

Intégration

PTSI B Lycée Eiffel

10 avril 2013

*Les mathématiciens sont comme les français :
quoique vous leur dites, ils le traduisent dans leur propre langue,
et le transforment en quelque chose de totalement différent.*

GOETHE

*Qu'est-ce qu'un dilemme ?
Un lemme qui sert à prouver deux théorèmes !*

Introduction

Dernier gros chapitre d'analyse fondamentale reprenant des notions que vous avez déjà largement abordées au lycée avec ce chapitre consacré à l'intégration. Comme pour la continuité et la dérivation, le but sera de donner une construction précise et rigoureuse de la notion géométrique d'intégrale (quoiqu'un peu incomplète dans le cas de l'intégrale), puis ensuite d'énoncer les théorèmes fondamentaux, mais également de pratiquer le calcul intégral, qui nécessite hélas un certain bagage technique. Les calculs explicites d'intégrales sont un savoir-faire à acquérir absolument, et font intervenir quantité de techniques pas toujours évidentes à manier.

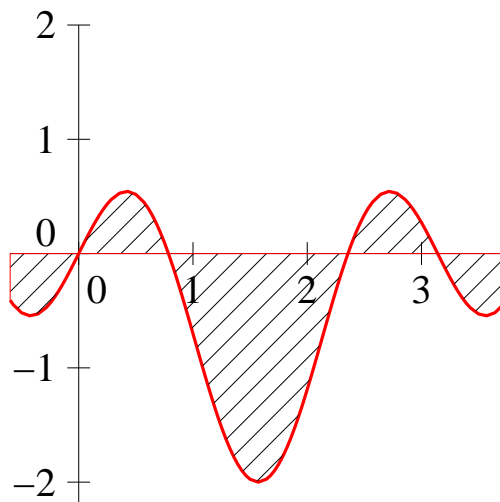
Objectifs du chapitre :

- comprendre comment la notion de primitive est reliée à la notion nettement plus géométrique de calcul d'aire.
- maîtriser parfaitement les techniques de l'intégration par partie et du changement de variables.
- savoir calculer des intégrales plus techniques : fractions rationnelles, fonctions trigonométriques, racines carrées.

1 Construction de l'intégrale

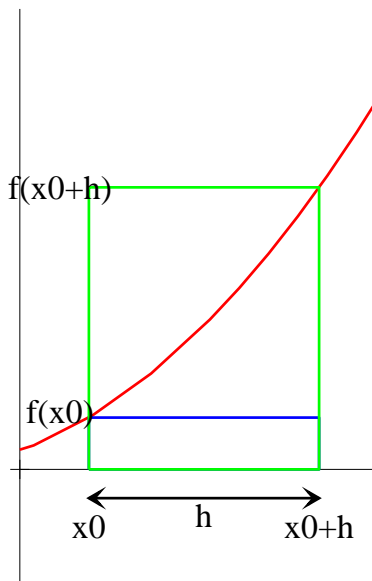
Avant de nous lancer dans le cours proprement dit, essayons de faire un petit calcul mal justifié permettant de comprendre comment ça fonctionne. L'intégration, comme vous le savez sûrement, a pour but de calculer des aires. Cette notion géométrique d'aire est loin d'être facile à définir et pose des problèmes de calcul effectif. Pour cela, comme vous le savez aussi, on recourt pour les calculs d'intégrale à la notion de primitive, qui est en quelque sorte l'opération inverse de la dérivation. Mais quel est le lien entre les deux ? Pour le comprendre, le plus simple est de se ramer à des calculs d'aires de formes géométriques très élémentaires : les rectangles.

Soit donc f une fonction définie et continue sur un segment $[a; b]$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative. On s'intéresse à la fonction \mathcal{A} définie sur $[a; b]$ de la façon suivante : $\mathcal{A}(x_0)$ est l'aire de la portion de plan délimitée par les droites d'équation $x = a$; $x = x_0$; $y = 0$ et par la courbe \mathcal{C}_f . L'aire sera comptée positivement lorsque \mathcal{C}_f se trouve au-dessus de l'axe des abscisses, négativement dans le cas contraire.



Proposition 1. La fonction \mathcal{A} est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée la fonction f .

Démonstration. (non rigoureuse) Calculons le taux d'accroissement de \mathcal{A} entre x_0 et $x_0 + h$ (où h est un réel positif). Par définition, la quantité $\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)$ est l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_0$ et $x = x_0 + h$. Supposons pour la clarté du raisonnement la fonction croissante aux alentours de x_0 (le cas général n'est pas vraiment plus compliqué), on a donc une figure qui ressemble à ceci :



On peut encadrer l'aire qui nous intéresse par celle des deux rectangles de largeur h dessinés sur la figure, l'un ayant pour hauteur $f(x_0)$ et l'autre $f(x_0 + h)$. On a donc $hf(x_0) \leq \mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) \leq$

$hf(x_0 + h)$, ou encore $f(x_0) \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$. Mais on obtient alors, en faisant tendre h vers 0 et en utilisant le théorème des gendarmes, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0)$ (notez qu'on a besoin pour cela de la continuité de la fonction f). En procédant de la même manière pour $h < 0$, on montre la dérivabilité de la fonction \mathcal{A} , et on a bien $\mathcal{A}'(x_0) = f(x_0)$. \square

Le principe de base de cette méthode (tracer des rectangles) est à la base d'une méthode de calcul approché d'intégrales dont nous reparlerons en fin de chapitre. En attendant, essayons de définir plus rigoureusement cette fameuse notion d'aire sous une courbe, encore une fois en utilisant des rectangles.

1.1 Fonctions en escalier

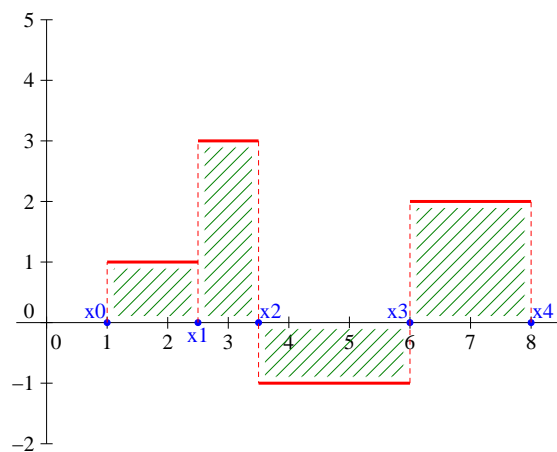
Définition 1. Soit $[a, b]$ un segment, une liste de $n + 1$ réels $\tau = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ constitue une **subdivision** du segment $[a, b]$ si $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Le **pas** de la subdivision τ est le réel strictement positif $h = \min(x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1})$.

Remarque 1. En fait, il serait plus rigoureux de dire que les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, pour i variant entre 0 et $n - 1$, constituent une subdivision de $[a, b]$.

Définition 2. Soient τ et τ' deux subdivisions d'un même intervalle $[a, b]$, alors $\tau \cup \tau'$ est encore une subdivision de $[a, b]$ (en réordonnant les différents réels) notée $\tau \star \tau'$.

Définition 3. Une fonction φ est une **fonction en escalier** sur le segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\tau = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\varphi|_{[x_i, x_{i+1}]}$ est une fonction constante. La subdivision τ est alors appelée **subdivision adaptée** à la fonction en escalier φ .

Remarque 2. Les valeurs prises par la fonction en x_0, x_1 etc n'ont aucune importance, et ne doivent pas nécessairement être égales à l'une des deux valeurs prises sur les intervalles ayant x_i pour borne. Un exemple de fonction en escalier sur le segment $[1, 8]$ et de subdivision adaptée à cette fonction (les aires servant à la définition de l'intégrale sont également indiquées) :



Proposition 2. L'ensemble des fonctions en escalier sur un segment est un espace vectoriel.

Démonstration. Nous allons prouver qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'ensemble de toutes les fonctions définies sur $[a, b]$. Considérons donc deux fonctions φ et ψ , en escalier sur $[a, b]$, et τ et τ' deux subdivisions adaptées respectivement à τ et à τ' . La subdivision $\tau \star \tau'$ est alors une subdivision adaptée à la fois à φ et à ψ . En effet, chacun des intervalles définis par $\tau \star \tau'$ est inclus dans un des intervalles définis par τ , la fonction φ y est donc constante, et de même pour ψ . Chacune des deux fonctions étant constante sur les intervalles définis par $\tau \star \tau'$, toute combinaison linéaire de φ et ψ sera aussi, et est donc aussi une fonction en escalier sur $[a, b]$. \square

Définition 4. Soit φ une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $\tau = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à φ , alors l'intégrale de φ sur le segment $[a, b]$ est le nombre réel $\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \alpha_k$, où α_k est la valeur constante prise par φ sur l'intervalle $]x_k, x_{k+1}[$. Cette intégrale est notée $\int_a^b \varphi(x) dx$.

Remarque 3. La variable x apparaissant dans la dernière notation introduite est une variable muette (comme l'indice d'une somme par exemple) qui peut être remplacée par n'importe quelle autre variable tant qu'on modifie également le dx qui suit : $\int_a^b \varphi(w) dw = \int_a^b \varphi(x) dx$.

Proposition 3. L'intégrale d'une fonction en escalier sur un segment ne dépend pas de la subdivision τ choisie.

Démonstration. Soient τ et τ' deux subdivisions adaptées à une même fonction φ , alors $\tau \star \tau'$ est également une subdivision adaptée à φ (nous l'avons démontré un peu plus haut), il suffit alors de constater que l'intégrale donnée par τ et par $\tau \star \tau'$ est identique (ce sera également le cas pour τ' et $\tau \star \tau'$, donc pour τ et τ'). Or, pour passer de τ à $\tau \star \tau'$, on se contente de découper chaque intervalle de τ en (éventuellement) plusieurs intervalles. L'égalité découle alors de la distributivité des sommes : si i réels y_1, \dots, y_i apparaissent entre x_k et x_{k+1} , en notant $y_0 = x_k$ et $y_{i+1} = x_{k+1}$,
$$\sum_{j=0}^i (y_{j+1} - y_j) \alpha_k = \alpha_k \sum_{j=0}^i (y_{j+1} - y_j) = \alpha_k (x_{k+1} - x_k). \quad \square$$

Proposition 4. L'application $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi(x) dx$ est une application linéaire. De plus, $\forall c \in [a, b]$, $\int_a^c \varphi(x) dx + \int_c^b \varphi(x) dx$ (résultat connu sous le nom de relation de Chasles). Enfin, si la fonction φ est positive sur le segment $[a, b]$, son intégrale sur $[a, b]$ est positive (résultat connu sous le nom de positivité de l'intégrale).

Démonstration. En prenant une subdivision adaptée simultanément à deux fonctions en escalier φ et ψ , la linéarité de l'intégrale découle une fois de plus de la distributivité dans les sommes. Notons α_k et β_k les valeurs respectives prises par φ et ψ sur les intervalles de la subdivision commune, alors
$$\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi)(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) (\lambda\alpha_k + \mu\beta_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \alpha_k + \mu \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \beta_k = \lambda \int_a^b \varphi(x) dx + \mu \int_a^b \psi(x) dx.$$
 La relation de Chasles est une conséquence encore plus simple de l'associativité de la somme (on ajoute c à la subdivision, ce qui ne change pas l'intégrale comme on l'a vu précédemment, et on sépare la somme en deux), et la positivité est carrément triviale : une somme de réels positifs est certainement positive. \square

1.2 Intégrale d'une fonction continue

Dans tout ce paragraphe, ainsi que dans la suite du chapitre, f désigne une fonction continue sur un segment $[a, b]$.

Théorème 1. Approximation des fonctions continues par des fonctions en escalier. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et ε un réel strictement positif. Alors il existe une fonction φ en escalier sur $[a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b], \varphi(x) \leq f(x)$ et $|f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$.

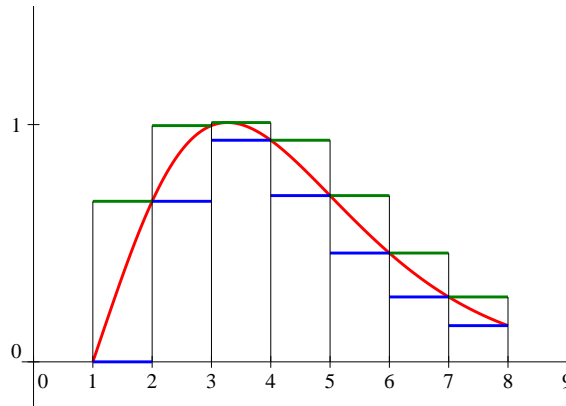
Démonstration. Nous admettrons ce résultat, qui est hors programme. Il nécessite en fait le théorème de Heine (hors programme), qui est lui-même une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstraß (encore hors-programme, même si celui-là a été énoncé et même démontré dans notre

chapître sur les suites). Pour essayer de comprendre l'idée (et ce qui pose problème), un début de raisonnement : f étant supposée continue en a , il existe certainement un intervalle de la forme $[a, x_1]$ sur lequel $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ (c'est la définition de la limite qui nous le donne). On peut poser $\varphi(x) = \inf_{x \in [a, x_1]} f(x)$ sur l'intervalle $[a, x_1]$. Ensuite, de la même manière, on trouve x_2 tel que $|f(x_1) - f(x)| \leq \varepsilon$ sur $[x_1, x_2]$, ce qui permet de poser $\varphi(x) = \inf_{x \in [x_1, x_2]} f(x)$ sur $[x_1, x_2]$. Et ainsi de suite, on construit une subdivision τ et une fonction en escalier vérifiant les hypothèses du théorème. Le problème est qu'on n'a aucun contrôle sur le pas de la subdivision créée : on pourrait très bien avoir des intervalles de plus en plus petits, et ne jamais approcher de b , la deuxième borne de notre segment. Le théorème de Heine assure justement que ce ne sera pas le cas, en « renversant » les quantificateurs dans la définition de la continuité : il assure que, si f est continue sur $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$, il existe un réel η tel que $\forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Le réel η ne dépend plus de ε , ce qui change tout. \square

Théorème 2. En notant $\mathcal{E}^- = \{\varphi | \forall x \in [a, b], \varphi(x) \leq f(x)\}$ avec φ en escalier sur $[a, b]$, et $\mathcal{E}^+ = \{\psi | \forall x \in [a, b], \psi(x) \geq f(x)\}$ (où ψ est, comme vous l'aurez deviné, en escalier sur $[a, b]$), alors

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{E}^-} \int_a^b \varphi(x) dx = \inf_{\psi \in \mathcal{E}^+} \int_a^b \psi(x) dx.$$

Démonstration. Une petite illustration de ce théorème, qui dit simplement qu'on peut encadrer une fonction continue par deux fonctions en escalier, dont les intégrales peuvent être rendues aussi proches qu'on le souhaite (ici avec un pas constant, une fonction en escalier minorant f en bleu, et une majorant f en vert) :



La démonstration est en fait relativement simple avec le théorème précédent. On peut déjà constater que $\forall \varphi \in \mathcal{E}^-, \forall \psi \in \mathcal{E}^+, \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx$ (c'est par exemple une conséquence de la positivité et de la linéarité de l'intégrale, en constatant que la fonction $\psi - \varphi$ est toujours positive). On en déduit que $\sup_{\varphi \in \mathcal{E}^-} \int_a^b \varphi(x) dx \leq \inf_{\psi \in \mathcal{E}^+} \int_a^b \psi(x) dx$ (au passage cela prouve l'existence de la borne supérieure et de la borne inférieure, car le membre de gauche, par exemple, est majoré par l'intégrale de n'importe quelle fonction en escalier majorant f , et de telles fonctions existent). Ensuite, le théorème assure l'existence d'une fonction $\varphi \in \mathcal{E}^-$ telle que $\forall x \in [a, b], f(x) - \varphi(x) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ (qui est un nombre strictement positif comme les autres), mais aussi de $\psi \in \mathcal{E}^+$ telle que $\forall x \in [a, b], \psi(x) - f(x) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ (on applique le théorème à $-f$ et on prend l'opposé de la fonction obtenue). On a donc, $\forall x \in [a, b], 0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$. La fonction $\psi - \varphi$ et a

une intégrale positive et majorée par $\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \times \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$. Autrement dit, en appliquant

la linéarité de l'intégrale des fonctions en escalier, $\int_a^b \psi(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx + \varepsilon$. Cela prouve que

$\sup_{\varphi \in \mathcal{E}^-} \int_a^b \varphi(x) dx \geq \inf_{\psi \in \mathcal{E}^+} \int_a^b \psi(x) dx - \varepsilon$. Comme cette inégalité est vraie quelle que soit $\varepsilon > 0$, les deux membres sont nécessairement égaux. \square

Définition 5. L'intégrale de la fonction f sur le segment $[a, b]$ est le nombre réel $\sup_{\varphi \in \mathcal{E}^-} \int_a^b \varphi(x) dx$
 $= \inf_{\psi \in \mathcal{E}^+} \int_a^b \psi(x) dx$. On le note $\int_a^b f(x) dx$.

Proposition 5. La linéarité de l'intégrale est conservée sur l'ensemble des fonctions continues, ainsi que la relation de Chasles et la positivité.

Démonstration. Cette démonstration un peu technique fait intervenir la caractérisation des bornes supérieure et inférieure. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, λ et μ deux réels, et $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe une fonction en escalier φ majorée par f sur $[a, b]$

telle que $0 \leq \int_a^b f(x) - \varphi(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2\lambda}$. De même, il existe une fonction ψ majorée par g telle que

$\int_a^b g(x) - \psi(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2\mu}$. La fonction $\xi = \lambda\varphi + \mu\psi$ est alors une fonction en escalier majorée par

$\lambda f + \mu g$ et telle que $\int_a^b \xi(x) dx \geq \lambda \int_a^b f(x) + \mu \int_a^b g(x) - \varepsilon$. Comme, par définition, $\int_a^b \xi(x) dx \leq$

$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x) dx$, on en déduit que $\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x) dx \leq \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx - \varepsilon$. Cela

étant vrai quelle que soit la valeur de ε , $\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x) dx \leq \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$. On prouve l'inégalité dans l'autre sens de la même façon, à l'aide de fonctions en escalier majorantes, et on en déduit la linéarité.

La relation de Chasles est plus facile à prouver : si φ minore f sur $[a, b]$, alors la restriction de φ à $[a, c]$ et à $[c, b]$ minore les restrictions de f à chacun des deux intervalles, et $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \geq$

$\int_a^b \varphi(x) dx + \int_c^b \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx$. Comme cela est vrai pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}^-$, on en

déduit que $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$. Encore une fois, l'inégalité réciproque se prouve à l'aide de fonction en escalier majorantes, de la même manière.

Le dernier point est de loin le plus facile : si f est positive sur $[a, b]$, la fonction nulle appartient à \mathcal{E}^- , et comme son intégrale est nulle, on en déduit que $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. \square

Proposition 6. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Démonstration. C'est une conséquence des propriétés précédentes : si $f \leq g$, alors $g - f \geq 0$, donc par positivité de l'intégrale $\int_a^b g(x) - f(x) dx$. Il suffit alors d'appliquer la linéarité de l'intégrale pour conclure. \square

Remarque 4. Ce résultat signifie simplement qu'on peut intégrer des inégalités. Il sera souvent appliqué dans un cas très particulier où l'une des deux fonctions est constante : si f est majorée par M et minorée par m sur $[a, b]$, alors $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$.

Proposition 7. Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$, alors f est nulle si et seulement si $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Proposition 8. Il y a une implication évidente, pour démontrer l'autre sens on procède par contraposée. Supposons que f ne soit pas nulle sur $[a, b]$. Il existe donc un réel $x \in]a, b[$ tel que $f(x) > 0$ (même si le maximum de f est atteint en une borne de l'intervalle, par continuité, f restera strictement positive à l'intérieur). Par continuité, on peut en déduire l'existence d'un intervalle $]c - \eta, c + \eta[$ sur lequel $f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$. La fonction f est alors minorée par la fonction en escalier φ valant $\frac{f(c)}{2}$ sur $]c - \eta, c + \eta[$ et 0 ailleurs. Cette fonction en escalier ayant pour intégrale $\eta f(c) > 0$, on en déduit que $\int_a^b f(x) dx > 0$, ce qui prouve notre deuxième implication.

Proposition 9. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la propriété précédente : $f \leq |f|$, donc $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Mais comme $-f \leq |f|$ également, on peut aussi écrire $-\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$. La combinaison des deux inégalités prouve la propriété. Cette propriété est d'ailleurs visuellement évidente, l'intégrale de $|f|$ revient à calculer positivement toutes les aires comprises entre la courbe et l'axe des abscisses (y compris sur les intervalles où f est négative), on obtient forcément une valeur plus grande qu'en calculant la valeur absolue de l'intégrale de f , où certaines portions peuvent être comptées négativement. \square

Définition 6. La **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$ est le nombre réel $\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$.

Remarque 5. Cette valeur représente la largeur d'un rectangle dont l'aire est égale à celle donnée par l'intégrale de la fonction f , ce qui correspond bien à une notion de valeur moyenne.

Proposition 10. Inégalité de la moyenne.

Si f et g sont continues sur $[a, b]$, alors $\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \int_a^b |g(x)| dx$.

Démonstration. Il suffit encore une fois d'appliquer la dernière propriété prouvée : $\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \times |g(x)| dx$. Comme $|f|$ est majorée par $\sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$, le résultat en découle. \square

Proposition 11. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Si f et g sont continues sur $[a, b]$, alors $\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right) \times \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right)$. De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $f = 0$ ou $f = \lambda g$ pour un certain réel λ .

Démonstration. Nous retrouverons ce résultat de manière plus générale dans notre chapitre consacré à la géométrie euclidienne. La démonstration en est assez surprenante : pour un réel t quelconque, on pose $P(t) = \int_a^b (f(x) + tg(x))^2 dx$. Par linéarité, $P(t) = \int_a^b f(x)^2 dx + 2t \int_a^b f(x)g(x) dx +$

$t^2 \int_a^b g(x)^2 dx$. Autrement dit, $P(t)$ est un polynôme de degré 2 (sauf si f est la fonction nulle, auquel cas l'inégalité est triviale). Or, $P(t)$ étant l'intégrale d'une fonction positive, est toujours positif. Cela implique que son discriminant Δ est négatif. Comme $\Delta = 4 \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 - 4 \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx$, l'inégalité en découle immédiatement. Pour avoir égalité dans l'inégalité, il faut que le discriminant soit nul, ce qui implique l'existence d'une valeur de t pour laquelle $\int_a^b (f(x) + tg(x))^2 dx = 0$. Comme c'est une intégrale de fonction continue et positive, elle ne peut s'annuler que si $f(x) + tg(x)$ est nulle sur $[a, b]$, ce qui implique $f(x) = -tg(x)$, avec t constant. \square

Remarque 6. Tous les résultats énoncés dans ce paragraphe peuvent s'étendre facilement à des fonctions qui ne sont pas tout à fait continues, mais seulement continues par morceaux (c'est-à-dire continues sur tous les intervalles délimités par une certaine subdivision de $[a, b]$). Il suffit pour cela de définir l'intégrale de la fonction comme la somme des intégrales des fonctions continues sur chacun des intervalles de la subdivision, en parfaite cohérence avec la relation de Chasles. La construction de l'intégrale que nous avons donnée fonctionne d'ailleurs pour une classe de fonctions plus large que les fonctions continues, qu'on appelle fonctions réglées (mais que nous n'étudierons pas cette année). Il existe d'autres façons de définir rigoureusement l'intégrale, celle que nous avons étudiée est l'intégrale de Riemann, et il existe notamment une intégrale de Lebesgue qui permet de définir l'intégrale sur une classe de fonctions encore nettement plus large, appelées fonctions mesurables. Bref, même si ça ne vous saute pas aux yeux, nous avons fait au plus simple!

Remarque 7. On peut également définir assez facilement des intégrales de fonctions continues sur un segment et à valeurs complexes : si $f(x) = g(x) + ih(x)$, avec g et h deux fonctions continues à valeurs réelles, alors on pose $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx + i \int_a^b h(x) dx$. Par exemple, on peut calculer $\int_0^\pi e^{ix} dx = \int_0^\pi \cos(x) dx + i \int_0^\pi \sin(x) dx = [\sin(x)]_0^\pi + i[-\cos(x)]_0^\pi = 2i$ (après, à vous de voir si vous arrivez à donner une signification intéressante à ce résultat).

1.3 Primitives

Définition 7. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que F est une **primitive** de f sur I si la fonction F est dérivable sur I et vérifie $F' = f$.

Exemple : Sur n'importe quel intervalle, la fonction $x \mapsto 1$ a pour primitive $x \mapsto x$, mais aussi $x \mapsto x + 2$; $x \mapsto x - \sqrt{127}$ etc. Sur l'intervalle \mathbb{R}^{+*} , la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour primitive $x \mapsto \ln(x)$.

Proposition 12. Si F est une primitive de f sur l'intervalle I , la fonction $x \mapsto F(x) + k$ ($k \in \mathbb{R}$) est également une primitive de f . Réciproquement, si G est une primitive de f , la fonction $G - F$ est constante (autrement dit, il existe une constante k pour laquelle $G = F + k$).

Démonstration. C'est essentiellement évident : si $F' = f$, alors $(F + k)' = f$ donc $F + k$ est une primitive de f . Et si F et G sont deux primitives de f , on a $(G - F)' = f - f = 0$. Il reste tout de même à expliquer pourquoi les seules fonctions dont la dérivée est nulle sont les fonctions constantes. C'est une conséquence du théorème des accroissements finis : soient x et y deux réels appartenant à I , alors il existe un réel $c \in]x, y[$ tel que $\frac{(G - F)(y) - (G - F)(x)}{y - x} = f(c) - f(c) = 0$, donc $(G - F)(y) = G - F(x)$, et ce quels que soient x et y . \square

Proposition 13. Soit f continue sur I et $a \in I$, alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I . Il s'agit de l'unique primitive de f sur I s'annulant en a .

Démonstration. L'unicité est évidente : si deux primitives de f s'annulent en a , puisqu'elles diffèrent d'une constante, cette constante est nécessairement nulle. La première partie du théorème revient à prouver rigoureusement le résultat donné dans l'introduction de ce chapitre. Fixons un réel $x \in I$ et considérons un autre réel $h > 0$ tel que $[a, a+h] \subset I$, on peut alors écrire $F(x_0+h) = \int_a^{x_0+h} f(t) dt = \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) + (f(t) - f(x_0)) dt = F(x_0) + hf(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt$. Fixons $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue en x_0 , il existe un réel $\eta > 0$ tel que, $\forall t \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. En intégrant cette inégalité entre x_0 et x_0+h , on obtient $\left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0) dt \right| \leq \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \leq h\varepsilon$. Autrement dit, $\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) - f(x_0) dt \underset{h \rightarrow 0}{=} o(h)$. En reprenant notre calcul initial, $F(x_0+h) = F(x_0) + hf(x_0) + o(h)$, ce qui constitue un développement limité à l'ordre 1 en x_0 de F et prouve que F est dérivable en x_0 et surtout que $F'(x_0) = f(x_0)$. On a bien prouvé que la fonction F était une primitive sur I de f . \square

Corollaire 1. Toute fonction continue sur un segment y admet une primitive.

Remarque 8. Elle en admet même une infinité, qui diffèrent toutes d'une constante, mais toutes les primitives ne peuvent pas nécessairement se mettre sous la forme précédente puisqu'elles ne s'annulent pas nécessairement sur I . Ce résultat permet notamment de justifier la définition de la fonction \ln comme la primitive de la fonction inverse sur \mathbb{R}^{+*} s'annulant en 1. Il est tellement important qu'il est parfois désigné sous la dénomination de théorème fondamental de l'analyse.

Définition 8. Pour une fonction F continue sur un segment $[a, b]$, on note $[F(x)]_a^b$ le réel $F(b) - F(a)$.

Exemple : La détermination de primitive sera bien sûr la technique privilégiée pour le calcul explicite d'intégrales. Par exemple, $\int_1^2 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2}{3} (2^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{4\sqrt{2} - 2}{3}$.

Exemple : Il faudra également être capable de reconnaître immédiatement les dérivées de composées les plus classiques, qui permettent de calculer directement des intégrales pas toujours évidentes à repérer. Ainsi, $\int_0^1 2te^{t^2} dt = [e^{t^2}]_0^1 = e - 1$.

Pour conclure ce paragraphe, un petit tableau des primitives et formules utiles à connaître. Rien de nouveau bien entendu, puisque ce tableau est simplement obtenu en « retournant » celui des dérivées classiques. D'autres primitives peuvent être considérées comme classique, comme par exemple celle de la tangente qui s'obtient simplement en écrivant $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et en repérant une dérivée de \ln , mais elles sont volontairement omises car on les retrouvera (et on détaillera donc le calcul) systématiquement dans les exercices. Dans la dernière colonne du tableau, f (ou g) désigne une fonction continue quelconque, et F (ou G) une de ses primitives.

Fonction	Primitive	Fonction	Primitive	Fonction	Primitive
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x)$	kf	kF
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x)$	$f+g$	$F+G$
e^x	e^x	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$u'f(u)$	$F(u)$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{Argth}(x)$	$f'f$	$\frac{f^2}{2}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$\frac{f'}{f}$	$\ln f $
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{Argch}(x)$	$f'e^f$	e^f
		$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{Argsh}(x)$		

Exemple : étude d'une fonction définie par une intégrale. Un type d'exercices très classique (et donc à maîtriser) consiste à faire étudier une fonction définie par une intégrale à bornes variables. Même si on ne sait pas intégrer la fonction sous l'intervalle, on pourra toujours réussir à calculer explicitement la dérivée de la fonction à étudier, comme dans l'exemple suivant : $\varphi(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sh}(t)}{t} dt$. La fonction

$f : t \mapsto \frac{\operatorname{sh}(t)}{t}$ est définie et continue sur \mathbb{R}^* , $\varphi(x)$ sera donc défini si $\forall t \in [x, 2x], t \neq 0$. C'est le cas si $x \neq 0$, donc $\mathcal{D}_\varphi = \mathbb{R}^*$.

Étudions les variations de φ : en notant F une primitive de f sur l'un des deux intervalles \mathbb{R}^{+*} ou \mathbb{R}^{-*} , on peut écrire $\varphi(x) = F(2x) - F(x)$, donc en dérivant $\varphi'(x) = 2f(2x) - f(x) = \frac{2\operatorname{sh}(2x)}{2x} - \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} = \frac{\operatorname{sh}(2x) - \operatorname{sh}(x)}{x}$. La fonction sh étant strictement croissante sur \mathbb{R} , $\operatorname{sh}(2x) - \operatorname{sh}(x)$ est du signe de x (si $x \geq 0, 2x \geq x$, mais si $x < 0, 2x < x$), donc $\varphi'(x) \geq 0$ sur chacun des deux intervalles.

On peut compléter l'étude par des calculs de limite. Ici, la fonction f ayant pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (par croissance comparée), on peut certainement trouver un réel $x_0 > 0$ à partir duquel $f(x) \geq 1$.

On peut alors écrire $\forall x \geq x_0, \varphi(x) \geq \int_x^{2x} f(t) dt \geq \int_x^{2x} 1 dt = x$, dont on déduit aisément que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$. On prouve de même que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty$. Le plus difficile est de calculer les limites en 0 (de chaque côté, la technique est la même). On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} f(t) = 1$, donc, en fixant un réel $\varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in]0, \eta], 1 - \varepsilon \leq f(t) \leq 1 + \varepsilon$. En intégrant ces inégalités, on obtient que,

$\forall x \in]0, \frac{\eta}{2}]$ (pour avoir $[x, 2x] \subset]0, \eta]$), $x(1 - \varepsilon) \leq \varphi(x) \leq x(1 + \varepsilon)$. Cela suffit pour prouver, en appliquant le théorème des gendarmes, que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 0$ (et de même en 0^-). On obtient finalement le très simplement tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

On peut même prolonger φ par continuité en posant $\varphi(0) = 0$ pour en faire une bijection croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Exercice : étude d'une suite d'intégrales. Encore un sujet classique, pour lequel il faut connaître les méthodes classiques. On définit une suite (I_n) par $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$.

1. Calculer les valeurs de I_0 , I_1 et I_2 .
2. Déterminer la monotonie de la suite (I_n) , et en déduire la convergence de la suite.
3. En écrivant $1 - I_n$ sous la forme d'une intégrale, déterminer la limite de $1 - I_n$, puis prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1$.

1. On calcule donc $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}$; puis $I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$; et enfin $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. Notons que les valeurs suivantes des termes de la suite seraient nettement plus techniques à calculer. On est notamment complètement incapables de donner une expression explicite pour I_n .

2. Calculons donc $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^{n+1}} - \frac{1}{1+t^n} dt = \int_0^1 \frac{t^n - t^{n+1}}{(1+t^{n+1})(1+t^n)} dt$. Cette intégrale est celle d'une fonction positive sur $[0, 1]$ (le dénominateur est clairement positif, et sur $[0, 1]$, $t^{n+1} \leq t^n$), donc $I_{n+1} - I_n \geq 0$, ce qui prouve la croissance de la suite (I_n) . Une façon légèrement différente de rédiger ce calcul est de procéder par inégalités successives sur les fonctions intervenant sous l'intégrale, pour finir par intégrer les inégalités obtenues. La suite (I_n) est par ailleurs majorée, car $\frac{1}{1+t^n} \leq 1$ sur $[0, 1]$ (quelle que soit la valeur de n), donc $I_n \leq \int_0^1 1 dt = 1$. Elle converge donc.

3. Calculons $1 - I_n = \int_0^1 1 dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$. Par la même majoration que tout à l'heure, $1 - I_n \leq \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. Par ailleurs, $1 - I_n \geq 0$ puisque $I_n \leq 1$. Une simple application du théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - I_n = 0$, ce qui revient bien à dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 1$.

2 Techniques de calcul

2.1 Intégration par parties

Théorème 3. Intégration par parties.

si u et v sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un segment $[a, b]$, alors $\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la formule de dérivation d'un produit : uv est une primitive de $u'v + uv'$, donc $[uv]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t) dt$, et la formule en découle par linéarité. \square

Remarque 9. Cette formule peut paraître peu intéressante dans la mesure où on se contente de remplacer une intégrale de produit par une autre intégrale de produit, mais elle est en fait extrêmement importante en pratique. Elle sera très souvent utilisée dans le cas d'un calcul d'intégrale de produit peu évident, que l'on souhaite transformer un produit plus simple. Il faut bien comprendre que lors d'une intégration par parties (qu'on abrégera systématiquement en IPP), l'une des deux fonctions du produit est dérivée et l'autre intégrée. On essaiera donc de prendre pour u des fonctions qui se simplifient en dérivant (par exemple $u(t) = t$, ou $u(t) = \ln(t)$), et pour v' des fonctions qui ne se compliquent pas trop quand on intègre (par exemple $v'(t) = e^t$).

Exemple : On peut calculer une primitive de la fonction \ln à l'aide d'une IPP. Prenons la primitive qui s'annule en 1, et qui est donc définie par $F(x) = \int_1^x \ln(t) dt$. Il n'y a pas de produit, ce qui peut sembler rédhibitoire pour une IPP. Ce n'est en fait pas un problème, on pose simplement $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$, ce qui donne $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v(t) = t$. On obtient alors $F(x) = [t \ln(t)]_1^x - \int_1^x \frac{t}{t} dt = x \ln(x) - (x - 1)$. On prend plus classiquement $x \mapsto x \ln(x) - x$ comme primitive de \ln (qui ne diffère de la précédente que d'une constante).

Exemple : On souhaite calculer $I = \int_0^1 x^2 e^x dx$. On fait une première IPP en posant $u(x) = x^2$, donc $u'(x) = 2x$, et $v'(x) = v(x) = e^x$, ce qui donne $I = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = e - 2 \int_0^1 x e^x dx$. On peut effectuer une deuxième IPP en posant cette fois-ci $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$, et toujours $v'(x) = v(x) = e^x$, ce qui donne $I = e - 2[x e^x]_0^1 + 2 \int_0^1 e^x dx = e - 2e + 2[e^x]_0^1 = e$.

2.2 Changement de variable

Théorème 4. Changement de variable.

Soit f une fonction continue sur le segment $[\varphi(a), \varphi(b)]$, où φ effectue une bijection de classe \mathcal{C}^1 de $[a, b]$ vers $[\varphi(a), \varphi(b)]$. Alors $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$.

Démonstration. C'est cette fois-ci une conséquence directe de la formule de dérivation d'une composée : $\varphi' \times f \circ \varphi$ a pour primitive $F \circ \varphi$ (où F est une primitive quelconque de f), donc $\int_a^b f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = [F \circ \varphi(u)]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$. \square

Remarque 10. En pratique on n'utilise pas vraiment la formule telle quelle. Si on dispose d'une intégrale $\int_a^b f(x) dx$ avec une fonction compliquée et qu'on souhaite remplacer une partie de la fonction par une nouvelle variable allégée, on « pose » $t = \varphi(x)$, et on effectue alors les modifications suivantes dans notre intégrale :

- on remplace les bornes a et b par $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
- on remplace dans l'intégrale $f(x)$ par $f \circ \varphi(t)$ (autrement dit, on remplace tous les x par des t).
- on modifie le dx en $\varphi'(t)dt$ (on écrira simplement $dx = \varphi'(t)dt$ même si c'est un abus de notation).

Ces modifications reviennent bien à appliquer la formule donnée dans le théorème.

Exemple : Un calcul extrêmement classique faisant intervenir un changement de variable, celui de $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$. On pose $x = \sin(t)$, ou si vous préférez $t = \arcsin(x)$. On remplace alors les bornes par $\arcsin(0) = 0$ et $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$; $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$ (car $\cos(t) \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$); et $dx = \cos(t) dt$. On obtient $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt$. On peut alors utiliser la formule de duplication $\cos(2t) = 2 \cos^2(t) - 1$ pour écrire $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$. Rien de surprenant dans ce résultat puisqu'on vient de calculer l'aire d'un quart de cercle de rayon 1.

Remarque 11. C'est à l'aide de la formule de changement de variable qu'on peut prouver de façon rigoureuse les résultats suivants, qui sont géométriquement évidents : si f est une fonction impaire,

$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ (en faisant le changement de variable $t = -x$, on constate que cette intégrale est égale à son propre opposé); et si f est une fonction paire, $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_{-a}^a f(x) dx$ (même technique).

2.3 Fractions rationnelles

Définition 9. Une **fraction rationnelle** est un quotient de polynômes.

Théorème 5. Décomposition en éléments simples.

Soit $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ une fraction rationnelle, et $Q(X) = \prod_{i=1}^k (X - a_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^p (X^2 + b_j X + c_j)^{\beta_j}$ la

décomposition en produit de polynômes irréductibles de Q (on peut toujours le supposer unitaire quitte à changer le coefficient dominant de P). Alors F peut se décomposer de manière unique sous

la forme $F(X) = R(X) + \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^{\alpha_i} \frac{\lambda_{i,l}}{(X - a_i)^{\alpha_i}} + \sum_{j=1}^p \sum_{m=1}^{\beta_j} \frac{\mu_{j,m} X + \nu_{j,m}}{(X^2 + b_j X + c_j)^{\beta_j}}$, où $R \in \mathbb{R}[X]$, et tous les coefficients $\lambda_{i,l}$, $\mu_{j,m}$ et $\nu_{j,m}$ sont des réels.

Démonstration. Ce théorème n'étant pas explicitement à votre programme, nous ne le démontrerons pas. Il faut en fait essayer de comprendre comment ça fonctionne, car vous êtes tout de même censés savoir faire des décomposition en éléments simples en pratique. Prenons le cas le plus simple où Q est un polynôme à racines simples, sans facteurs du second degré. Si on note a_1, a_2, \dots, a_n ses racines,

on peut alors simplement écrire $F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{X - a_i}$. Autrement dit, le produit qui était présent au dénominateur a été séparé en somme de dénominateurs distincts. Les choses se compliquent dans deux cas :

- Il y a une racine multiple. Dans ce cas, au lieu d'avoir une simple constante divisée par $(X - a_i)^2$ par exemple (dans le cas d'une racine double), on aura deux termes de la forme $\frac{\lambda_1}{X - a_i} + \frac{\lambda_2}{(X - a_i)^2}$. Pensez simplement que le fait d'avoir du degré 2 en bas impose la présence de deux constantes. Plus la multiplicité sera élevée, plus il y aura de termes dans la décomposition faisant intervenir la racine multiple.
- Si on travaille sur \mathbb{R} (ce qui sera toujours notre cas), il peut y avoir un facteur de degré 2 à discriminant négatif, qu'on ne peut pas factoriser plus. Pas grave, il comptera comme un terme normal, mais au lieu d'avoir une constante au numérateur, on aura un polynôme de degré 1 (c'est encore cohérent avec le fait qu'il faille deux constantes pour gérer un dénominateur de degré 2). Si jamais ce terme apparaît avec une multiplicité (combinaison des deux cas problématiques), on aura comme précédemment une paire de constantes à trouver pour chaque puissance jusqu'à celle correspondant à la multiplicité.

□

Techniques de calcul : Pour effectuer en pratique une décomposition en éléments simples, il est utile de connaître quelques petites techniques, qui évitent de recourir au calcul brutal consistant à mettre au même dénominateur tous les termes pour identifier.

- Dans le cas de dénominateurs de degré 1 (racines simples ou premier terme correspondant à une racine multiple) de la forme $X - a$, on peut multiplier les deux membres par $X - a$ puis évaluer l'égalité pour $X = a$. Par exemple, pour effectuer la décomposition de $F(X) = \frac{2X + 3}{X^2 - X - 2}$, on commence par factoriser le dénominateur sous la forme $(X + 1)(X - 2)$ (il y a une racine évidente). Le théorème de décomposition nous assure alors que $F(X) = \frac{a}{X + 1} + \frac{b}{X - 2}$.

Multiplions l'égalité par $X + 1$: cela donne $\frac{2X + 3}{X - 2} = a + \frac{b(X + 1)}{X - 2}$. En prenant $X = -1$, on trouve alors $-\frac{1}{3} = a$. De même, en multipliant l'égalité par $X - 2$ on trouve $\frac{2X + 3}{X + 1} = \frac{a(X - 2)}{X + 1} + b$, donc $b = \frac{7}{3}$ en prenant $X = 2$. Conclusion : $\frac{2X + 3}{X^2 - X - 2} = -\frac{5}{X + 1} + \frac{7}{3(X - 2)}$.

- S'il y a des termes de degré supérieur, on peut obtenir une équation sur les coefficients en évaluant l'égalité pour une valeur simple de X (souvent $X = 0$) sans multiplication préalable. On peut également obtenir une équation en regardant la limite ou un équivalent quand X tend vers $+\infty$, en multipliant au besoin par X ou X^2 pour faire apparaître des limites non nulles.

Prenons par exemple $F(X) = \frac{X^3}{(X - 1)^2(X - 2)^2}$. D'après le théorème, $F(X) = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{(X - 1)^2} + \frac{c}{X - 2} + \frac{d}{(X - 2)^2}$. Les coefficients b et d se calculent comme précédemment : $\frac{X^3}{(X - 2)^2} = a(X - 1) + b + \frac{c(X - 1)^2}{X - 2} + \frac{d(X - 1)^2}{(X - 2)^2}$ donne $1 = b$ pour $X = 1$; et $\frac{X^3}{(X - 1)^2} = \frac{a(X - 2)^2}{X - 1} + \frac{b(X - 2)^2}{(X - 1)^2} + c(X - 2) + d$ donne $d = 8$ pour $X = 2$. On obtient facilement une

relation entre a et c en posant $X = 0$: $0 = -a + b - \frac{c}{2} + \frac{d}{4}$, donc $-a + 1 - \frac{c}{2} + 2 = 0$, ou encore $c + 2a = 6$. Il nous faut une autre information, qu'on peut trouver en multipliant par X avant

de prendre la limite en $+\infty$: $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X^4}{(X - 1)^2(X - 2)^2} = 1$ (le dénominateur est équivalent à $X^2 \times X^2 = X^4$), et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{aX}{X - 1} + \frac{bX}{(X - 1)^2} + \frac{cX}{X - 2} + \frac{dX}{(X - 2)^2} = a + c$. On en déduit que $a + c = 1$, donc $c = 1 - a$. En reportant dans l'autre équation, $1 + a = 6$, donc $a = 5$ puis $c = -4$. Conclusion : $F(X) = \frac{5}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2} - \frac{4}{X - 2} + \frac{8}{(X - 2)^2}$.

- Un dernier exemple : $F(X) = \frac{1}{X^3 + 1}$. On commence toujours par factoriser le dénominateur $X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$, le deuxième facteur ayant un discriminant négatif, on ne peut pas aller plus loin. On va donc tenter de réduire F sous la forme $F(X) = \frac{a}{X + 1} + \frac{bX + c}{X^2 - X + 1}$. En multipliant par $X + 1$ et en évaluant en -1 , on trouve sans problème $a = \frac{1}{3}$. Pour le reste, il nous faut deux informations supplémentaires. On peut regarder en 0 pour trouver $1 = a + c$, soit $c = 1 - a = \frac{2}{3}$. Enfin, on peut multiplier par X et regarder la limite en $+\infty$, ce qui donne $0 = a + b$, soit $b = -a = -\frac{1}{3}$. Conclusion : $\frac{1}{X^3 + 1} = \frac{1}{3(X + 1)} - \frac{X - 2}{3(X^2 - X + 1)}$.

Intégration des éléments simples : C'est bien de savoir réduire en éléments simples, mais si le but est de calculer une intégrale, il faudra bien sûr ensuite être capable d'intégrer chacun de ces éléments « simples ». Les termes en $\frac{\lambda}{X - a}$ ne posent aucun problème, ayant une primitive en \ln . Les racines multiples ne posent pas plus de problème, on les intègre directement en tant que fonctions puissances.

Par contre, les termes d'ordre 2 (avec multiplicité ou non) sont plus compliqués. Le but est de se ramener à une fonction dont on connaît bien une primitive, à savoir $\frac{1}{1 + x^2}$. Pour cela, on essaie d'isoler un morceau qui s'intègre, puis pour le reste, on met le dénominateur sous forme canonique, puis on bidouille les constantes à coup de changements de variable. Reprenons notre exemple $\frac{1}{1 + x^3} = \frac{1}{3(x + 1)} - \frac{x - 2}{3(x^2 - x + 1)}$. Tentons de calculer l'intégrale I de 0 à 1 de cette fonction. Le premier

morceau ne pose pas de problème : $\int_0^1 \frac{1}{3(x+1)} dx = 3 \ln(2)$. Pour l'autre morceau, $\frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{\frac{1}{2}(2x-1) - \frac{3}{2}}{x^2-x+1}$, donc $\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{2} [\ln(x^2-x+1)]_0^1 - \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx = 0 - \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{4}{3} \times \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))^2 + 1} dx = -2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) \right]_0^1 = -\sqrt{3} \left(\arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \arctan \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$. On peut maintenant conclure le calcul : $I = 3 \ln(2) + \frac{1}{3} \times \frac{\pi\sqrt{3}}{3} = 3 \ln(2) + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

Enfin, pour les termes de degré 2 et d'ordre multiple, on procède par récurrence en intégrant par parties. Par exemple, $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ peut bien sûr se calculer directement : $I = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$, mais aussi par une IPP, en posant $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$, soit $u'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, et $v'(x) = 1$, donc $v(x) = x$, pour trouver $I = \left[\frac{x}{1+x^2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2} - 2 \times \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} + 2I - 2 \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$. On en déduit que $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}I = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$.

2.4 Règles de Bioche

Ces règles permettent de définir le changement de variable le plus efficace dans le cas d'une intégrale trigonométrique.

Définition 10. L'élément différentiel de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est la quantité $f(x)dx$. Lors d'un changement de variable $t = \varphi(x)$, cet élément différentiel est transformé en $f(\varphi(x))\varphi'(x)dt$.

Proposition 14. Soit $I = \int_a^b f(x) dx$ une intégrale faisant intervenir des fonctions trigonométriques. Les règles de Bioche préconisent les changements de variables suivants :

- si l'élément différentiel est invariant par le changement de variable $x \mapsto -x$, alors on pose $t = \cos(x)$.
- si l'élément différentiel est invariant par le changement de variable $x \mapsto \pi - x$, alors on pose $t = \sin(x)$.
- si l'élément différentiel est invariant par le changement de variable $x \mapsto \pi + x$, alors on pose $t = \tan(x)$.
- si aucun des trois cas précédents ne se réalise, on pose $t = \tan \left(\frac{x}{2} \right)$.

Remarque 12. Il est en fait assez facile de retenir les trois cas : la fonction \cos est invariante par le changement $x \mapsto -x$ puisqu'elle est paire, \sin est invariante par $x \mapsto \pi - x$ puisque $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ et \tan est invariante par $x \mapsto \pi + x$ puisqu'elle est π -périodique. Il faut surtout faire attention au fait que c'est bien l'élément différentiel qui doit être invariant et pas seulement la fonction f : ça ne change rien quand on fait $x \mapsto \pi + x$ mais dans les deux autres cas il y a un changement de signe.

Proposition 15. Soit x un réel qui n'est pas égal à π modulo 2π . En posant $t = \tan \left(\frac{x}{2} \right)$, on a les relations suivantes : $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$ quand cette valeur est définie. Par ailleurs, on aura $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$.

Démonstration. Ces relation expliquent l'intérêt du changement de variable $t = \tan \left(\frac{x}{2} \right)$: il transformera systématiquement les intégrales de fonctions trigonométriques en fractions rationnelles de la

variables t , qu'on sait théoriquement toujours intégrer. Pour les démontrer, il est plus simple de partir

du résultat : $\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}{1 + \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = \frac{2 \sin(\frac{x}{2}) \cos(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} = \sin(x)$ d'après la formule de duplication du

sinus. De même $\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{\sin^2(\frac{x}{2}) - \cos^2(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2}) + \cos^2(\frac{x}{2})} = \cos(x)$, cette fois-ci à l'aide d'une des formules que l'on connaît bien pour le cosinus de l'angle double. La dernière formule pour la tangente s'obtient bien sûr par un simple quotient. La formule pour dx est une simple application de la dérivation de la tangente : $dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right) dx = \frac{1+t^2}{2} dx$, ce qui correspond bien à ce qui était demandé. \square

Exemple : On souhaite calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 + \cos(x)} dx$. Si on tente d'appliquer les règles de Bioche, aucune ne fonctionne (les deux derniers changements de variables transforment le dénominateur en $2 - \cos(x)$, le premier ne le change pas mais change le signe du dx), on va donc poser $t = \tan \left(\frac{x}{2} \right)$ pour

obtenir $I = \int_0^1 \frac{1}{2 + \frac{2t}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2} dt$. Cette dernière intégrale se calcule à l'aide des

méthodes vues sur les fractions rationnelles : $I = \int_0^1 \frac{1}{(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(t + \frac{1}{2}))^2 + 1} dt =$

$$\left[\frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(t + \frac{1}{2} \right) \right) \right]_0^1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Remarque 13. Les règles de Bioche peuvent s'appliquer de la même manière aux fonctions faisant intervenir des cosinus et des sinus hyperboliques. On remplace sous l'intégrale les ch par des cos , les sh par des sin etc et on cherche un changement de variable laissant invariant l'élément différentiel. On pourra alors poser, dans les trois cas répertoriés plus haut, $t = \text{ch}(x)$, $t = \text{sh}(x)$ ou $t = \text{th}(x)$ (naturellement, pour le calcul explicite ensuite, on remet des fonctions hyperboliques partout et pas des cosinus et sinus ordinaires). En désespoir de cause, on pourra toujours poser $t = \text{th} \left(\frac{x}{2} \right)$.

2.5 Racines carrées

Ce paragraphe sera beaucoup plus court que les précédents, puisque dans le cas de racines carrées (ou autres puissances fractionnaires qu'on n'arrive pas à intégrer directement), on se contentera en général de tenter un changement de variables où on pose $t = \sqrt{g(x)}$, la fonction qui apparaît dans notre intégrale. S'il y a plusieurs racines dans l'intégrale, on effectue un changement de variable qui fasse disparaître toutes les racines.

Exemple : On cherche à calculer $I = \int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$. On pose $t = \sqrt[6]{x}$, de façon à avoir $\sqrt{x} = t^3$ et

$\sqrt[3]{x} = t^2$. Par ailleurs, $x = t^6$ implique $dx = 6t^5 dt$, donc $I = \int_1^2 \frac{6t^5}{t^3 + t^2} dt = \int_1^2 \frac{6t^3}{1+t} dt$. La division

euclidienne de $6t^3$ par $1+t$ donne $6t^3 = (1+t)(6t^2 - 6t + 6) - 6$, donc $I = 6 \int_1^2 t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t} dt =$

$$6 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln(1+t) \right]_1^2 = 6 \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{2} + 1 - \ln 3 + \ln 2 \right) = 6 \left(\frac{11}{6} + \ln \left(\frac{2}{3} \right) \right) = 11 + 6 \ln \left(\frac{2}{3} \right).$$

3 Calcul numérique d'intégrales

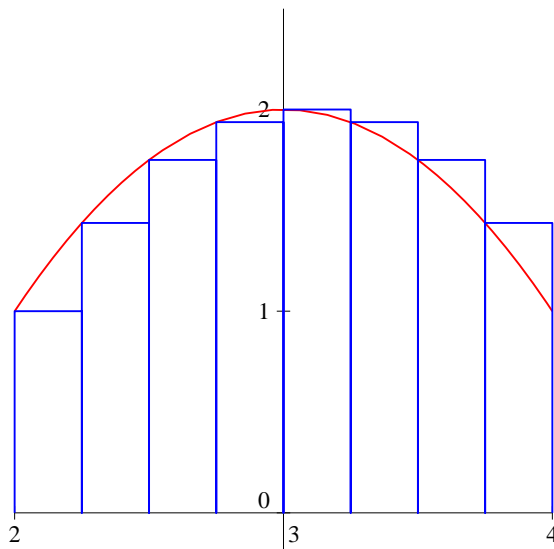
Dans les deux premières parties de ce chapitre, nous nous sommes uniquement intéressés au calcul exact d'intégrales, qui constituera de toute façon la totalité des questions que vous pourrez avoir sur le sujet à vos écrits de concours. Mais si vous demandez à votre calculatrice préférée (pour

Maple, c'est un peu plus compliqué, puisqu'il sait faire du calcul formel, donc par exemple du calcul de primitives) de vous donner la valeur d'une intégrale, elle va procéder de façon bien différente. Les méthodes d'intégration numérique ont pour but de créer des suites approchant la valeur d'une intégrale donnée, en maîtrisant l'erreur commise (si on ne connaît pas l'erreur, le calcul ne sert à rien), et de préférence avec le moins de calculs possibles. Nous allons en présenter trois, la première n'étant qu'une redite de choses vues dès la présentation de ce chapitre.

3.1 Méthode des rectangles

Principe : On approche la courbe par des rectangles de largeur constante (en nombre fixé à l'avance) et de hauteur égale à l'image d'un des réels de chaque intervalle. Ainsi, en prenant un entier naturel non nul n et en posant $h = \frac{b-a}{n}$, on peut par exemple effectuer l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), \text{ où } x_k \in \left[a + \frac{k(b-a)}{n}, a + \frac{(k+1)(b-a)}{n} \right]$$
 (en pratique on prend habituellement $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, soit la valeur à gauche de l'intervalle, ou $x_k = a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}$, soit la valeur à droite).



Définition 11. Une **somme de Riemann de pas h** pour la fonction f sur le segment $[a, b]$ est une somme de la forme $S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$, avec les mêmes notations que ci-dessus.

Remarque 14. On peut en fait définir des sommes de Riemann de pas non constant. Dans ce cas, la valeur du pas est le plus grand écart entre deux valeurs successives de la subdivision, comme pour les fonctions en escalier.

Théorème 6. Les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale de f : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_a^b f(x) dx$.

De plus, si la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[a, b]$, alors $|I - S_n(f)| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}$, où $M = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

Démonstration. Nous ne prouverons le théorème que dans le cas où la fonction est de classe \mathcal{C}^1 . Posons $a_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, et majorons l'erreur intervalle par intervalle : $\left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt - \frac{b-a}{n} f(x_k) \right| =$

$\left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x_k) dt \right| \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt$. Or, la fonction f ayant sa dérivée majorée en valeur absolue par M sur $[a_k, a_{k+1}]$, l'inégalité des accroissements finis nous assure que $\forall t \in [a_k, a_{k+1}], |f(t) - f(x_k)| \leq M|t - x_k| \leq M(t - a_k)$. On peut alors majorer notre erreur par $\int_{a_k}^{a_{k+1}} t - a_k dt = \left[\frac{t^2}{2} - a_k t \right]_{a_k}^{a_{k+1}} = \frac{a_{k+1}^2}{2} - a_k a_{k+1} - \frac{a_k^2}{2} + a_k^2 = \frac{a_{k+1}^2 - 2a_k a_{k+1} + a_k^2}{2} = \frac{(a_{k+1} - a_k)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2n^2}$. L'erreur maximale commise sur $[a_k, a_{k+1}]$ est donc de $\frac{M(b-a)^2}{2n^2}$, et l'erreur totale commise sur l'intervalle $[a, b]$ vaut au maximum n fois l'erreur précédente (puisque l'intervalle a été découpé en n morceaux), soit $\frac{M(b-a)^2}{2n}$. On a bien prouvé que $|I - S_n(f)| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}$, ce qui suffit à prouver la convergence de $S_n(f)$ vers I puisque notre majorant tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. \square

Remarque 15. Les sommes de Riemann seront très souvent utilisées avec $a = 0$ et $b = 1$, et des valeurs de x_k à gauche ou à droite pour chaque intervalle. On obtient alors la formulation simplifiée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Exemple : On utilise parfois les sommes de Riemann de façon pour trouver la limite de suites définies par des sommes, en utilisant leur convergence vers une intégrale qu'on sait calculer (c'est donc le processus complètement inverse de celui présenté dans cette partie de cours. Ainsi, si on pose

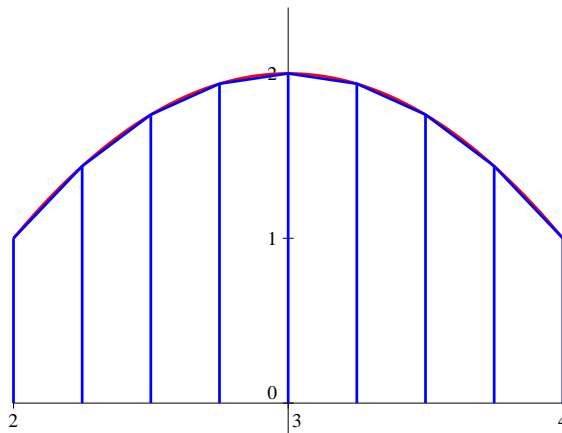
$$u_n = \sum_{k=1}^n k = 1^n \frac{n}{n^2 + k^2}, \text{ on peut écrire } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right), \text{ où } f : x \mapsto \frac{1}{1+x}.$$

D'après le théorème sur les sommes de Riemann, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$.

3.2 Méthode des trapèzes

Principe : Comme dans le cas de la méthode des rectangles, on découpe l'intervalle d'intégration en n segments de largeur $h = \frac{b-a}{n}$, mais sur chaque segment, on approche désormais l'intégrale par l'aire du trapèze passant par les deux points de la courbe d'abscisse a_k et a_{k+1} . Autrement dit, on effectue

$$\text{l'approximation } I \simeq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \right).$$



Remarque 16. La différence entre cette méthode et celle des trapèzes est extrêmement minime en termes de calculs, puisqu'il suffit de calculer $n + 1$ valeurs de la fonction f (au lieu de n) et calculer

une somme (là encore avec une seule addition supplémentaire). Pourtant, comme nous allons le voir, l'erreur commise est nettement plus faible.

Théorème 7. En notant T_n la valeur approchée de I obtenue à l'aide de la méthode des trapèzes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \int_a^b f(x) dx$. De plus, si f est de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$, alors $|I - T_n| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^3}$, où $M_2 = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$.

Démonstration. L'idée est la même que dans le cas de la méthode des trapèzes, mais on a besoin pour le calcul d'un équivalent de l'IAF faisant intervenir la dérivée seconde. Cet équivalent est donné par la formule de Taylor-Lagrange que nous verrons prochainement, elle permet de prouver que l'écart entre $f(x)$ et la valeur donnée par le trapèze est majoré par $(a_{k+1} - x)(x - a_k) \frac{M_2}{2}$ sur l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$.

Comme dans la démonstration précédente, il suffit alors de calculer $\int_{a_k}^{a_{k+1}} (a_{k+1} - t)(t - a_k) dt = \int_{a_k}^{a_{k+1}} -t^2 + a_k t + a_{k+1} t - a_k a_{k+1} dt = \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{a_k t^2}{2} + \frac{a_{k+1} t^2}{2} - a_k a_{k+1} t \right]_{a_k}^{a_{k+1}} = -\frac{a_{k+1}^3}{3} + \frac{a_k a_{k+1}^2}{2} + \frac{a_{k+1}^3}{2} - a_k a_{k+1}^2 + \frac{a_k^3}{3} - \frac{a_k^3}{2} - \frac{a_{k+1} a_k^2}{2} + a_k^2 a_{k+1} = \frac{a_{k+1}^3 - 3a_{k+1}^2 a_k + 3a_k^2 a_{k+1} - a_k^3}{6} = \frac{(a_{k+1} - a_k)^3}{6} = \frac{(b-a)^3}{6n^3}$. En découle une erreur sur $[a_k, a_{k+1}]$ inférieure à $\frac{M_2(b-a)^3}{12n^3}$. Comme précédemment, cette majoration sera multipliée par n pour obtenir l'erreur maximale sur l'intervalle $[a, b]$ tout entier, qui vaut donc $\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$. \square

3.3 Méthode de Simpson

Principe : La méthode des rectangles approchait la courbe par une constante sur chaque intervalle, la méthode des trapèzes par une fonction affine, l'étape logique suivante est d'approcher à l'aide d'un morceau de parabole, passant par les points d'abscisse a_k, a_{k+1} et $\frac{a_k + a_{k+1}}{2}$ (il faut trois points pour déterminer une parabole. Nous ne ferons pas les calculs, mais nous contenterons de donner la formule d'approximation donnée par la méthode de Simpson : $I \simeq \frac{b-a}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + 4f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) + f(a_{k+1})$. Cette méthode donne des valeurs approchées de I qui convergent encore plus rapidement que les deux méthodes précédentes. Pour s'en convaincre, un dernier petit calcul :

Proposition 16. Si f est une fonction polynômiale de degré 2, la méthode de Simpson donne une valeur exacte de l'intégrale de f (sans même avoir besoin de découper l'intervalle).

Démonstration. Contentons-nous de vérifier que cela fonctionne pour $f(x) = x^2$. Calculons donc $(b-a) \left(a^2 + b^2 + 4 \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \right) = (b-a)(a^2 + b^2 + a^2 + 2ab + b^2) = 2(b-a)(a^2 + b^2 + ab) = 2(ba^2 + b^3 + ab^2 - a^3 - ab^2 - a^2b) = 2(b^3 - a^3)$. Cette valeur est bien égale à $6 \int_a^b x^2 dx = 6 \times \frac{b^3 - a^3}{3}$. \square