite solution de l'équation $e^x = nx$. Cette définition est correcte car la fonction $f_n : x \mapsto e^x - nx$ est continue dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_n'(x) = e^x - n$, donc admet un minimum global en $\ln n$, de valeur $e^{\ln n} - n\ln n = n(1 - \ln n) < 0$ pour $n \geqslant 3$. L'équation admet donc une solution $x_n \leqslant \ln n$ (et accessoirement une deuxième solution supérieure à $\ln n$).

Pour prouver par exemple que $\forall n \geqslant 3$, $u_n > 0$, on constate que $f_n(0) = e^0 - n \times 0 = 1 > 0$. Or, par définition, $f_n(u_n) = 0 < f_n(0)$. En utilisant le théorème de la bijection (et en fait la partie de la conclusion qui stipule que $f_n^{-1}$, qui est définie sur $[n(1 - \ln n); +\infty[$, à valeurs dans $]-\infty; \ln n]$, est de même monotonie que $f_n$), on peut en déduire que $u_n > 0$.

On peut prouver de même que la suite $(u_n)$ est décroissante : $f_{n+1}(u_n) = e^{u_n} - (n+1)u_n = e^{u_n} - nu_n - u_n = -u_n < 0$ (on a utilisé le fait que $f_n(u_n) = 0$, et que $u_n > 0$). On a donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$, d'où $u_n > u_{n+1}$ (c'est encore la décroissance de la réciproque qui est utilisée).

La suite étant décroissante minorée, elle converge vers un certain réel $l$. Pour déterminer la valeur de $l$, il faut revenir à l'équation permettant de définir la suite : puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, on aura $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{u_n} = e^l$. Or, par définition, $e^{u_n} = nu_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = e^l$. Ceci n'est possible que si $l = 0$ (sinon, $nu_n$ tendrait vers $+\infty$), et on en déduit au passage que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$, c'est-à-dire que

$u_n \sim \frac{1}{n}$. On peut même faire mieux. Puisque $u_n$ tend vers 0, on peut affirmer que $e^{u_n} = 1+u_n+o(u_n)$, donc $e^{u_n} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Comme $e^{u_n} = nu_n$, on en déduit que $nu_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, soit en divisant tout par $n$, $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ce résultat, meilleur que le simple équivalent, porte le nom de développement asymptotique de la suite. On peut naturellement tenter de pousser plus loin ce développement pour obtenir à la fin un $o$ de quelque chose de plus petit que $\frac{1}{n^2}$, mais on se heurte ici à des difficultés de calcul. Nous reviendrons plus en détail sur ce genre de développements plus tard dans l'année.




### 5.3 Suites récurrentes

**Définition 24.** Une **suite récurrente** est une suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction $f$ sera en ce qui nous concerne toujours continue.

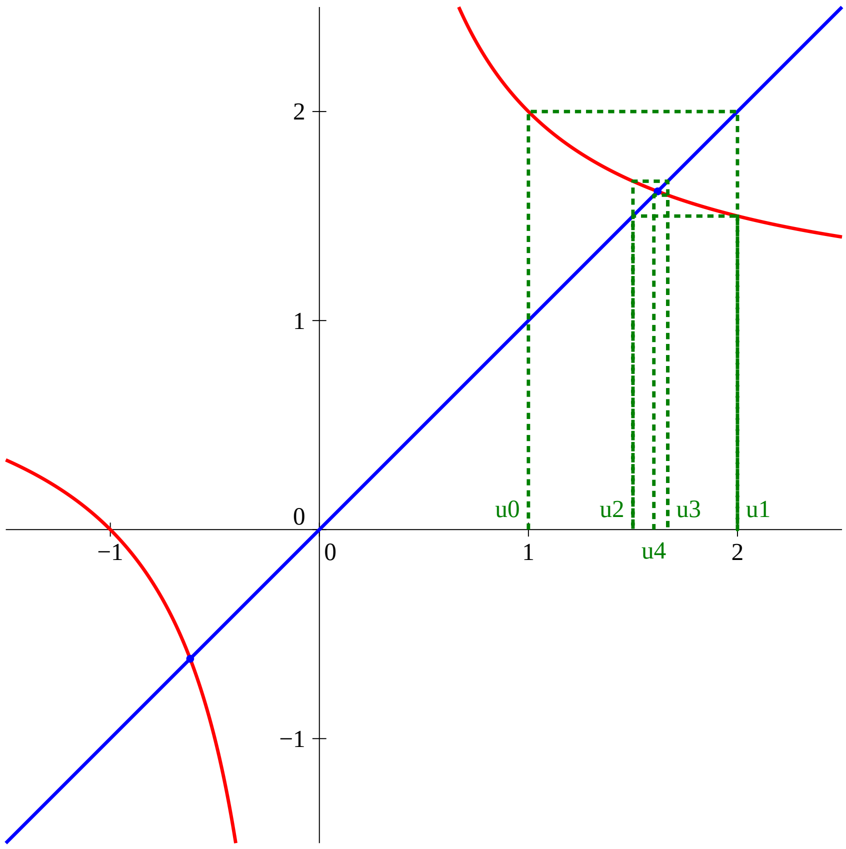
- La limite $l$ de la suite vérifie nécessairement $f(l) = l$, c'est un **point fixe** de la fonction $f$.
- Pour majorer ou minorer une telle suite, on cherche un intervalle $I$ **stable** par la fonction $f$, c'est-à-dire tel que $f(I) \subset I$. Si un terme $u_{n_0}$ de la suite appartient à cet intervalle stable, tous les termes suivants y seront également (ce qu'on redémontrera à chaque fois par récurrence).
- Pour étudier la monotonie de la suite, on étudiera le signe de $f(x) - x$, en espérant qu'il soit constant sur notre intervalle stable. Quand la fonction $f$ est croissante, la suite sera toujours monotone (mais pas nécessairement croissante !), quand $f$ est décroissante, ça se passe en général moins bien. Toutefois, les sous-suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ seront alors monotones.
- On commence de toute façon toujours l'étude d'une suite récurrente par l'étude des variations de la fonction $f$, et surtout du signe de $f(x) - x$ (qui donne au passage les points fixes). On fera même très souvent une représentation graphique de $f$, en traçant dans le même repère la droite d'équation $y = x$, et on pourra placer sur ce graphique les premiers termes de la suite.

**Exemple :** Considérons la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$. On pose donc $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $-\frac{1}{x^2}$. Elle est donc décroissante sur

$]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. Par ailleurs, $f(x)-x = 1+\dfrac{1}{x}-x = \dfrac{x+1-x^2}{x}$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 5$, et s'annule en $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, et en $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

| $x$ | $-\infty$ | $x_2$ | $0$ | $x_1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $1$ ↘ | $x_2$ ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ $x_1$ ↘ | $1$ |
| $f(x)-x$ | $+$ | $0$ | $-$ ‖ $+$ | $0$ | $-$ |

On peut représenter les premiers termes de la suite sur la figure suivante :




On constate que la suite semble converger vers $x_1$, mais la fonction n'étant pas croissante, on n'a aucun intervalle stable pratique à disposition. Contournons donc la difficulté en étudiant séparément la sous-suite des termes pairs et impairs de la suite. Ces deux suites vérifient une relation de récurrence du type $v_{n+1} = f(f(v_n)) = g(v_n)$, où $g(x) = 1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1+\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{2x+1}{x+1}$. Cette fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{2(x+1)-2x-1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(2x+1)^2}$. La fonction $g$ est croissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. Par ailleurs, $g(x)-x = \dfrac{2x+1-x^2-x}{x+1}$, qui s'annule sans surprise pour les mêmes valeurs que $f$ (les points fixes de $f$ seront nécessairement des points fixes de $f \circ f$, même si la réciproque n'est pas forcément vraie). Les intervalles $I = [0, x_1]$ et $J = [x_1;+\infty[$ sont stables par la fonction $g$. Prouvons par exemple par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$u_{2n} \in I$. C'est évidemment vrai au rang 0 puisque $0 \leqslant 1 \leqslant x_1$. Supposons désormais que $u_n \in I$, alors par croissance de la fonction $g$, on aura $g(0) \leqslant g(u_{2n}) \leqslant g(x_1)$, soit $1 \leqslant u_{2n+2} \leqslant x_1$, ce qui prouve la propriété au rang $n+1$. Une fois cette récurrence effectuée, on peut affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} - u_{2n} = g(u_{2n}) - u_{2n} > 0$, puisque $g(x) - x \geqslant 0$ sur l'intervalle $I$. Autrement dit, la suite $(u_{2n})$ est croissante, et par ailleurs majorée par $x_1$, elle converge nécessairement. Sa limite étant un point fixe de la fonction, il ne peut s'agir que de $x_1$ ou de $x_2$. Or, l'encadrement obtenu sur la suite l'empêche de converger vers $x_2$ qui est strictement négatif. Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = x_1$. On prouve de façon très similaire, en exploitant l'intervalle $J$, que la sous-suite $(u_{2n+1})$ est décroissante minorée par $x_1$, et converge elle aussi vers $x_1$. Un résultat classique vu en cours nous permet alors de tirer la conclusion suivante : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (à savoir, pour la petite histoire, le nombre d'or ; ce résultat a un lien avec des histoires de développement en fraction continue de ce fameux nombre d'or).