Géométrie dans l'espace

PTSI B Lycée Eiffel

13 novembre 2012

Rien n'est plus facile à apprendre que la géométrie pour peu qu'on en ait besoin.

Sacha Guitry

Dans l'espace, personne ne vous entendra crier.

Tagline du film **Alien, le huitième passager**.

Introduction

Nous continuons dans ce chapitre notre étude des techniques de base en géométrie, mais cette fois-ci dans l'espace. Rien ne change très profondément par rapport à ce que nous avons vu dans le plan, il y a simplement une coordonnée de plus ...

Objectifs du chapitre :

- maîtrise des calculs géométriques dans l'espace, notamment de produit vectoriel et produit mixte
- capacité à calculer des équations d'objets simples

1 Repérage dans l'espace

Puisque ça fonctionne exactement de la même façon que dans le plan, nous ne reprendront pas toute la présentation sur les vecteurs faites dans notre premier chapitre de géométrie. Les opérations sont de toute façon les mêmes, et la structure d'espace vectorielle est également présente.

1.1 Repérage cartésien

Définition 1. Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace sont **coplanaires** s'il existe un triplet $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ de réels tels que $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

Remarque 1. Si l'un des trois coefficients, par exemple a, est nul, cela signifie que deux des vecteurs (ici $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$) sont colinéaires. Dans le cas général, $\overrightarrow{w}$ peut s'écrire comme combinaison des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, ce qui signifie bien intuitivement qu'il se situe « dans le plan » défini par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Définition 2. Une **base** de l'espace est la donnée d'un triplet de vecteurs $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ non coplanaires. Un **repère** du plan est la donnée d'un quadruplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, où O est un point de l'espace et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ forment une base de l'espace. Le point O est alors appelé **origine** du repère, et les droites passant par O et dirigées par les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ **axes** du repère, usuellement notés (Ox), (Oy) et (Oz).

Théorème 1. Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base. Tout vecteur de l'espace peut s'écrire de façon unique sous la forme $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, où x, y et z sont trois réels appelés **coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Dans l'espace, la troisième coordonnée z est appelée **cote** du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Définition 3. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère, et M un point de l'espace. Les **coordonnées** du point M sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On notera ces coordonnées sous la forme $M(x; y; z)$.

Remarque 2. On peut donc identifier, de façon similaire à ce qu'on a vu dans le plan, l'ensemble des vecteurs (ou des points) de l'espace à l'ensemble $\mathbb{R}^3$ des triplets de nombres réels.

Définition 4. Une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ (et les repères correspondants) est **orthogonale** si les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont orthogonaux deux à deux. Elle est **orthonormale** si de plus $\| \overrightarrow{i} \| = \| \overrightarrow{j} \| = \| \overrightarrow{k} \| = 1$.

Définition 5. Une base orthogonale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de l'espace est **directe** si elle vérifie la régle dite « du petit bonhomme » : en dessinant sur la base un petit bonhomme dont les pieds sont placés sur les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, et la tête sur le vecteur $\overrightarrow{k}$, le petit bonhomme doit avoir le pied droit sur $\overrightarrow{i}$ et le pied gauche sur $\overrightarrow{j}$.

Remarque 3. Il faut bien avoir conscience qu'on ne peut pas définir de sens direct pour les plans dans l'espace. Par exemple, si on considère une base directe, si on regarder le plan engendré par $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ « du dessus » (du côté où les cotes sont positives), la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de ce plan parait directe. Mais vue « du dessous », elle semble indirecte.

Pour toute la suite du chapitre, on fixe une bonne fois pour toutes une base orthonormale de l'espace $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Cette hypothèse ne sera pas rappelée dans tous les énoncés, qui pour certains seraient faux dans une base quelconque.

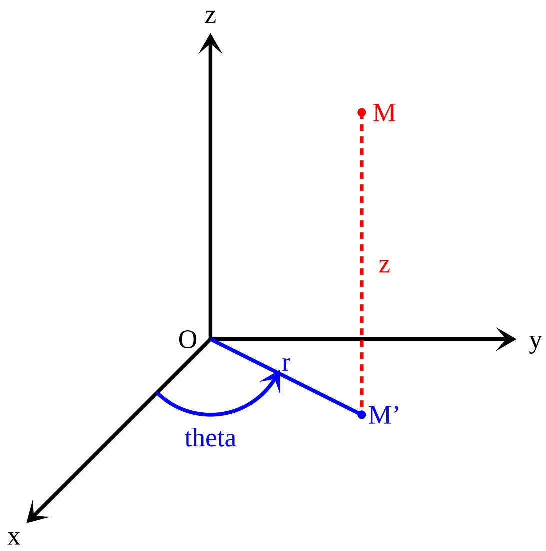
Proposition 1. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées (x, y, z) dans une base orthonormale, alors $\| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Par conséquent, la distance entre deux points A et B est donnée par la formule $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

1.2 Repérage cylindrique

La repérage cylindrique consiste tout simplement à remplacer les deux premières coordonnées cartésiennes x et y par des coordonnées polaires dans le plan engendré par $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, sans toucher à la troisième coordonnée z.

Définition 6. Un point de l'espace M admet pour **coordonnées cylindriques** le triplet (ρ, θ, z) si $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u}_\theta + z\overrightarrow{k}$, où $\overrightarrow{u}_\theta = \cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}$.

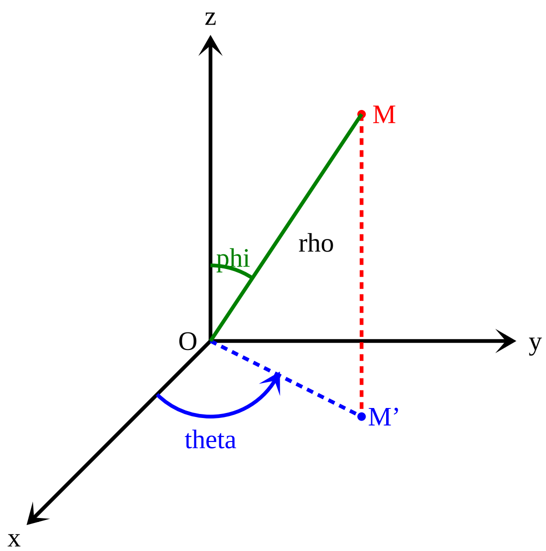
Remarque 4. Les coordonnées cylindriques ne sont pas uniques, tout comme les coordonnées polaires dans le plan. Attention au fait qu'ici, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ne correspond pas à la distance du point M à l'origine du repère, mais à la distance OM', où M' est le projeté orthogonal du point M sur le plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.



1.3 Repérage sphérique

Ce dernier repérage utilise désormais une seule distance et deux angles, c'est en fait le repère qu'on utilise régulièrement pour les points situés sur le gloterrestre (où la distance au centre de la Terre, constante, n'est pas précisée) quand on donne la latitude et la longitude d'un point. La convention utilisée ici est légèrement différente.

Définition 7. Un point de l'espace M admet pour **coordonnées sphériques** le triplet (r, θ, φ) si $\overrightarrow{OM} = r\sin(\varphi)\cos(\theta)\overrightarrow{i} + r\sin(\varphi)\sin(\theta)\overrightarrow{j} + r\cos(\varphi)\overrightarrow{k}$. L'angle θ est appelé **longitude** et l'angle φ **colatitude** du point M. Le réel r représente simplement la distance OM.



Remarque 5. Vu la définition donnée, on a manifestement $x = r\sin(\varphi)\cos(\theta)$, $y = r\sin(\varphi)\sin(\theta)$ et $z = r\cos(\varphi)$.

Exemple : Il n'est en général pas aisé de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphérique,s car il faut avoir deux angles remarquables à reconnaitre pour obtenir une expression simple. Il est toutefois bon de connaitre la méthode : on commence par factoriser par r en laissant les deux premières coordonnées groupées, on fait apparaitre l'angle φ, puis on factorise à nouveau les deux premières coordonnées pour reconnaitre l'angle θ. Tentons le coup avec le point $M : (1, 1, \sqrt{2})$, on peut écrire $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \sqrt{2}\overrightarrow{k}$, avec $OM = \sqrt{1+1+2} = 2$. On factorise donc par 2, ce qui permet de reconnaitre sur la dernière coordonnée $\varphi = \frac{\pi}{4}$: $\overrightarrow{OM} = 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{k} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{j}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{k}$. On reconnait à nouveau un angle de $\frac{\pi}{4}$ pour θ, et on peut donc conclure qu'un triplet de coordonnées sphériques de M est $\left(2; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

2 Produit scalaire ; produit vectoriel ; produit mixte

2.1 Produit scalaire

Définition 8. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace, le **produit scalaire** de ces deux vecteurs, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, est le réel $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$. Si l'un des deux vecteurs est nul, le produit scalaire est nul.

Remarque 6. Cette définition est rigoureusement identique à celle vue dans le plan, puisqu'on calcule de fait ce produit scalaire dans le plan engendré par les deux vecteurs. Tout ce qu'on a pu voir sur le produit scalaire dans le plan va donc rester vrai dans l'espace.

Proposition 2. Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Proposition 3. Propriétés du produit scalaire
Le produit scalaire est :
- bilinéaire : $\overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ et $(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \mu\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$.
- symétrique : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$.
- défini positif : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} \geqslant 0$, et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Proposition 4. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans une base orthonormale, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.

Démonstration. On va effectuer une preuve très différente de celle vue dans le plan, en utilisant la bilinéarité du produit scalaire et le fait que la base dans laquelle on travaille est orthonormale. On peut écrire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = (x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}).(x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j} + z'\overrightarrow{k})$, ce qui vaut en développant tout par la bilinéarité $xx'\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i} + xy'\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} + xz'\overrightarrow{i}.\overrightarrow{k} + yx'\overrightarrow{j}.\overrightarrow{i} + yy'\overrightarrow{j}.\overrightarrow{j} + yz'\overrightarrow{j}.\overrightarrow{k} + zx'\overrightarrow{k}.\overrightarrow{i} + zy'\overrightarrow{k}.\overrightarrow{j} + zz'\overrightarrow{k}.\overrightarrow{k}$. La base étant orthonormale, $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i} = \| \overrightarrow{i} \| = 1$ (et de même pour les deux autres vecteurs), et $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} = 0$ (de même pour les autres produits scalaires), il ne reste que $xx' + yy' + zz'$ comme annoncé. □

2.2 Produit vectoriel

Remarque 7. Il n'est pas possible de définir un déterminant de deux vecteurs dans l'espace de la même façon qu'on le fait dans le plan, car cette définition faisait apparaitre un sinus, dont le signe dépend de l'orientation de l'angle entre les vecteurs. Or, comme on l'a vu, l'orientation des plans dans l'espace n'est pas possible. L'outil qui remplace en quelque sorte le déterminant est le produit vectoriel.

Définition 9. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Le **produit vectoriel** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{w}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, tel que la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ soit une base directe, et vérifiant $\| \overrightarrow{w} \| = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times \sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$, où l'angle dont on prend le sinus est l'angle géométrique entre les deux vecteurs (pour ne pas avoir de problème de signe). On note $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, on pose $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Proposition 5. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.

Démonstration. C'est une conséquence évidente de la définition choisie. □

Proposition 6. Propriétés du produit vectoriel.
Le produit vectoriel est :

- bilinéaire : $\overrightarrow{u} \wedge (\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$ et $(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} + \mu\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$.
- antisymétrique : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$.

Démonstration. L'antisymétrie est assez facile : si on échange le rôle de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on ne change pas la norme ni la direction de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, mais on modifie son sens pour que la base reste directe. La bilinéarité est un peu technique à démontrer dans l'espace, nous admettrons ce résultat. □

Proposition 7. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont pour coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans un repère orthonormal direct, alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')$.

Démonstration. En admettant la bilinéarité du produit vectoriel, on peut effectuer une démonstration similaire à celle du produit scalaire. Il suffit de calculer les produits vectoriels des vecteurs de la base : $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$; pour les autres, les normes seront toujours égales à 1, et la direction sera toujours celle du troisième vecteur de la base (qui est orthogonal aux deux autres), il suffit donc de faire attention au sens pour que la base soit directe. On obtient $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$ mais $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k}$ etc, ce qui donne bien la formule donnée en développant brutalement. □

Remarque 8. Les formules des coordonnées sont en fait des formules de déterminant où on « oublie » dans le deux vecteurs la coordonnée qu'on est en train de calculer pour le produit vectoriel. Attention tout de même au changement de signe très piégeux pour la deuxième coordonnée !

Exemple : On peut toujours calculer des aires de triangle à l'aide du produit vectoriel. Par exemple, prenons $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 1, -1)$ et $C(0, 2, 4)$. On calcule par exemple $\overrightarrow{AB}(-2, -1, -4)$ et $\overrightarrow{AC}(-1, 0, 1)$, puis $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-1, -6, -1)$. Il ne reste plus qu'à calculer $\frac{1}{2} \parallel \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \parallel = \frac{\sqrt{1+36+1}}{2} = \sqrt{\frac{19}{2}}$.

2.3 Produit mixte

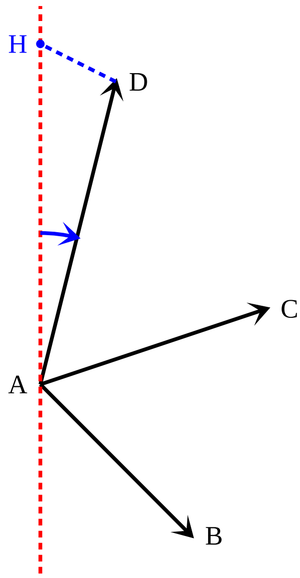
Définition 10. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace, leur **produit mixte** (aussi appelé comme dans le plan **déterminant**) est le nombre réel $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$. On le note $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$, ou encore $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, ou même $|\overrightarrow{u} \quad \overrightarrow{v} \quad \overrightarrow{w}|$.

Proposition 8. Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$.

Démonstration. En effet, le produit mixte est nul si et seulement si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{w}$. cela se produit (outre les cas particuliers évidents de colinéarité) si et seulement si $\overrightarrow{w}$ est situé dans le plan engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. □

Proposition 9. On retrouve ici une interprétation géométrique du produit mixte : il représente (au signe près) le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

Démonstration. Notons A, B, C et D quatre points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$. D'après les propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel, $|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]| = \parallel \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \parallel \times \parallel \overrightarrow{w} \parallel \cos(\widehat{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}})$. La première norme représente l'aire du parallélogramme construit sur les points A, B et C, notons-la $\mathcal{A}$. Le volume recherché vaut $\mathcal{A} \times AH$, où H est le projeté orthogonal de D sur la droite passant par A et perpendiculaire au plan contenant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (AH représente une hauteur du parallélépipède). Or, cette droite est la même que celle dirigeant le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, donc $AH = \parallel \overrightarrow{W} \parallel \cos(\widehat{\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}})$, ce qui prouve la formule. Dans la figure qui suit, l'angle dont le cosinus apparait dans le formule est indiqué en bleu : □



Proposition 10. Propriétés du produit mixte
Le produit mixte est :

- trilinéaire : $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{w} + \mu\overrightarrow{t}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + \mu[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{t}]$; $[\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{t}] + \mu[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}]$ et $[\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}] + \mu[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{t}]$.
- alterné : si deux des trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont égaux, alors $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$

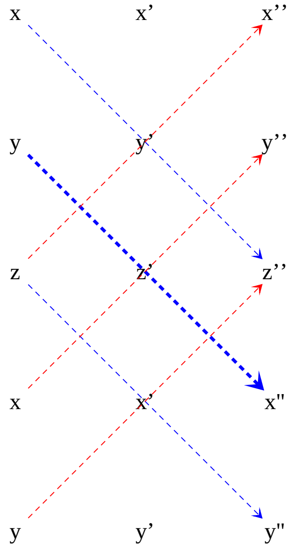
Démonstration. Prouvons la première formule à l'aide des propriétés déjà établies des produit scalaire et vectoriel : $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{w} + \mu\overrightarrow{t}] = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).(\lambda\overrightarrow{w} + \overrightarrow{t}) = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} + \mu(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{t}$ par biliéarité du produit scalaire, ce qui donne la formule attendue. les deux autres ne sont pas plus compliquées. Pour le caractère alternée, si ce sont $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ qui sont égaux, leur produit vectoriel est nul, donc le produit mixte par n'importe quel vecteur $\overrightarrow{w}$ aussi. Si $\overrightarrow{w}$ est égal à $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$, il est orthogonal à $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, donc le produit mixte est également nul. □

Remarque 9. On peut prouver à partir du caractère alterné que le produit mixte est antisymétrique, c'est-à-dire qu'il change de signe si on échange deux des vecteurs. En effet, on a par exemple $[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = 0$ par alternance, mais également par trilinéarité $[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$. les deux termes extrêmes étant nuls, toujours par alternance, les deux autres sont opposés, ce qui prouve la propriété annoncée.

Proposition 11. Si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ont pour coordonnées respectives (x, y, z), (x', y', z') et (x'', y'', z'') dans un repère orthonormal direct, alors $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = x'' \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} - y'' \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} + z'' \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy'z'' - xz'y'' + yz'x'' - yx'z'' + zx'y'' - zy'x''$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des expressions dans une base orthonormale directe du produit scalaire et du produit vectoriel. □

Méthode : Pour calculer un peu plus rapidement les produits mixtes (et ne pas se tromper dans les signes), on peut appliquer la règle de Sarrus. On écrit le diagramme suivant :



On additionne les trois produits obtenus les long des diagonales descendantes, et on soustrait les trois produits obtenus le long des diagonales ascendantes.

Exemple : On peut très bien calculer des produits mixtes (on les appelle plutôt déterminants dans ce cas) indépendemment de toute interprétation géométrique : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 - 4 + 2 \times 5 = 13.$

3 Plans, droites et sphères

3.1 Équations de plans

Proposition 12. Équations cartésiennes de plans
Une équation du type $ax + by + cz + d = 0$, où a, b, c et d sont trois réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, est l'équation cartésienne d'une plan. Réciproquement, tout plan admet une équation de cette forme.

Remarque 10. Comme dans le cas des équations de droite dans le plan, l'équation n'est pas unique puisqu'on peut multiplier toute l'équation par une même constante pour décrire le même plan.

Exemple : Un plan $\mathcal{P}$ est en général défini par trois points distincts A, B et C. Pour en obtenir une équation, le plus simple est de passer par la condition suivante : $M \in \mathcal{P}$ si $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}] = 0$, ou alternativement si $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AM} = 0$. Prenons les points $A(2, 0, 0)$, $B(1, -1, 1)$ et $C(0, 2, 3)$, alors $\overrightarrow{AB}(-1, -1, 1)$ et $\overrightarrow{AC}(-2, 2, 3)$, donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-5, 1, -4)$. Un point $M(x, y, z)$ appartient donc au plan (ABC) si $-5(x - x_A) + (y - y_A) - 4(z - z_A) = 0$, soit $-5x + y - 4z + 10 = 0$.

Définition 11. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ forment une base du plan $\mathbb{P}$ s'ils ne sont pas colinéaires et qu'on peut trouver trois points A, B et C dans le plan $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal aux deux vecteurs d'une base de $\mathcal{P}$.

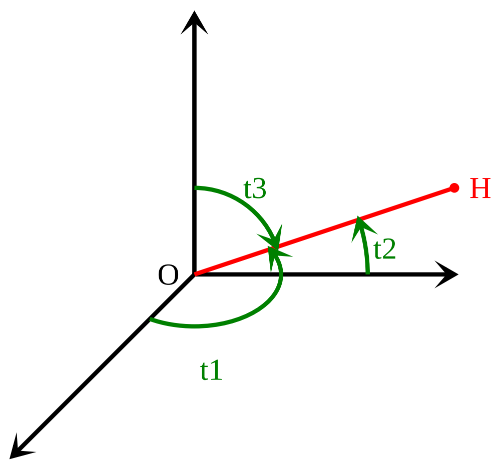
Proposition 13. Le vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$ est unique à un facteur (non nul) près. Un plan ayant pour base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. Le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ pour vecteur normal.

Démonstration. L'unicité du vecteur normal est due au fait que dans l'espace, toutes les droites perpendiculaires à un plan sont parallèles entre elles. Le fait que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ soit un vecteur normal découle des propriétés du produit vectoriel (il est à la fois orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$). Enfin, si $\overrightarrow{P}$ a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, tous les vecteurs $\overrightarrow{u(\alpha, \beta, \gamma)}$ de $\overrightarrow{P}$ vérifient l'équation $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ (en effet, si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, avec A et B appartenant à $\overrightarrow{P}$, on a $ax_A + by_A + cz_A = ax_B + by_B + cz_B = -d$, donc $a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) + c(z_B - z_A) = 0$). Leur produit scalaire avec le vecteur de coordonnées (a, b, c) est donc nul. □

Remarque 11. Le plan passant par le point A et admettant pour vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ a pour équation $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$.

Proposition 14. Tout plan $\mathcal{P}$ admet une équation de la forme $x\cos(\theta_1) + y\cos(\theta_2) + z\cos(\theta_3) = p$, où p représente la distance du point O au plan $\mathcal{P}$, et θ_1, θ_2 et θ_3 les trois angles entres les vecteurs de base $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ et le vecteur $\overrightarrow{OH}$, H étant le projeté orthogonal de O sur le plan $\mathcal{P}$.

Démonstration. Le plan $\mathcal{P}$ peut être décrit comme le plan passant par H et de vecteur normal unitaire $\dfrac{\overrightarrow{OH}}{OH}$. Ce vecteur ayant pour norme 1, a simplement pour coordonnées $(\cos(\theta_1), \cos(\theta_2), \cos(\theta_3))$, donc l'équation du plan sera de la forme $\cos(\theta_1)x + \cos(theta_2)y + \cos(\theta_3)z + d = 0$. Par ailleurs, puisque $\overrightarrow{OH} = OH \times \dfrac{\overrightarrow{OH}}{OH}$, le point H a pour coordonnées $(p\cos(\theta_1), p\cos(\theta_2), p\cos(\theta_3))$, et appartient donc au plan à condition que $p(\cos^2(\theta_1) + \cos^2(\theta_2) + \cos^2(\theta_3)) + d = 0$, soit $p + d = 0$ (la somme des trois carrés de cosinus représente le carré de la norme du vecteur unitaire, donc est égale à 1), donc $d = -p$, et on trouve l'équation souhaitée. □



Sur cette figure, les trois angles sont notés t_i au lieu de θ_i.

Remarque 12. Pour passer d'une équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ à une équation normale, il suffit donc de diviser tous les coefficients par $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Définition 12. Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont **parallèles** s'ils admettent des vecteurs normaux colinéaires. Ils sont **perpendiculaires** s'ils admettent des vecteurs normaux orthogonaux.

Remarque 13. Attention, deux droites contenues dans des plans perpendiculaires ne sont pas nécessairement perpendiculaires (elles peuvent être parallèles), et deux droites incluses dans des plans parallèles ne sont pas forcément parallèles (elles peuvent être orthogonales).

Proposition 15. Si $\mathcal{P}$ a pour équation $ax+by+cz+d=0$, et $\mathcal{Q}$ a pour équation $a'x+b'y+c'z+d'=0$, alors

- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont perpendiculaires si $aa'+bb'+cc'=0$.
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles si $(a,b,c)\wedge(a',b',c')=\overrightarrow{0}$.

Définition 13. Le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(x_A,y_A,z_A)$ et de base $\overrightarrow{u}(a,b,c)$, $\overrightarrow{v}(a',b',c')$ peut être décrit par le **système d'équations paramétriques** $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A+at+a't' \\ y & = & y_A+bt+b't' \\ z & = & z_A+ct+c't' \end{array}\right.$, où $(t,t')\in\mathbb{R}^2$.

Démonstration. En effet, un point $M(x,y,z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est coplanaire avec $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, ce qu'on peut traduire par l'existence de deux réels t et t' pour lequels $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{u}+t'\overrightarrow{v}$, ce qui donne ces équations. □

Exemple : On considère le plan passant par $A(-1,-1,-1)$, et admettant pour base $(\overrightarrow{u}(1,2,3);\overrightarrow{v}(-2,0,1))$. Ce plan a une représentation paramétrique sous la forme $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1+t-2t' \\ y & = & -1+2t \\ z & = & -1+3t+y' \end{array}\right.$.

Pour déterminer si le point $B(3,3,4)$ appartient appartient au plan, on cherche si le système $\left\{\begin{array}{lcl} 3 & = & -1+t-2t' \\ 3 & = & -1+2t \\ 4 & = & -1+3t+t' \end{array}\right.$ (système de trois équations à deux inconnues) admet ou non une solution.
Ici, la deuxième équation donne immédiatement $t=2$, ce qui donne dans les deux autres $3=1-2t'$ et $4=5+t'$, soit dans les deux cas $t'=-1$. Le système admet donc une (unique) solution, ce qui prouve que B appartient au plan et accessoirement que $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$.

Proposition 16. Distance d'un point à une plan.
Soit $M(x_M,y_M,z_M)$ un point de l'espace, et $\mathcal{P}$ un plan. La distance de M à $\mathcal{P}$ peut être donnée par une des quatre formules suivantes :

- Si $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est une base de $\mathcal{P}$, alors $d(M,\mathcal{P})=\dfrac{|\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})|}{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|}$.
- Si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, alors $d(M,\mathcal{P})=\dfrac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$.
- Si $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, alors $d(M,\mathcal{P})=\dfrac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
- Si $\mathcal{P}$ a pour équation normale $x\cos(\theta_1)+y\cos(\theta_2)+z\cos(\theta_3)=p$, alors $d(M,\mathcal{P})=|x_M\cos(\theta_1)+y_M\cos(\theta_2)+z_M\cos(\theta_3)-p|$.

3.2 Droites dans l'espace

Proposition 17. Deux plans non parallèles de vecteur normaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ont une intersection qui est une droite dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{n'}$.

Démonstration. En effet, la droite d'intersection doit être à la fois orthogonale à $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$, ce qui est le cas du vecteur $\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{n'}$. □

Proposition 18. Toute droite de l'espace peut être décrite par un système d'équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{ccccccccc} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ a'x & + & b'y & + & c'z & + & d' & = & 0 \end{array}\right.$, où (a,b,c) et (a',b',c') sont des triplets de réels non tous nuls et non proportionnels.

Démonstration. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de la droite (d) et A un point de (d). Choisissons un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$. La droite (d) peut alors être décrite comme l'intersection des deux plans contenant le point A et de bases respectives $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{n})$ et $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{u})$. Ces deux plans ont, comme tous les plans de l'espace, des équations du type donné dans l'énoncé de la propriété, et admettent respectivement pour vecteur normal $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{n}$, et $\overrightarrow{n}$. Ces deux vecteurs normaux étant non colinéaires (ils sont même orthogonaux), les triplets (a, b, c) et (a', b', c') sont non proportionnels. □

Remarque 14. En notant $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ et $\overrightarrow{n'}(a', b', c')$, la droite (d) sera dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n'}$.

Exemple : Soit (d) la droite passant par le point $A(2, 0, -1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-1, 1, 1)$. Une façon d'obtenir une équation cartésienne de la droite est de dire que $M(x, y, z)$ appartient à (d) si $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, soit $(x-2, y, z+1) \wedge (-1, 1, 1) = (0, 0, 0)$ ce qui donne le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} & & y & - & z & - & 1 & = & 0 \\ -x & & & - & z & + & 1 & = & 0 \\ x & + & y & & & - & 2 & = & 0 \end{array} \right.$. Il y a une équation « de trop » dans le système, mais on constate qu'en soustrayant les deux premières équations, on retombe sur la troisième, qui est donc superflue. On peut en fait garder deux quelconques des trois équations pour obtenir une équation de (d).

Proposition 19. La droite (d) passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ peut être décrite par le système d'équations paramétriques $\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & = & x_A & + & \alpha t \\ y & = & y_A & + & \beta t \\ z & = & z_A & + & \gamma t \end{array} \right.$, où $t \in \mathbb{R}$.

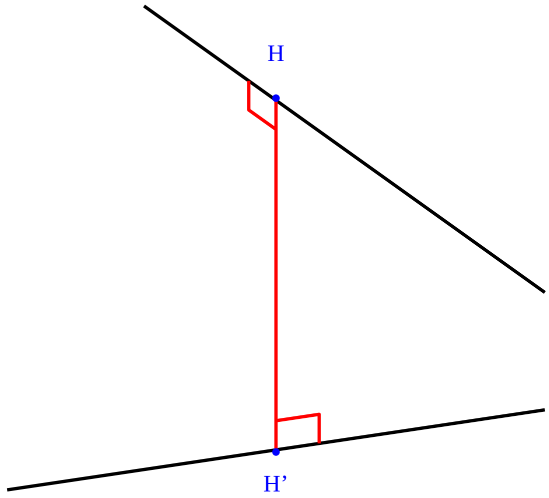
Proposition 20. La distance d'un point M à la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est donnée par la formule $d(M, d) = \dfrac{\| \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} \|}{\| \overrightarrow{u} \|}$.

Proposition 21. Soient (d) et (d') deux droites de l'espace non parallèles, de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$. Il existe une unique droite (Δ) perpendiculaire simultanément aux droites (d) et (d'). Cette droite est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}$.

Démonstration. Commençons par prouver l'existence. Pour cela, on note $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, et A, A' deux points quelconques situés respectivement sur (d) et sur (d'). Notons alors $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, et $\mathcal{P}'$ le plan passant par A' de base $(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v})$. Ces deux plans ne peuvent pas être parallèles : s'ils admettaient un même vecteur normal, celui-ci serait orthogonal à la fois à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{u'}$, donc serait colinéaire à $\overrightarrow{v}$, et ne pourrait donc lui être en même temps orthogonal. Leur intersection est donc une droite (Δ), qui est par construction dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}$ puisque celui-ci est commun aux deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Cette direction étant orthogonale à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$, (Δ) est orthogonale à (d) et à (d'). Comme par ailleurs (Δ) et (d) sont coplanaires (dans $\mathcal{P}$), elles sont perpendiculaires. De même pour (Δ) et (d').
Passons à l'unicité : si une droite est à la fois perpendiculaire à (d) et (d'), elle est nécessairement dirigée par un vecteur à la fois orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$, donc $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur convenable. Par ailleurs, elle doit être sécante à la droite (d), donc notre droite appartient au plan $\mathcal{P}$ (elle contient un point du plan et est dirigée par un vecteur de base du plan). De même, elle appartient à $\mathcal{P}'$. Conclusion : il ne peut s'agir que de la droite (Δ). □

Remarque 15. Cette démonstration constitue en fait une méthode pour déterminer la perpendiculaire commune à deux droites : on détermine $\overrightarrow{v}$, puis les équations des deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, et on obtient ainsi l'équation de leur intersection.

Proposition 22. Soient (d) et (d') deux droites non parallèles, passant respectivement par les points A et A', et de vecteur directeur respectif $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$. La distance entre (d) et (d') est donnée par la formule $d(d, d') = \dfrac{|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{AA'}]|}{\| u \wedge \overrightarrow{u'} \|}$



Démonstration. Notons (Δ) la perpendiculaire commune aux deux droites, et H et H' les intersection respectives de (Δ) avec (d) et (d'). La distance recherchée est la distance HH' (si ça ne vous semble pas clair, réfléchissez un peu plus). Or, $|[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{AA'}]| = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}).(\overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}).(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'A'})$. Or, le vecteur $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'})$ est orthogonal à (d) et à (d'), donc son produit scalaire avec $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{H'A'}$ est nul. Ne reste plus que $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}).\overrightarrow{HH'} = \| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'} \| \times HH'$ (cette fois-ci, les vecteurs sont colinéaires, puisqu'on sait que Δ est dirigée par $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'})$). La formule en découle. □

3.3 Équations de sphères

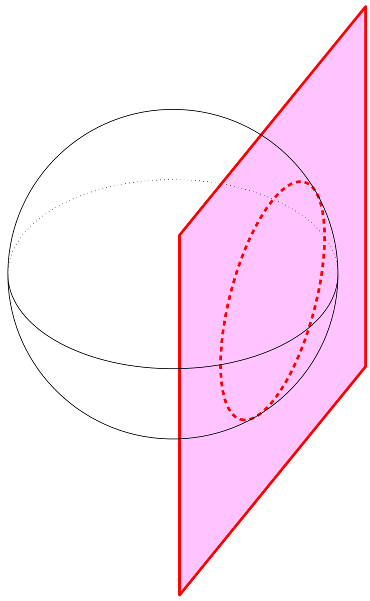
Définition 14. Équation cartésienne de sphère.
Dans un repère orthonormal, la sphère de centre $A(a, b, c)$ et de rayon R admet pour **équation cartésienne** $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Réciproquement, toute équation de la forme $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz - d = 0$ avec $a^2 + b^2 + c^2 + d \geqslant 0$ est une équation de cercle de centre $A(a, b)$ et de rayon $R = \sqrt{d + a^2 + b^2 + c^2}$.

Exemple : L'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 4 = 0$ peut se factoriser sous la forme $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$, on reconnait la sphère de centre $A(2, 0, -1)$ et de rayon 3.

Proposition 23. La sphère de diamètre $[AB]$ admet pour équation $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$

Démonstration. Un point M appartient à cette sphère si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$, la démonstration est la même que pour le cercle dans le plan. □

Proposition 24. Soit $(\mathcal{S})$ une sphère de centre A et de rayon R et $\mathcal{P}$ un plan. Alors :
- si $d(A, \mathcal{P}) > R$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ ne se coupent pas.
- si $d(A, \mathcal{P}) = R$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ se coupent en un point unique, le plan $\mathcal{P}$ est **tangent** à la sphère $\mathcal{S}$.
- si $d(A, \mathcal{P}) < R$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ ont une intersection qui est un cercle dont le centre est le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$.



Remarque 16. Comme on ne sait pas décrire facilement un cercle dans l'espace, tout cela reste assez théorique.

Proposition 25. Soit $(\mathcal{S})$ une sphère de centre A et de rayon R et (d) une droite de l'espace. Alors :

- si $d(A,d) > R$, $\mathcal{S}$ et (d) ne se coupent pas.
- si $d(A,d) = R$, $\mathcal{S}$ et (d) se coupent en un point unique, on dit que la droite (d) est **tangente** à la sphère $\mathcal{S}$.
- si $d(A,d) < R$, $\mathcal{S}$ et (d) ont deux points d'intersection distincts.

Exemple : Si on souhaite déterminer les points d'intersection de la sphère décrite ci-dessus (équation $x^2+y^2+z^2-4x+2z-4=0$) avec la droite d'équation cartésienne $\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & 2 & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & + & 4 & = & 0 \end{array}\right.$, on peut exprimer à l'aide de l'équation de la droite les deux variables y et z en fonction de x (ici, c'est le plus facile, en général, il faut ne garder qu'une variable sur les trois) : en additionnant les deux équations, $4x + 2z + 6 = 0$, donc $z = -3 - 2x$; en les soustrayant $2x - 2y + 2 = 0$, donc $y = x + 1$. Il ne reste plus qu'à remplacer dans l'équation de la sphère pour obtenir une équation du second degré vérifiée par x : $x^2 + (x+1)^2 + (-3-2x)^2 - 4x - 6 - 4x - 4 = 0$, soit $6x^2 + 6x = 0$. On obtient les deux racines évidentes $x = 0$ et $x = -1$, qui donnent ensuite, en calculant les valeurs de y et z correspondantes, les deux points d'intersection $B(0,1,-3)$ et $C(-1,0,-1)$.

Proposition 26. Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux sphères du plan, de centres respectifs A et A' et de rayons respectifs R et R'. Alors :

- si $AA' > R + R'$, les deux sphères ne se coupent pas.
- si $AA' = R + R'$, les deux sphères sont tangentes extérieurement.
- si $|R - R'| < AA' < R + R'$, les deux sphères se coupent en deux points distincts.
- si $AA' = |R - R'|$, les deux sphères sont tangentes intérieurement.
- si $AA' < |R - R'|$, les deux sphères ne se coupent pas.