Calcul matriciel

PTSI B Lycée Eiffel

28 février 2013

Le possible est une matrice formidable.

Victor Hugo

Unfortunately, no one can be told what the Matrix is.
You have to see it for yourself.

Tagline du film Matrix (traduction en exercice).

Introduction

Avant de rentrer dans le vif du sujet en algèbre linéaire (les fameux espaces vectoriels), un chapître plus orienté calcul sur un outil qui sera fondamental dans la suite du cours : les matrices. Il s'agit ici simplement d'apprendre à calculer avec les matrices, mais aussi de voir le lien entre ces nouveaux objets et quelques autres notions que vous maîtrisez déjà : les systèmes d'équations linéaires, pour lesquelles nous verrons une méthode de résolution systématique, et les déterminants que nous avons utilisés en géometrie en début d'année.

Objectifs du chapitre :

- maîtriser le calcul matriciel, calculs de puissances ou de déterminants notamment.
- comprendre le fonctionnement de l'algorithme du pivot de Gauss, et savoir l'appliquer efficacement dans le vadre de l'inversion de matrices comme dans celui de la résolution de systèmes.

1 Un exemple amusant

Pour introduire le concept de matrice, intéressons-nous au problème tout à fait concret suivant : dans un jeu video débile (qui a dit pléonasme ?), on peut composer des armées consituées de trois types de créatures, trolls, orcs et gobelins. Un élève de PTSI ayant trop de temps à perdre contitue lors d'une même soirée les trois armées suivantes :

	Trolls	Orcs	Gobelins
Armée 1	3	5	8
Armée 2	6	2	12
Armée 3	5	5	15

Les bêbêtes en question étant assez gourmandes, il faudra les nourrir quotidiennement d'une certaine quantité de poulet, de bananes, et de lasagnes surgelées (garantis 100% viande de cheval). La quantité de nourriture ingurgitée par chaque type de créature est donnée, en kilos par jour, dans le tableau suivant :

	Poulet	Bananes	Lasagnes
Troll	10	3	8
Orc	8	4	10
Gobelin	2	6	2

La question est fort simple : quelle quantité de chaque aliment le larbin chargé de faire les courses doit-il se procurer pour nourrir chacune des armées ? La réponse est la suivante :

	Poulet	Bananes	Lasagnes
Armée 1	86	77	90
Armée 2	100	98	92
Armée 3	120	125	120

Le remplissage du dernier tableau découle d'un calcul assez simple. Pour trouver par exemple la valeur 86 de la première case, on a multiplié deux à deux les éléments de la première ligne du premier tableau par ceux de la première colonne du deuxième tableau, et additionné le tout : $3 \times 10 + 5 \times 8 + 8 \times 2 = 86$. De même pour les autres éléments, on effectue à chaque fois le « produit » d'une ligne du premier tableau par une colonne du deuxième tableau. eh bien, ce qu'on vient de faire, c'est exactement un produit de matrices. Cette opération en apparence peu naturelle quand on la présente de façon formelle (ce qu'on ne va pas tarder à faire) est donc en réalité très concrète. elle interviendra systématiquement dès qu'on possède trois lots de données, deux tableaux exprimant la première donnée en fonction de la deuxième et la deuxième en fonction de la troisième, et qu'on cherche à exprimer directement la première donnée en fonction de la troisième.

2 Structure et opérations

2.1 Somme et produits

Définition 1. Une **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (comme dans le cas des polynômes, $\mathbb{K}$ désignera pour nous soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$; n et p sont deux entiers naturels non nuls) est un tableau rectangulaire (à n lignes et p colonnes) contenant np éléments de $\mathbb{K}$. On note un tel objet $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ ou de façon plus complète

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & \ddots & & m_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, m_{ij} est le terme de la matrice M se trouvant à l'intersection de la $i$ème ligne et de la $j$ème colonne.

Définition 2. L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dans le cas où $n = p$, on dit que la matrice est **carrée** et on note plus simplement l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 1. Dans le cas où $n = 1$, la matrice se réduit à une ligne, et on parle effectivement de matrice-ligne. De même, lorsque $p = 1$, on parlera de matrice-colonne. La notation est alors extrêmement similaire à celle utilisée pour désigner un élément de $\mathbb{K}^n$ par ses coordonnées dans une base, et on identifiera de fait souvent $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition 3. Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la **somme** de A et de B est la matrice $A + B = C$, où $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 7 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Proposition 1. $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif.

Définition 4. La **matrice nulle** $0_{n,p}$ (ou plus simplement 0 si les dimensions de la matrice sont claires dans le contexte) est la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls. L'**opposé** d'une matrice A pour l'opération de somme sera noté $-A$, il s'agit de la matrice obtenue en prenant les opposés de tous les termes de la matrice A.

Démonstration. Il faut bien faire attention que chaque ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ constitue un groupe, séparément les uns des autres. D'ailleurs, la matrice nulle qui contitue l'élément neutre est différente si on modifie les dimensions des matrices considérées. Toutes les propriétés sont en tout cas évidentes, elles découlent immédiatement des propriétés de la somme de réels, puisque la somme se fait terme à terme. □

Définition 5. Le **produit d'une matrice A par un réel** λ est la matrice, notée λA, obtenue à partir de A en multipliant chacun de ses coefficients par λ.

Proposition 2. Le produit par un réel est distributif par rapport à l'addition de matrices : $(\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B)$. On a également les propriétés suivantes : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \ 1.A = A$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \ \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Remarque 2. Ces propriétés du produit « extérieur » (par opposition au produit intérieur, le produit par un réel n'est pas une lci), cumulées au statut de groupe commutatif, font de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ un **espace vectoriel** sur le corps $\mathbb{K}$.

Définition 6. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors le **produit** des deux matrices A et B est la matrice $A \times B = C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ où $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\forall j \in \{1, \dots, q\}$, $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

Remarque 3. Cette définition correspond exactement à ce qu'on a vu dans notre exemple introductif : on multiplie terme à terme la i-ème ligne de A par la j-ème colonne de B et on somme le tout. Il faut faire très attention à ce que les tailles des matrices soient compatibles pour que le produit existe.

Définition 7. La **matrice identité** dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 3. Propriétés élémentaires du produit de matrices :
- Le produit de matrices est associatif : $(AB)C = A(BC)$.
- Le produit de matrices est distributif par rapport à l'addition : $A(B + C) = AB + AC$; $(A + B)C = AC + BC$.
- La matrice identité est un élément neutre pour le produit : $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $I_n A = A I_p = A$.

- Le produit d'une matrice par une matrice nulle (de taille compatible), à gauche comme à droite, est toujours nul.

Démonstration.

- Pour prouver l'associativité, il faut juste un peu de courage : considérons A et B ayant les dimensions indiquées dans la définition du produit, et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, qu'on peut donc multiplier à droite par B. Si on note $D = (AB)C$, on peut alors écrire $d_{ij} = \sum_{k=1}^{q}(AB)_{ik}C_{kj} = \sum_{k=1}^{q}(\sum_{l=1}^{p} a_{il}b_{lk})c_{kj}$. On peut écrire ceci plus simplement sous la forme $\sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{p} a_{il}b_{lk}c_{kj}$. De même, en notant $E = A(BC)$, on aura $E_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(\sum l = 1^q b_{kl}c_{lj}) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} a_{ik}b_{kl}c_{lj}$. Les deux formules sont bien les mêmes puisque les indices dans une somme double sont muets.
- C'est un calcul assez élémentaire sur les sommes : $\sum_{k=1}^{p} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj}$. L'autre calcul est essentiellement identique.
- Pour cette propriété, on notera juste I et pas I_n par souci de lisibilité. Soit m_{ij} le terme d'indice i, j de la matrice produit IA. On a par définition $m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} I_{ik}A_{kj}$. Mais le seul terme non nul parmi les I_{ik} est I_{ii}, qui vaut 1. On a donc bien $m_{ij} = A_{ij}$. Pour le produit à droite par I_p, la démonstration est essentiellement la même.
- Laissée en exercice !

□

Remarque 4. L'ensemble $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est donc un anneau (non commutatif). Attention aux pièges suivants quand on manipule le produit matriciel :

- Le produit de matrices n'est pas commutatif. En fait, l'existence du produit AB n'implique même pas celle de BA, mais même dans le cas des matrices carrées, par exemple, on a en général $AB \neq BA$. Dans le cas contraire, on dit que A et B commutent.
- Parler de division de matrice n'a en général aucun sens.
- L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre. Plus généralement, même si les matrices ne sont pas carrées, $AB = AC$ n'implique en général pas $B = C$.
- On peut écrire les systèmes d'équations linéaires à l'aide de produits de matrices, mais on reviendra là-dessus un peu plus tard.

Exemple 1 : $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $A \times B = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 6 & 27 \end{pmatrix}$

Exemple 2 : $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$; $A \times B = 0$

2.2 Transposition

Définition 8. La **transposée** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, où $m_{ij} = a_{ji}$. On la note ${}^tA$. Autrement dit, les lignes de A sont les colonnes de ${}^tA$ et vice-versa.

Proposition 4. La transposition vérifie les propriétés suivantes : $\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

- ${}^t({}^tA) = A$
- ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$

- $\forall C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$, ${}^t(AC) = {}^tC\,{}^tA$.

Démonstration. Les trois premières propriétés ne posent aucun problème, mais la dernière est nettement plus complexe. Écrivons ce que vaut le terme d'indice ij à gauche et à droite de l'égalité. Pour ${}^t(AC)$, il est égal au terme d'indice ji de AC, c'est-à-dire à $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{jk}c_{ki}$. À droite, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} ({}^tC)_{ik}({}^tA)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} c_{ki}a_{jk}$. Les deux quantités sont bien égales. □

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$; ${}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Définition 9. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **symétrique** si ${}^tA = A$, c'est-à-dire si $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}^2$, $a_{ij} = a_{ji}$. Elle est antisymétrique si ${}^tA = -A$.

2.3 Matrices carrées

Remarque 5. Puisque l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un anneau, on peut définir des puissances de matrices carrées vérifiant les propriétés usuelles de calcul des puissances entières. Attention tout de même aux pièges découlant de la non-commutativité du produit matriciel, pas exemple, on ne peut pas dire en général que $(AB)^2 = A^2B^2$, et les identités remarquables du genre $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ sont fausses.

Définition 10. Une matrice carrée est **diagonale** si seuls ses coefficients a_{ii} sont (éventuellement) non nuls (on les appelle d'ailleurs coefficients diagonaux de A), ou encore $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Une matrice carrée est **triangulaire supérieure** si seuls les termes « au-dessus » de sa diagonale sont non nuls, c'est-à-dire $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$, ou encore si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$.

On définit de même des matrices triangulaires inférieures.

Proposition 5. Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure (et de même pour les matrices triangulaires inférieures).

Démonstration. Pour les matrices diagonales, prenons deux matrices diagonales (de taille n) A et B. Le terme d'indice ij de AB vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Parmi tous les termes intervenant dans cette somme, seul un des termes de gauche est non nul, quand $k = i$, et seul un des termes de droite est non nul, quand $k = j$. Si $i \neq j$, on n'a donc que des produits nuls, ce qui prouve bien que les seuls termes qui peuvent être non nuls pour AB sont les termes diagonaux.
C'est un peu le même principe pour les matrices triangulaires supérieures. Prenons deux telles matrices A et B et supposons $i > j$. Le terme d'indice ij de AB vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} 0 \times b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik} \times 0 = 0$. La matrice AB est donc triangulaire supérieure. □

Remarque 6. La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire inférieure (et vice versa).

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 0 & 18 & -15 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Remarquez au passage que les termes diagonaux de $A \times B$ sont obtenus comme le produit de ceux de A par ceux de B.

Remarque 7. On déduit aisément des remarques précédentes que les puissances d'une matrice diagonale sont simplement obtenues en prenant les puissances correspondantes de ses coefficients diagonaux.

Définition 11. Une matrice carrée A est dite **nilpotente** s'il existe un entier n tel que $A^n = 0$.

Remarque 8. Si une matrice carrée d'ordre n est nilpotente, elle vérifie nécessairement $A^n = 0$ (pour l'entier n correspondant à l'ordre de la matrice).

Théorème 1. (formule du binôme de Newton) Si A et B sont deux matrices qui commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(A+B)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$.

Démonstration. La démonstration a déjà été faite dans le cadre d'un anneau quelconque. □

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On remarque que $A = I + B$, où $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $B^k = 0$ à partir de $k = 3$ (autrement dit, la matrice B est nilpotente). Les matrice I et B commutent certainement, on peut donc appliquer la formule du binôme : $A^k = (I_3 + B)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} I^i B^{k-i} = I^k + k \times I^{k-1} B + \frac{k(k-1)}{2} \times I^{k-2} B^2 = I_3 + kB + \frac{k(k-1)}{2} B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2k & 3k + 2k(k-1) \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2k & k(2k+1) \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple : Il est également fréquent de calculer les puissances successives d'une matrice par récurrence. Posons par exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, et on constate que $A^2 = -2A + 3I$. Il existe alors deux méthodes pour terminer les calculs.

Première méthode : Prouvons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists (u_k, v_k) \in \mathbb{R}^2$, $A^k = u_k A + v_k I$. C'est vrai pour $k = 2$ comme on vient de le voir, mais aussi pour $k = 1$ puisque $A = 1A + 0I$ (on pose donc $u_1 = 1$ et $v_1 = 0$) et pour $k = 0$ puisque $A^0 = 0A + 1I$ (donc $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$). Supposons le résultat vrai au rang k, on a alors $A^{k+1} = A \times A^k = A(u_k A + v_k I) = u_k A^2 + v_k A = u_k(-2A + 3I) + v_k A = (v_k - 2u_k)A + 3u_k I$. En posant $u_{k+1} = -2u_k + v_k$ et $v_{k+1} = 3u_k$, on a bien la forme demandée au rang $n+1$, d'où l'existence des coefficients u_k et v_k.

Nous avons de plus obtenu des relations de récurrence qui permettent de faire le calcul suivant : $u_{k+2} = -2u_{k+1} + v_{k+1} = -2u_{k+1} + 3u_k$. La suite (u_k) est donc récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique est $x^2 + 2x - 3 = 0$, elle a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et admet donc deux racines $r = \frac{-2-4}{2} = -3$, et $s = \frac{-2+4}{2} = 1$. On en déduit que $u_k = \alpha(-3)^k + \beta$, avec $u_0 = \alpha + \beta = 0$ et $v_0 = -3\alpha + \beta = 1$, dont on tire $\alpha = -\frac{1}{4}$ en faisant la différence des deux équations, puis $\beta = \frac{1}{4}$. On a donc $u_k = \frac{1}{4}(1 - (-3)^k)$ et $v_k = \frac{3}{4}(1 - (-3)^{k-1})$.

On peut alors écrire explicitement les coefficients de la matrice A^k (ce qui n'a pas grand intérêt en soi...).

Deuxième méthode : Une fois obtenue la relation $A^2 = -2A+3I$, on peut poser $P = X^2+2X-3$ et travailler avec des polynômes. Le polynôme P se factorise sous la forme $(X-1)(X+3)$ (il possède une racine évidente), cherchons à déterminer le reste de la division euclidienne de X^k par P. On sait que $X^k = PQ+R$, où R est un polynôme de degré 1, autrement dit de la forme a_kX+b_k. Évaluons l'égalité précédente pour chacune des deux racines du polynôme P, ce qui permet de se débarasser du terme PQ : $1^k = P(1)Q(1)+a_k+b_k$, soit $a_k+b_k = 1$; de même, $(-3)^k = -3a_k+b_k$. En soustrayant les deux équations trouvées, on trouve $a_k = \dfrac{1-(-3)^k}{4}$, puis on en déduit que $b_k = 1-a_k = \dfrac{3+(-3)^k}{4}$.
Comme $X^k = P(X)Q(X) + a_kX + b_k$, on peut appliquer cette égalité à la matrice A (rien ne l'interdit) qui annule le polynôme P pour retrouver $A^k = a_kA + b_k$, avec les mêmes coefficients que par la première méthode.

Définition 12. La **trace** d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le nombre $\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Proposition 6. La trace est une application linéaire : $\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda A + \mu B$.
La trace vérifie la formule $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ (quand A et B sont de même taille).

Démonstration. La première propriété est complètement évidente. La deuxième l'est un peu moins. Calculons donc $\mathrm{Tr}(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$. De même, $\mathrm{Tr}(BA) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ij}$. Quitte à échanger le rôle des deux variables muettes i et j, c'est bien la même chose. □

3 Inversion et systèmes

3.1 Inversion de matrices

Définition 13. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. La matrice B est alors notée A^{-1} et on l'appelle **matrice inverse** de la matrice M. On note par ailleurs $GL_n(\mathbb{K}$ l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n.

Remarque 9. La notion n'a pas bien sûr de sens dans le cas de matrices qui ne sont pas carrées.

Remarque 10. L'inverse d'une matrice, quand il existe, est unique. C'est une conséquence de l'étude générale de la symétrisabilité faite dans le chapître sur les structures algébriques.

Exemple : L'inverse de la matrice I_n est bien sûr I_n elle-même. La matrice nulle n'est pas inversible.
Exemple : Cherchons à déterminer de façon très rudimentaire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
On cherche donc une matrice $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ telle que $AB = I$ (dans ce cas, le produit dans l'autre sens sera automatiquement égal à I, comme on pourra le vérifier facilement). On trouve donc le système $\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & z & = & 1 \\ 2y & + & t & = & 0 \\ 3x & + & 2z & = & 0 \\ 3y & + & 2t & = & 1 \end{array}\right.$. La deuxième équation donne $t = -2y$, ce qui en reportant dans la dernière amène $y = -1$, et donc $t = 2$. La première équation donne $z = 1-2x$, soit en reportant dans la troisième $-x+2 = 0$, donc $x = 2$, puis $z = -3$. Finalement, la matrice A est inversible, et son inverse est $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. On va très vite essayer de trouver des méthodes de calcul d'inverse plus efficace, car je doute que vous ayez envie de calculer l'inverse d'une matrice d'ordre 5 de cette façon.

Remarque 11. Une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. On a alors, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$. Nous verrons plus loin que cette caractérisation s'étend aux matrices triangulaires.

Proposition 7. Principales propriétés calculatoires de l'inversion de matrices.

- Si A est inversible, alors M^{-1} aussi et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ sont deux matrices inversibles, le produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si A est une matrice inversible, A^k est inversible pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $AB = I$, alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Remarque 12. On peut déduire de ces propriétés que $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe.

Démonstration. Rien à prouver, tout a déjà été fait dans un cadre plus général sur les anneaux. □

Remarque 13. Un des principaux intérêts de travailler avec des matrices inversibles est qu'on peut simplifier un peu plus naturellement certains calculs, notammant : si M est une matrice inversible et $MA = MB$, alors $A = B$ (il suffit de multiplier l'égalité à gauche par M^{-1} pour obtenir le résultat). Autre remarque utile : si A et B sont deux matrices non nulles telles que $AB = 0$, alors aucune des deux matrices n'est inversible (sinon, par l'absurde, en multipliant à gauche par l'inverse de A ou à droite par l'inverse de B, on constaterait que l'autre matrice est nulle).

Exemple : Le calcul d'inverse de matrices être grandement simplifié si on connait un polynôme annulateur de la matrice A : soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Un petit calcul permet d'obtenir $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et de constater que $A^2 = 2I - A$, ce qu'on peut écrire $A + A^2 = 2I$, ou encore $\frac{1}{2}A(A+I) = I$. Ceci suffit à montrer que A est inversible et que son inverse est $\frac{1}{2}(A+I)$. Autrement dit, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Il est maintenant temps de donner une méthode algorithmique systématique pour déterminer l'inverse d'une matrice carrée donnée (ou constater qu'elle n'est pas inversible le cas échéant). Cet algorithme, connu sous le nom de pivot de Gauss, est un peu lourd à décrire (et à appliquer aussi) mais représente la méthode la plus raisonnable pour calculer les inverses de façon efficace. On retrouvera le même algorithme au paragraphe suivant pour la résolution de systèmes linéaires.

Définition 14. Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'une matrice sont les suivantes :

- échange des lignes i et j, noté $L_i \leftrightarrow L_j$
- multiplication d'une ligne par une constante non nulle, noté $L_i \leftarrow aL_i$ $(a \neq 0)$
- combinaison des lignes i et j, noté $L_i \leftarrow L_i + bL_j$ $(b \in \mathbb{K})$, qui n'est rien d'autre qu'une combinaison (d'où le nom) des deux opérations précédentes.

On peut définir de même des opérations élémentaires sur les colonnes, mais nous ne nous servirons que des lignes pour le pivot de Gauss.

Proposition 8. Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice A correspondent à un produit à gauche par une matrice (inversible) donnée par le tableau suivant :

Opération sur les lignes du système	Produit de la matrice A par :
Échange $L_i \leftrightarrow L_j$	$\begin{array}{c} \\ \\ \\ (L_i) \\ \\ \\ \\ (L_j) \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$
Produit par un réel $L_i \leftarrow \alpha L_i$	$\begin{array}{c} \\ \\ \\ (L_i) \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$
Combinaison linéaire $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$	$\begin{array}{c} \\ \\ (L_i) \\ \\ (L_j) \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \dots & \alpha & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$

Théorème 2. Toute matrice inversible peut être transformée par une succession d'opérations élémentaires sur ses lignes en la matrice identité I_n.

Démonstration. Nous n'allons pas prouver ce théorème fondamental, mais simplement donner une méthode algorithmique pour effetuer la transformation. notons toutefois que ce théorème donne effectivement un moyen de calculer l'inverse de la matrice A. Si on effectue une succession d'opérations correspondant à des matrices B_1 ; B_2 ; $\dots$; B_k pour obtenir finalement la matrice I_n, on aura donc $B_k B_{k-1} \dots B_1 A = I_n$, ce qui prouve que la matrice A est inversible, d'inverse $A^{-1} = B_k \dots B_1$. Il suffit donc de reprendre les mêmes opérations élémentaires (dans le même ordre) à partir de la matrice identité pour obtenir la matrice A^{-1}. □

Algorithme du pivot de Gauss : Pour inverser une matrice carrée A, on effectue successivement les opérations suivantes :

- Si besoin est, on échange la ligne L_1 avec une ligne L_i sur laquelle le coefficient a_{i1} est non nul (s'il n'y a pas de tel coefficient non nul, la matrice contient une colonne nulle et ne peut pas être inversible).

- À l'aide de combinaisons du type $L_i \leftarrow a_{11}L_i + a_{i1}L_1$, on annule tous les coefficients a_{i1}, pour $i \geqslant 2$ (on peut le faire car a_{11}, qui sera appelé pivot de l'opération, est désormais non nul).
- On reprend l'algorithme sur la sous-matrice formée des $n-1$ dernières lignes jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure.
- Si la matrice triangulaire obtenue a un coefficient diagonal nul, elle n'est pas inversible, et la matrice A non plus.
- Si tous les coefficients diagonaux sont non nuls, on annule les coefficients au-dessus de la diagonale à l'aide de pivots situés sur la diagonale, en commençant par annuler la dernière colonne (à l'aide du coefficient a_{nn}), puis l'avant-dernière (à l'aide de $a_{n-1,n-1}$) etc, de façon à ne pas faire réapparaitre de coefficients non nuls ailleurs que sur la diagonale.
- On obtient ainsi une matrice diagonale, il ne reste qu'à multiplier chaque ligne par une constante pour trouver l'identité.
- On reprend les mêmes opérations (ou on les effectue en parallèle) en partant de la matrice identité pour déterminer A^{-1}.

Nous allons calculer l'inverse de la matrice suivante en utilisant le pivot de Gauss : à gauche, les opérations sur la matrice A, à droite les mêmes opérations à partir de I pour obtenir l'inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow -L_2$$

Conclusion de ce long calcul : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 14. On peut interpréter l'inversion de matrice en termes de réciproque d'applications de $\mathbb{K}^n$ dans lui-même. Par exemple, le calcul que nous venons d'effectuer prouve que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y-z; 2x+4y-z; -2x-5y+3z) \end{array}$ est bijective, de réciproque $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (7x-y+2z; -4x+y-z; -2x+y) \end{array}$. En effet, si on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, l'application f peut se décrire plus simplement sous la forme $f(X) = AX$, et g par $g(X) = A^{-1}X$. Il est alors immédiat que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont toutes deux égales à l'identité. Nous reviendrons longuement sur ce genre de calcul quand nous verrons le lien entre applications linéaires sur un espace vectoriel et matrices.

3.2 Systèmes linéaires

Définition 15. Une **équation linéaire** à n inconnues x_1, x_2, ..., x_n est une équation du type $a_1x_1 + \dots a_nx_n = b$, avec $(a_1, \dots, a_n, b) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

Définition 16. Un **système** de p équations linéaires à n inconnues est constitué de p équations du type précédent. On le note habituellement de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & \dots & a_{pn}x_n & = & b_p \end{array}\right.$$

Remarque 15. Autrement dit, on note a_{ij} le coefficient de l'inconnue x_j dans la i-ème équation. Cette notation fait évidemment le lien avec la notation matricielle, comme on va le préciser plus loin.

Définition 17. Une **solution** d'un système de p équations à n inconnues est un n-uplet de réels $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ vérifiant simultanément les p équations du système.

Définition 18. Un système est **incompatible** s'il n'admet aucune solution. Un système est appelé **système de Cramer** s'il admet exactement une solution.

Exemple : Le système suivant est un système incompatible :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & 7 \\ 2x & - & 5y & + & z & = & -4 \\ 3x & - & 3y & - & 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

En effet, si l'on effectue la somme des deux premières lignes et que l'on soustrait la troisième, on obtient $0 = 2$, ce qui est impossible.

Définition 19. Un système linéaire est **homogène** si tous les coefficients apparaissant dans son second membre (ceux que nous avons noté b_i un peu plus haut) sont nuls. Le **système homogène associé** à un système d'équation linéaires est le système obtenu en remplaçant chaque second membre par 0.

Définition 20. La **matrice associée** au système est la matrice de ses coefficients $A = (a_{ij})$. Si on note les inconnues sous forme de matrice-colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et le second membre également : $X = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, le système est alors simplement équivalent à l'équation matricielle $AX = B$.

Définition 21. Un système linéaire est **carré** s'il possède autant d'équations que d'inconnues, ce qui revient à dire que la matrice qui lui est associée est carrée. De même, un système est dit **triangulaire** si la matrice associée est triangulaire (généralement triangulaire supérieure).

Théorème 3. Un système linéaire carré est de Cramer si et seulement si sa matrice associée A est inversible. Dans ce cas, l'unique solution du système est donnée par $X = A^{-1}B$.

Remarque 16. Autrement dit, le fait qu'un système ait une solution unique ou non ne dépend que des coefficients de chaque équation, mais pas de son second membre.

Démonstration. Il y a un sens évident : si la matrice est inversible, il suffit de multiplier l'égalité $AX = B$ à gauche par A^{-1} pour obtenir le résultat. L'autre sens découlera de l'application de l'agorithme du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes. □

Définition 22. Deux systèmes linéaires sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

Définition 23. Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système sont les mêmes que celle que nous avons définies sur les matrices.

Proposition 9. Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système le transforment en système équivalent.

Algorithme du pivot de Gauss sur les systèmes : L'algorithme est rigoureusement le même que pour l'inversion des matrices, à ceci près qu'on a beaucoup moins de travail. En effet, il suffit de transformer le système en système triangulaire, et de « remonter » ensuite le système pour le résoudre.
Exemple : nous allons résoudre un système à 4 équations et 4 inconnues en suivant scrupuleusement l'algorithme décrit :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - 3L_3 \\ L_4 \leftarrow L_1 + 3L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & & 11y & & & + & t & = & 26 \\ & & y & + & 12z & - & 7t & = & -26 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 11L_2 - 7L_3 \\ L_4 \leftarrow L_2 - 7L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & & & & -66z & + & 48t & = & 192 \\ & & & & -90z & + & 54t & = & 216 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow 90L_3 - 66L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & & & & -66z & + & 48t & = & 192 \\ & & & & & & 756t & = & 3024 \end{array}\right.$$

En remontant le système, on obtient $t = 4$, puis $-66z = 192 - 48t = 0$, donc $z = 0$; $7y = 34 + 6z - 5t = 14$, donc $y = 2$, et enfin $3x = 7 - y + 3z - 2t = -3$, donc $x = -1$. Le système a donc une unique solution : $\mathcal{S} = \{(-1; 2; 0; 4)\}$.
On ne peut qu'être un peu frustré d'avoir fait des calculs si compliqués pour une solution aussi simple. On peut en fait les réduire grandement en utilisant le pivot de façon plus subtile, c'est-à-dire en choisissant un bon pivot à chaque étape. Par exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 3L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ L_4 \leftarrow L_1 + L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & -7y & + & 6z & - & 5t & = & -34 \\ & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 \\ & & -2y & + & 6z & - & 4t & = & -20 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 & \\
 & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 & \\
 & & -7y & + & 6z & - & 5t & = & -34 & \qquad L_3 \leftarrow 7L_2 - L_3 \\
 & & -2y & + & 6z & - & 4t & = & -20 & \qquad L_4 \leftarrow 2L_2 - L_4
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 & \\
 & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 & \\
 & & & & 22z & - & 16t & = & -64 & \\
 & & & & 2z & - & 2t & = & -8 & \qquad L_4 \leftarrow L_3 - 11L_4
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr}
x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\
 & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 \\
 & & & & 22z & - & 16t & = & -64 \\
 & & & & & & 6t & = & 24
\end{array}\right.$$

On retrouve bien évidemment la même solution que tout à l'heure.

4 Déterminants

Définition 24. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on appelle **déterminant de M** la constante $\det(M) = ad - bc$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on appelle **déterminant de M** la constante $\det(M) = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$. On note souvent le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

Remarque 17. Il s'agit d'une définition fort laide du déterminant, qui revient simplement à appliquer la règle de Sarrus. Vous verrez l'an prochain une définition nettement plus sympathique (mais qui utilise quelques connaissances sur les espaces vectoriels), qui a de plus l'avantage de se généraliser à des matrices carrées d'ordre quelconque. Notons tout de même que le déterminant de deux vecteurs du plan coïncide avec le déterminant de la matrice formée des deux matrices-colonnes identifiées aux vecteurs en question, et de même pour trois vecteurs de l'espace.

Théorème 4. Une matrice M est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Démonstration. Nous ne pouvons évidemment faire qu'une démonstration peu satisfaisante de ce résultat fondamental. D'ailleurs, comme pour les auters résultats de cette partie du cours, nous nous contenterons de le faire pour des matrices d'ordre 2. Considérons donc $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et étudions plusieurs cas :

- si a et c sont nuls tous les deux, la matrice n'est pas inversible, et elle a pour déterminant $0d - 0b = 0$.
- sinon, on applique le pivot de Gauss (quitte à échanger les deux lignes, ce qui ne change que le signe du déterminant et donc pas le fait qu'il soit nul ou non) : $L_2 \leftarrow cL_1 - aL_2$, pour obtenir la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix}$. Cette matrice est inversible si et seulement si $a \neq 0$ (ce qui est déjà supposé) et $ad - bc \neq 0$, soit $\det(M) \neq 0$.

□

Proposition 10. Propriétés élémentaires du déterminant.

- $\det(0) = 0$
- $\det(I_n) = 1$
- $\det({}^tA) = \det(A)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Démonstration. Les deux premières propriétés découlent immédiatement de la définition du déterminant. La troisième est évidente : pour passer de A à sa transposée on se contente d'échanger b et c (on ne parle que de matrices d'ordre 2 dans ces démonstrations), ce qui ne change pas la valeur du déterminant. Pour la quatrième, $\det(\lambda A) = (\lambda a)(\lambda d) - (\lambda b)(\lambda c) = \lambda^2(ad - bc)$. Pour la cinquième, en notant e, f, g et h les coefficients de B, on aura $AB = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$, donc $\det(AB) = (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) = acef + adeh + bcfg + bdgh - acef - adfg - bceh - bdgh = adeh + bcfg - adfg - bceh$. D'un autre côté, $\det(A)\det(B) = (ad-bc)(eh-fg) = adeh - adfg - bceh + bcfg$. Les deux quantités sont bien égales. La dernière propriété découle de la précédente : si $A \times A^{-1} = I_n$, on aura $\det(A) \times \det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$. $\square$

Remarque 18. Le déterminant d'une matrice diagonale est simplement le produit de ses éléments diagonaux. En fait, c'est aussi le cas pour une matrice triangulaire.

Proposition 11. Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice ont l'effet suivant sur son déterminant :

- l'échange de deux lignes change le signe du déterminant.
- le produit d'une ligne par une constante λ multiplie le déterminant de la matrice par la même constante λ.
- une combinaison ne change pas le déterminant de la matrice.

On a exactement les mêmes propriétés pour les opérations sur les colonnes (on peut combiner les deux sans problème dans un calcul de déterminant.

Proposition 12. Développement suivant une ligne d'un déterminant.
$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_j$, où D_j désigne le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant de la matrice A la ligne numéro i et la colonne numéro j.

Exemple : Sur une matrice d'ordre 3, on trouvera $\det(A) = -d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$

Exemple : Pour calculer le déterminant $\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, où a, b et c sont trois constantes quelconques, on peut commencer par soustraire la première colonne à chacune des deux autres puis factoriser et enfin développer suivant la dernière ligne : $\begin{vmatrix} bc & ac & ab \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & (a-b)c & (a-c)b \\ a & b-a & c-a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} bc & c & b \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} c & b \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)$.

Définition 25. Pour une matrice A, on appelle **mineur** d'indice (i,j) le déterminant de la matrice obtenue en supprimant dans A la ligne numéro et la colonne numéro j. On le note $\Delta_{i,j}$. On appelle **cofacteur** d'indice $(i;j)$ le nombre $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$, et **comatrice** de A la matrice constituée de tous les cofacteurs de la matrice A (qui a donc même taille que la matrice A). Elle est notée $\mathrm{com}(A)$.

Proposition 13. Pour toute matrice carrée A, on a $A^t(\mathrm{com}(A)) =^t (\mathrm{com}(A))A = (\det(A))I_n$. Conséquence : si A est inversible, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}{}^t(\mathrm{com}(A))$.

Démonstration. On va se contenter du cas des matrices d'ordre 2 où le calcul n'est pas compliqué. Les mineurs sont constitués de déterminants de matrices à une seule ligne et une seule colonne, on obtient donc aisément $\operatorname{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à calculer $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$. □

Proposition 14. Méthode de Cramer de résolution des systèmes linéaires.
Si on considère un système de Cramer de matrice associée A, les valeurs des inconnues x_i pour l'unique solution du système sont données par les formules $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$, où A_i est la matrice obtenue en remplaçant dans la matrice A la colonne numéro i par la matrice-colonne B du second membre du système.

Démonstration. Ce résultat est très facile à prouver avec une bonne définition du déterminant, en utilisant la multilinéarité de celui-ci. Mais comme nous ne disposons que d'une définition pourrie, nous l'admettrons. □

Exemple : Considérons le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & 3y & = & 9 \\ x & + & 3y & - & z & = & -4 \\ -x & + & y & - & z & = & -4 \end{array}\right.$.

On calcule d'abord $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$ $2 \times (-2) + (-2) + 3 \times 4 = 6$. Il reste ensuite trois autres déterminants à calculer (je vous épargne le détail précis des calculs) : $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$; puis $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -6$ et enfin $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 12$. On en déduit la solution du système : $x = \dfrac{6}{6} = 1$; $y = \dfrac{-6}{6} = -1$ et $z = \dfrac{12}{6} = 2$.