Étude métrique des courbes planes

PTSI B Lycée Eiffel

9 juin 2013

Ne t'inquiète pas si tu as des difficultés en maths,
je peux t'assurer que les miennes sont bien plus importantes !

Albert Einstein.

Les mathématiques ne constituent pas à proprement parler une science.

Claude Allègre (qui n'est pas à proprement parler un scientifique).

Introduction

Ce petit chapître est un complément à celui que nous avions déjà consacré aux courbes planes beaucoup plus tôt dans l'année. Nous avions alors appris à tracer des courbes définies par différents types d'équation, et à gerer tout ce qui concernait l'aspect géométrique de ces courbes (tangentes et points stationnaires notamment). Dans ce nouveau chapître, nous allons nous consacrer entièrement à un autre aspect de l'étude des courbes, l'aspect métrique. Ainsi, le principal objectif du chapître est d'apprendre à calculer la longueur d'une courbe. Mais nous pousserons également jusqu'à la définition (et le calcul) de notions plus géométrique, notamment la courbure qui constituera en quelque sorte notre objectif final.

Objectifs du chapitre :

- savoir calculer une longueur, une abscisse curviligne, une courbure.
- comprendre les implications géométriques des calculs cités juste au-dessus.

1 Longueur d'une courbe

Dans tout ce chapître, nous nous intéresserons à des courbes paramétrées, qui peuvent très bien être définies par une équation cartésienne ou une équation polaire. Nous étudierons même quelques exemples de courbes de fonctions $f : I \to \mathbb{R}$, qu'on peut facilement paramétrer à l'aide de leur abscisse (autrement dit, on pose $x(t) = t$ et $y(t) = f(t)$).

Définition 1. Un **arc de classe $\mathcal{C}^k$** est une fonction $f : U \to \mathbb{R}^2$ dont les deux fonctions coordonnées x et y sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Remarque 1. Cette définition, contrairement à ce qu'on pourrait penser à première vue, n'exclut pas les arcs définis par une équationf polaire : si $t \mapsto \rho(t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$, alors $x : t \mapsto \rho(t)\cos(t)$ et $y : t \mapsto \rho(t)\sin(t)$ le seront aussi.

Définition 2. Deux arcs paramétrés f et g de classe $\mathcal{C}^k$ sont **$\mathcal{C}^k$-équivalents** si $g = f \circ \varphi$, où $\varphi : J \to I$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$, et dont la réciproque est $\mathcal{C}^1$. En notant Γ le support de l'arc paramétré, on dit alors que φ effectue un **paramétrage admissible** de Γ. On dira de plus que f et g ont **même orientation** si φ est strictement croissante.

Remarque 2. Nous n'allons pas trop insister sur ces notions un peu techniques, mais on peut quand même donner une interprétation simple du vocabulaire : deux paramétrages équivalents sont simplement deux paramétrages correspondant au parcours de la même courbe Γ. Qu'est-ce qui distingue alors les deux ? Tout simplement le sens dans lequel on parcourt la courbe (d'où la dernière définition ; remarquons que la bijection φ est nécessairement strictement croissante ou strictement décroissante puisqu'elle est $\mathcal{C}^1$), mais aussi la vitesse à laquelle on parcourt la courbe.

Exemple : Le paramétrage le plus classique du cercle trigonométrique est la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array} \right.$. Mais on peut très bien aussi choisir $x(t) = \cos(2t)$ et $y(t) = \sin(2t)$, en restreignant t à l'intervalle $[0, \pi]$, parcourant manifestement le même cercle, mais deux fois plus vite. Naturellement, la notion de longueur parcourue (de façon très élémentaire, le temps multiplié par la vitesse) va devoir prendre en compte la vitesse de parcours.

Définition 3. L'arc f est **régulier** sur I si $\overrightarrow{f'(t)}$ ne s'annule jamais sur I. Il est **birégulier** si $\overrightarrow{f'(t)}$ et $\overrightarrow{f''(t)}$ forment toujours une base de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 3. La birégularité implique la régularité, puisqu'on aura du mal à construire une base avec un vecteur nul. Si vous n'avez pas tout oublié de notre premier chapître consacré aux courbes planes, vous noterez que la birégularité implique que tous les points de la courbes sont des points ordinaires. Si j'amais, dans la suite du chapître, nous voulons travailler avec des courbes contenant des points stationnaires, on se contentera simplement de les exclure de nos intervalles de travail.

Proposition 1. La notion de birégularité est indépendante du changement de paramètre admissible.

Démonstration. Faisons-le pour la régularité. Si on pose $g = f \circ \varphi$, en notant (x, y) les fonctions coordonnées de f, et (u, v) celles de g, on aura $u' = (x \circ \varphi)' = \varphi' \times x' \circ \varphi$, et de même $v' = \varphi' \circ y' \circ \varphi$. Comme φ' ne peut pas s'annuler (sinon sa réciproque ne serait pas $\mathcal{C}^1$), $(u'(t), v'(t)) = 0 \Leftrightarrow (x'(\varphi(t), y'(\varphi(t)) = 0$. S'il y a un point stationnaire pour un paramétrage, il y en a donc aussi un pour l'autre (pas pour la même valeur du paramètre, bien sûr). Pour la birégularité, il faut calculer un peu plus : $u'' = \varphi'' \times x' \circ \varphi + \varphi'^2 \times x'' \circ \varphi$ (et similairement pour v''). On peut alors calculer $\det((u', v'); (u'', v'')) = u'v'' - u''v' = (\varphi' \times x' \circ \varphi)(\varphi'' \times y' \circ \varphi + \varphi'^2 \times y'' \circ \varphi) - (\varphi' \times y' \circ \varphi)(\varphi'' \times x' \circ \varphi + \varphi'^2 \times x'' \circ \varphi) = \varphi'^3 \times \det((x' \circ \varphi, y' \circ \varphi), (x'' \circ \varphi, y'' \circ \varphi))$ (les deux autres termes s'annulent). Encore une fois, s'il y a un point qui n'est pas birégulier pour un des paramétrages, ce sera également le cas pour l'autre. $\square$

Définition 4. La **longueur** de l'arc paramétré $f : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2$ est le réel $L = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \|\overrightarrow{f'(t)}\|\, dt$.

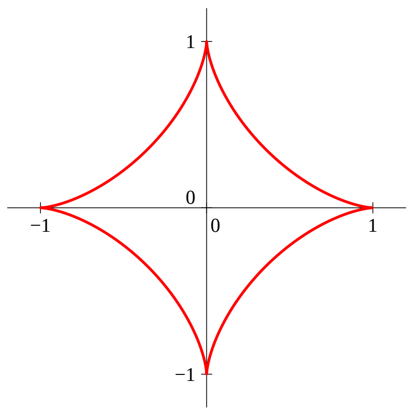
Remarque 4. Cette notion est elle aussi indépendante du paramétrage admissible, il s'agit cette fois-ci d'une application immédiate de la formule de changement de variable pour les intégrales (d'après les calculs effectués dans la démonstration précédente, $\|\overrightarrow{g'(t)}\| = \varphi'(t)\|\overrightarrow{f'(\varphi(t))}\|$. Par ailleurs, ce calcul est cohérent avec la notion intuitive de longueur : on multiplie la vitesse (la norme de la dérivée) par le temps, ici infinitésimal, et on additionne sur tout l'intervalle.

Exemples : Commençons par du très élémentaire, avec la longueur du cercle trigonométrique. Si on prend le paramétrage habituel $(\cos(t), \sin(t))$, on a $\overrightarrow{f'(t)} = (-\sin(t), \cos(t))$, qui est toujours de

norme 1. Il suffit donc de constater que $L = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi$. Et si on change le paramétrage en $(\cos(2t), \sin(2t))$? Dans ce cas, la dérivée a pour norme 2 (on multiplie les deux dérivées par 2), mais on intègre seulement sur $[0, \pi]$, donc on retrouve une longueur égale à 2π.
Plus rigolo, calculons la longueur d'une ellipse de paramétrage $(a\cos(t), b\sin(t))$. Par définition, $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)} \, dt$. On peut écrire cette intégrale de beaucoup de façons différentes, mais assez curieusement, on ne sait pas la calculer de façon exacte. Il s'agit d'une intégrale elliptique, qui a été longuement étudiée par des générations de mathématiciens, et qui prouve que les calculs de longueur ne sont pas toujours aisés à réaliser.

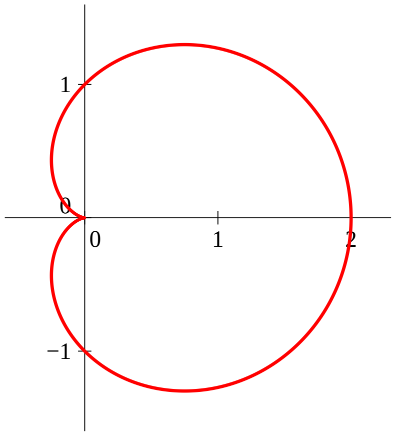
Méthode : On peut être un tout petit peu plus explicite au niveau de la formule selon le type de paramétrage définissant la courbe.

- Si la courbe est donnée par un paramétrage cartésien $(x(t), y(t))$, alors $L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt$.
  Ainsi, si on veut calculer la longueur d'une astroïde définie par $x(t) = \cos^3(t)$ et $y(t) = \sin^3(t)$, on commence par constater que, par symétrie, la longueur totale de la courbe sera égale à quatre fois la longueur obtenue sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (théoriquement, on devrait calculer sur l'intervalle ouvert puisque les points aux bornes sont des points stationnaires, mais ça ne change rien pour le calcul de l'intégrale). Ensuite, on calcule $x'(t) = -3\sin(t)\cos^2(t)$ et $y'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t)$, puis $L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\sin^2(t)\cos^4(t) + 9\cos^2(t)\sin^4(t)} \, dt$
  $= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2(t)\cos^2(t)(\cos^2(t) + \sin^2(t))} \, dt = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t) = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) \, dt = 3[-\cos(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3(1+1) = 6$. C'est un petit peu moins que le périmètre du cercle trigonométrique, ce qui parait assez raisonnable comme ordre de grandeur.

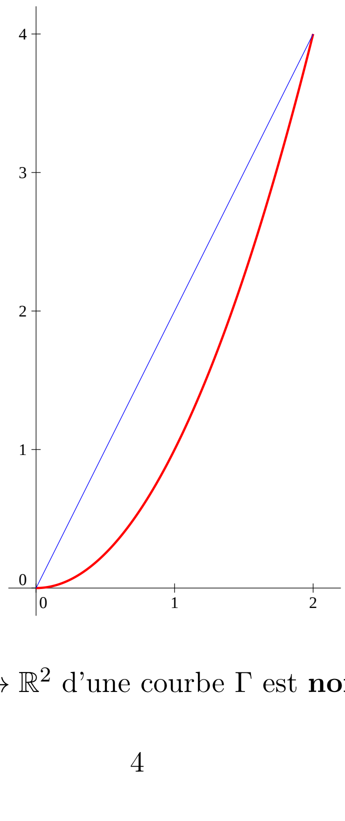


- Si la courbe est définie par une équation polaire, alors $L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} \, d\theta$. En effet, on sait que le vecteur tangent à une courbe définie de cette façon est $\overrightarrow{f'(\theta)} = \rho'(\theta)u_\theta + \rho(\theta)v_\theta$, qui a bien pour norme $\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}$ puisque (u_θ, v_θ) est une base orthonormale du plan. Par exemple, si on considère la cardioïde d'équation $\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta)$, après avoir constaté une symétrie par rapport à l'axe des abscisses et calculé $\rho'(\theta) = -\sin(\theta)$, on calculera $L = 2\int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)} \, d\theta = 2\int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \, d\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos(\theta)} \, d\theta$. Or, on sait (formule de duplication) que $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$, donc $\sqrt{1+\cos(\theta)} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (qui est positif sur notre intervalle). On en déduit que

$$L = 4\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\ d\theta = 8\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 8.$$



- Si la courbe est celle d'une fonction f d'une variable usuelle, alors $L = \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx$. En effet, via le paramétrage $x(t) = t$ et $y(t) = f(t) = f(x)$, on aura $x'(t) = 1$ et $y'(t) = f'(x)$, donc $L = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx$. Par exemple, si on souhaite calculer la longueur d'un arc de parabole d'équation $y = x^2$ entre ses points d'abscisse 0 et d'ascisse 2, on calcule $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2}\ dx$. cette intégrale n'est pas vraiment triviale, commençons par faire une IPP en posant $u(x) = \sqrt{1 + 4x^2}$, soit $u'(x) = \dfrac{8x}{2\sqrt{1 + 4x^2}} = \dfrac{4x}{\sqrt{1 + x^2}}$, et $v'(x) = 1$, soit $v(x) = x$, pour obtenir $L = [x\sqrt{1 + 4x^2}]_0^2 - \displaystyle\int_0^2 \frac{4x^2}{\sqrt{1 + 4x^2}}\ dx = 2\sqrt{17} - \int_0^2 \frac{1 + 4x^2}{\sqrt{1 + 4x^2}}\ dx + \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}}\ dx = 2\sqrt{17} - L + \left[\frac{1}{2}\operatorname{Argsh}(2x)\right]_0^2 = 2\sqrt{17} - L + \frac{1}{2}\operatorname{Argsh}(4)$. On en déduit que $L = \sqrt{17} + \dfrac{1}{4}\operatorname{Argsh}(4) \simeq 4.65$. En comparant avec la longueur du segment de droite joignant les deux extrémités de l'arc, qui vaut $\sqrt{20} \simeq 4.47$, l'ordre de grandeur est correct.



Définition 5. Un paramétrage $f : I \to \mathbb{R}^2$ d'une courbe Γ est **normal** si $\forall t \in I$, $\|f'(t)\| = 1$.

Remarque 5. Un paramétrage normal est simplement un paramétrage pour lequel on parcourt la courbe à vitesse constante égale à 1.

Définition 6. Une **abscisse curviligne** est un paramétrage de la forme $s : t \mapsto \int_{t_0}^{t} \|\overrightarrow{f'(u)}\|\, du$, où $t_0 \in I$.

Proposition 2. Si f est un paramétrage quelconque, alors $f \circ s^{-1}$ est un paramétrage admissible normal.

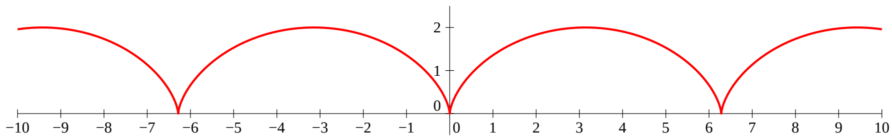
Démonstration. Commençons par constater que $s'(t) = \|\overrightarrow{f'(t)}\| > 0$, donc s est une bijection $\mathcal{C}^1$ de dérivée strictement positive, le paramétrage $g = f \circ s^{-1}$ est donc admissible. De plus, $\overrightarrow{g'(t)} = \frac{1}{s' \circ s^{-1}(t)} \times \overrightarrow{f'(s^{-1}(t))}$, qui est de norme 1 puisque $s'(s^{-1}(t)) = \|\overrightarrow{f'(s^{-1}(t))}\|$. Le paramétrage est donc normal. $\square$

Remarque 6. Si f est un paramétrage normal, le calcul de la longueur des arcs devient extrêmement facile puisque $L = s(t_1) - s(t_0)$ (on intègre la constante 1 entre t_0 et t_1). Par exemple, le paramétrage classique du cercle $(\cos(t), \sin(t))$ est un paramétrage normal.

Remarque 7. À défaut de savoir calculer facilement une abscisse curviligne, on sait déterminer facilement sa dérivée :

- pour une courbe en coordonnées cartésiennes, $\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$.
- pour une courbe en coordonnées polaires, $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}$.

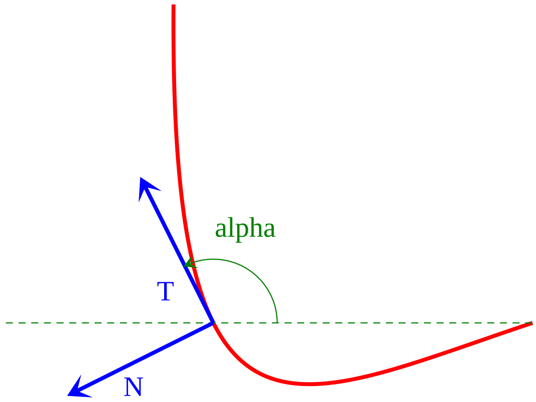
Exemple : Considérons une cycloïde de paramétrage cartésien $(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$. On calcule $x'(t) = 1 - \cos(t)$, $y'(t) = \sin(t)$, donc $\frac{ds}{dt} = \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} = \sqrt{2 - 2\cos(t)} = 2\left|\cos\left(\frac{\pi + t}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$. On sait calculer une primitive de cette fonction : $s(t) = 4\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right|$.



2 Courbure

Définition 7. Soit f un arc paramétré et M le point correspondant à la valeur t du paramètre. Le **repère de Frénet** au point M est le repère $(M, \overrightarrow{T(t)}, \overrightarrow{N(t)})$, où $\overrightarrow{T(t)} = \frac{\overrightarrow{f'(t)}}{\|\overrightarrow{f'(t)}\|}$ est le vecteur tangent unitaire à la courbe en M, et $\overrightarrow{N(t)}$ est le vecteur normal unitaire à la courbe (autrement dit, le repère de Frénet est orthonormal direct).

Remarque 8. Ce repère ne dépend pas du paramétrage admissible choisi. Dans le cas d'un paramétrage normal s, on obtient beaucoup plus simplement $\overrightarrow{T(s)} = \overrightarrow{f'(s)} = (x'(s), y'(s))$ et $\overrightarrow{N(s)} = (-y'(s), x'(s))$. On se permettra l'abus de notation suivant, fréquemment utilisé en physique : $\overrightarrow{T(t)} = \frac{\frac{d\overrightarrow{f}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\overrightarrow{f}}{ds}$ (nous utiliserons sans le préciser d'autres notations de ce type dans la suite de ce cours).



Proposition 3. En coordonnées cartésiennes, $\overrightarrow{T(t)} = \dfrac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\overrightarrow{i} + \dfrac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\overrightarrow{j}$, et $\overrightarrow{N(t)} = -\dfrac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\overrightarrow{i} + \dfrac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}\overrightarrow{j}$.
En coordonnées polaires, $\overrightarrow{T(\theta)} = \dfrac{\rho'(\theta)}{\sqrt{\rho(\theta)^2+\rho'(\theta)^2}}\overrightarrow{u_\theta} + \dfrac{\rho(\theta)}{\sqrt{\rho(\theta)^2+\rho'(\theta)^2}}\overrightarrow{v_\theta}$ et $\overrightarrow{N(\theta)} = -\dfrac{\rho(\theta)}{\sqrt{\rho(\theta)^2+\rho'(\theta)^2}}\overrightarrow{u_\theta} + \dfrac{\rho'(\theta)}{\sqrt{\rho(\theta)^2+\rho'(\theta)^2}}\overrightarrow{v_\theta}$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition. □

Exemple : Pour une cardioïde d'équation $\rho(\theta) = 1+\cos(\theta)$, alors $\rho'(\theta) = -\sin(\theta)$, on a déjà calculé plus haut que $\sqrt{\rho(\theta)^2+\rho'(\theta)^2} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, donc $\overrightarrow{T(\theta)} = -\dfrac{\sin(\theta)}{1\cos(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{u_\theta} + \dfrac{1+\cos(\theta)}{2\cos(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{v_\theta}$. Je vous épargne la valeur de $\overrightarrow{N(\theta)}$.

Théorème 1. Si f est un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, il existe une fonction $\alpha : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ telle que $\left\{\begin{array}{lcl}\overrightarrow{T(t)} & = & (\cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t)))\\ \overrightarrow{N(t)} & = & (-\sin(\alpha(t)), \cos(\alpha(t)))\end{array}\right.$

Démonstration. Nous ne démontrerons pas ce résultat technique. Contentons-nous de constater que la fonction α représente l'angle entre la tangente à l'arc et l'horizontale (cf figure ci-dessus). □

Définition 8. La **courbure** de l'arc en son point de paramètre s (s étant un paramétrage normal) est le réel $c(s) = \dfrac{d\alpha}{ds}$. Alternativement, pour un autre paramétrage, $c(t) = \dfrac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$.

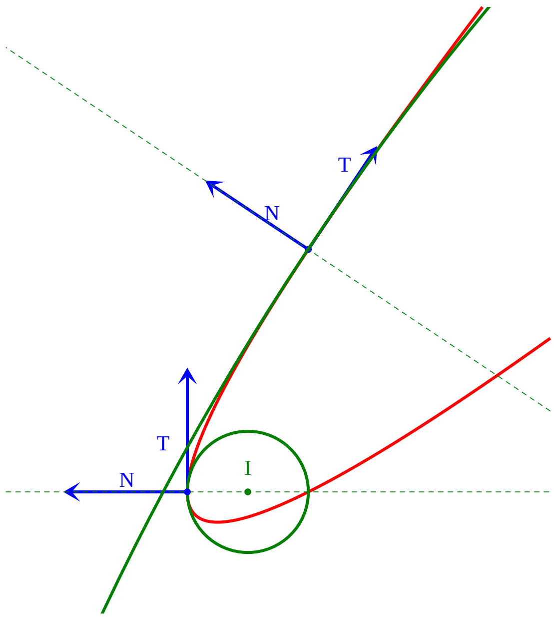
Proposition 4. On a les relations suivantes : $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = c\overrightarrow{N}$ et $\dfrac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -c\overrightarrow{T}$ (relations de Frénet).

Démonstration. En prenant un paramétrage normal, $\overrightarrow{T(s)} = (\cos(\alpha(s)), \sin(\alpha(s)))$, donc $\overrightarrow{T'(s)} = (-\alpha'(s)\sin(\alpha(s)), \alpha'(s)\cos(\alpha(s))) = \alpha'(s)\overrightarrow{N(s)} = c(s)\overrightarrow{N(s)}$. □

Définition 9. Le **rayon de courbure** en un point régulier est le réel $R(t) = \dfrac{1}{c(t)}$.

Le **centre de courbure** est le point $I(t)$ défini par $\overrightarrow{MI(t)} = R\overrightarrow{N(t)}$, où M est le point de la courbe correspondant à la valeut t du paramètre.
Le **cercle de courbure**, ou **cercle osculateur** est le cercle de centre $I(t)$ et de rayon $|R(t)|$.

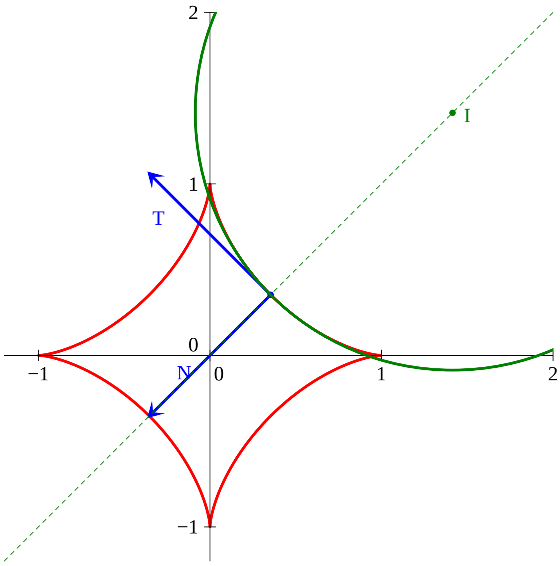
Remarque 9. Le cercle osculateur passe évidemment par le point de la courbe de paramètre t, on peut en fait prouver qu'il s'agit du cercle « le plus proche » de la courbe au point $M(t)$. Il est important de comprendre le sens géométrique des dernières notions définies : la courbure, en tant que dérivée de l'angle entre la courbe et l'horizontale, représente comme son nom l'indique la tandance de la courbe à tourner plus ou moins rapidement. Plus la courbure est élevée (en valeur absolue), plus on tourne. Le rayon de courbure, inversement proportionnel à la courbure, sera très grand quand la courbure est très faible, ce qui correspond bien, puisqu'il colle à la courbe, au fait que la courbe est très rectiligne quand la courbure est faible. Sur la figure ci-dessous, on a indiqué le repère de Frénet (en bleu), ainsi que le centre de courbure I et le cercle osculateur (en vert) en deux points d'une même courbe paramétrée (en rouge). Pour le deuxième point, la courbure étant très faible (donc le rayon de courbure très grand), le centre de courbure est trop éloigné pour être sur la figure, et on n'a représenté qu'une petit partie du cercle osculateur.



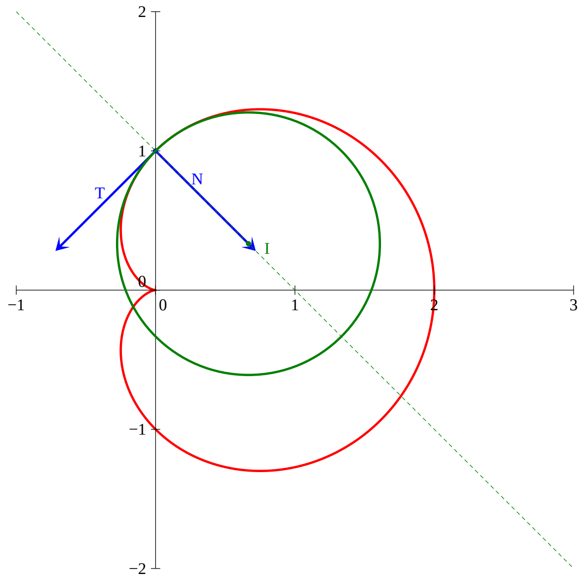
Méthode : En pratique, pour calculer la courbure en coordonnées cartésiennes, on calcule d'abord $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, puis on essaye de déterminer $\alpha(t)$ en constatant que $\tan(\alpha) = \dfrac{y'}{x'}$ (ça devrait être géométriquement évident). Si α n'est pas possible à expliciter (ce qui arrivera hélas souvent), ce n'est pas grave, on dérive pour obtenir la relation $(1+\tan^2(\alpha))\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{y''x' - y'x''}{x'^2}$. Or, $1+\tan^2(\alpha) = 1 + \dfrac{y'^2}{x'^2} = \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'^2}$, en simplifiant les dénominateurs on trouve donc $\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{y''x' - y'x''}{x'^2 + y'^2}$. Il ne reste plus qu'à conclure : $c = \dfrac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \dfrac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\det(\overrightarrow{f'(t)}, \overrightarrow{f''(t)})}{\|\overrightarrow{f'(t)}\|^3}$. Bien sûr, j'aurais pu vous donner directement cette formule pour le calcul de la courbure, mais d'une part elle n'est pas à votre programme (elle le sera l'an prochain), et surtout il est important de maîtriser la logique et l'enchaînement des calculs.

On peut aussi obtenir une formule dans le cas des coordonnées polaires. On commence par calculer $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$. Ensuite, on constate que $\alpha = \theta + V$, avec $\tan(V) = \dfrac{\rho}{\rho'}$ (cette formule ne devrait pas poser de problème dans la mesure où on a déjà travaillé avec l'angle V dans notre premier chapître consacré aux courbes planes). Comme ci-dessus, on peut dériver pour obtenir $(1 + \tan^2(V))\dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2}$, donc $(\rho'^2 + \rho^2)\dfrac{dV}{d\theta} = \rho'^2 - \rho\rho''$. On en déduit que $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2 + \rho^2}$, puis $c = \dfrac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}$. Là encore, il est nettement plus constructif de comprendre les calculs que d'apprendre par coeur la formule.

Exemple 1 : Calculons la courbure de l'astroïde définie par $\overrightarrow{f(t)} = (\cos^3(t), \sin^3(t))$. On a déjà calculé plus haut que $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{3}{2}\sin(2t)$ (on se contentera de faire le calcul sur le quart de courbe sur lequel on avait déjà calculé la ongueur pour ne pas avoir de problèmes de signe). Par ailleurs, $\tan(\alpha(t)) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{3\cos(t)\sin^2(t)}{-3\sin(t)\cos^2(t)} = -\tan(t)$. On peut donc prendre $\alpha(t) = -t$, en tout cas on obtient $\dfrac{d\alpha}{dt} = -1$ sans avoir à faire de calcul compliqué. reste à conclure : $c = \dfrac{\frac{d\alpha(t)}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = -\dfrac{2}{3\sin(2t)}$ et $R = -\dfrac{3}{2}\sin(2t)$. Le signe négatif n'est pas surprenant : sur le morceau de courbe considéré, la normale sera dirigée vers l'intérieur de la courbe, alors que le centre de courbure est manifestement à l'extérieur. Notons que, lorsqu'on se rapproche des points stationnaires en 0 et en $\dfrac{\pi}{2}$, la courbure devient infinie. Un exemple concret : en $\dfrac{\pi}{4}$, $c = -\dfrac{2}{3}$ et $R = -\dfrac{3}{2}$. Illustrations sur la figure ci-dessous, avec le repère de Frénet, le centre de courbure et le cercle osculateur au point de paramètre $\dfrac{\pi}{4}$:



Exemple 2 : Un calcul en polaire pour terminer, avec la courbure de la cardioïde définie par $\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta)$. On a déjà vu plus haut que $\dfrac{ds}{d\theta} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$. On utilise ensuite $\tan(V) = \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \dfrac{1+\cos(\theta)}{-\sin(\theta)} = -\dfrac{2\cos^2(\frac{\theta}{2})}{2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})} = -\dfrac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})} = \tan\left(\dfrac{\pi+\theta}{2}\right)$. En particulier, $\dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{1}{2}$, donc $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = \dfrac{3}{2}$, puis $c = \dfrac{3}{4\cos(\frac{\theta}{2})}$ et $R = \dfrac{4}{3}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$. Ici, la courbure devient infinie quand on approche du point stationnaire de la cardioïde. Un exemple concret : pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient $c = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ et $R = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Une dernière illustration :


2
1
T
N
I
0
−1
0
1
2
3
−1
−2