Géométrie du plan

PTSI B Lycée Eiffel

2 octobre 2012

Qu'est-ce qu'un ours cartésien ?
Un ours polaire ... après changement de coordonnées !

Introduction

Ce premier chapitre de géométrie sera consacré à rappeler les principales définitions et propriétés relatives à la géométrie analytique dans le plan. Autrement dit, nous travaillerons toujours avec des coordonnées. La plupart des notions ont déjà été vues au lycée, et nous avons abordé dans le chapitre précédent leur interprétation en terme de nombres complexes. Nous ferons également un bilan de tout ce qu'il y a à savoir sur les deux types d'objets gémétriques les plus simples et les plus couramment utilisés dans le plan : les droites et les cercles.

Objectifs du chapitre :

- maitrise de la géométrie vectorielle et analytique élémentaire.
- capacité à calculer des équations d'objets simples et à déterminer des lignes de niveau

1 Repérage dans le plan

1.1 Rappels sur les vecteurs

Nous ne chercherons absolument pas à donner ici une définition de la notion de vecteur, qui reviendrait à tenter la peu satisfaisante caractérisation d'un vecteur par les trois données que sont sa direction, son sens et sa norme, comme vous avez pu le voir au lycée. Nous ferons nettement mieux un peu plus tard dans l'année. Pour l'instant, contentons-nous de garder notre vision intuitive de ce qu'est un vecteur : un objet mathématique caractérisant une translation, et concentrons-nous sur les opérations que nous connaissons les concernant.

Définition 1. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, et t et t' les translations correspondantes. Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est le vecteur caractérisant la translation $t' \circ t$. Une autre façon de voir les choses en utilisant des points : si les trois points A, B et C vérifient $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$, alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ (en effet, $B = t(A)$ et $C = t'(B)$ donc $C = t' \circ t(A)$). C'est la fameuse **relation de Chasles**.

Proposition 1. L'addition vectorielle est associative et commutative. Elle admet un élément neutre, le vecteur nul (correspondant à la translation identité) noté $\overrightarrow{0}$, et tout vecteur $\overrightarrow{u}$ admet un opposé noté $-\overrightarrow{u}$.

Démonstration. L'associativité et la commutativité découlent de celle de l'opération de composition sur les translations (la composition n'est en général pas commutative). Le vecteur nul est un élément neutre puisque $t \circ id = id \circ t = t$ quelle que soit la translation t, et l'existence d'un opposé découle du fait que toute translation est bijective et admet une réciproque qui est également une translation. Plus simplement, en notant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, on constate en utlilisant la relation de Chasles que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$. □

Remarque 1. Ces propriétés font de l'ensemble des vecteurs du plan, muni de son addition, un groupe commutatif.

Remarque 2. En termes de points, on aura $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$, et $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Définition 2. À tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et à tout réel λ, on peut associer un vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$, de même direction de même sens si $\lambda > 0$ et de sens opposé sinon, et de norme mutlipliée par $|\lambda|$. Ce produit est appelé **produit extérieur** d'un vecteur par un nombre réel.

Proposition 2. Le produit extérieur vérifie les propriétés suivantes :
- Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
- Pour tous réels λ et μ, $(\lambda\mu)\overrightarrow{u} = \lambda(\mu\overrightarrow{u})$.
- Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et pour tout réel λ, $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda v$.
- Pour tous réels λ et μ et pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.

Démonstration. On ne démontrera pas ces propriétés faute d'avoir une définition suffisamment pratique du produit extérieur. Cette démonstration ne présenterait de toute façon guère d'intérêt. □

Définition 3. Les deux dernières propriétés énoncées ci-dessus constituent la **double distributivité** du produit extérieur sur l'addition, vectorielle d'une part et réelle d'autre part. L'ensemble des propriétés vérifiées par l'addition vectorielle et par le produit extérieur font de l'ensemble des vecteurs du plan, muni de ces deux opérations, un **espace vectoriel réel**.

Remarque 3. Nous étudierons abondamment la notion d'espace vectoriel plus tard. On peut déjà en donner d'autres exemples : l'ensemble de toutes les suites, celui de toutes les fonctions (munis à chaque fois de la somme interne, et du produit extérieur par un réel).

Définition 4. Un vecteur est **unitaire** (ou **normé**) s'il a une norme égale à 1.

Définition 5. Deux vecteurs sont **colinéaires** s'ils forment un angle nul modulo π, ou si l'un des deux est nul. Ils sont **orthogonaux** s'ils forment un angle droit, c'est-à-dire un angle de $\frac{\pi}{2}$ modulo π.

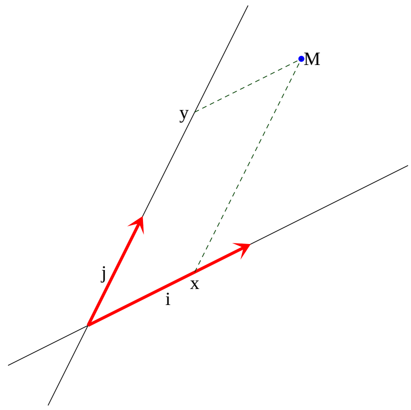
1.2 Repères cartésiens

Définition 6. Une **base** du plan est la donnée d'un couple de vecteurs $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ non colinéaires. Un **repère** du plan est la donnée d'un triplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, où O est un point du plan et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ forment une base du plan. Le point O est alors appelé **origine** du repère, et les droites passant par O et dirigées par les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ **axes** du repère, usuellement notés (Ox) et (Oy).

Définition 7. Une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (et les repères correspondants) est **orthogonale** si les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont orthogonaux. Elle est **orthonormale** si de plus $\| \overrightarrow{i} \| = \| \overrightarrow{j} \| = 1$. Un repère orthonormal est **direct** si $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}}) = \frac{\pi}{2}$

Théorème 1. Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base du plan. Tout vecteur du plan peut s'écrire de façon unique sous la forme $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, où x et y sont deux réels appelés **coordonnées** du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Définition 8. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère du plan, et M un point du plan. Les **coordonnées** du point M sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On notera ces coordonnées sous la forme $M(x; y)$.



Dans ce repère, le point M a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$.

Remarque 4. Cette dernière définition constitue en fait une identification entre l'ensemble des points du plan, l'ensemble des vecteurs du plan, et l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels.

Méthode : Il existe évidemment énormément de repères dans le plan, et il faut être capable de passer d'un repère à l'autre. Plutôt que de vous donner des formules lourdes dans le cas général, je préfère vous expliquer la méthode, les calculs étant faciles à refaire. Considérons donc un point M, qui admet pour coordonnées (x, y) dans un premier repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, et dont on cherche à calculer les nouvelles coordonnées (x', y') dans un second repère $(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$. Pour cela, il faudra bien entendu au préalable avoir exprimé les vecteurs de la seconde base dans la première : $\overrightarrow{i'} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$, et $\overrightarrow{j'} = c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}$. On écrit alors $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} = -x_{O'}\overrightarrow{i} - y_{O'}\overrightarrow{j} + x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = (x - x_{O'})\overrightarrow{i} + (y - y_{O'})\overrightarrow{j}$. Comme par ailleurs on a par définition $\overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{i'} + y'\overrightarrow{j'} = ax'\overrightarrow{i} + bx'\overrightarrow{j} + cy'\overrightarrow{i} + dy'\overrightarrow{j} = (ax' + cy')\overrightarrow{i} + (bx' + dy')\overrightarrow{j}$, on obtient les deux équations $x - x_{O'} = ax' + cy'$ et $y - y_{O'} = bx' + dy'$. Reste un système à résoudre. Alternativement, on peut partir des coordonnées du point O dans le nouveau repère pour obtenir des formules donnant x' et y' en fonction de x et y.

Exemple : Considérons un premier repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et un second $(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$, où O' a pour coordonnées $(-1; 2)$ dans l'ancien repère, et $\overrightarrow{i'} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, et $\overrightarrow{j'} = -\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$. On considère le point M ayant pour coordonnée $(3, 3)$ dans le premier repère et on cherche ses coordonnées (x', y') dans le second. On écrit donc $3\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + x'\overrightarrow{i'} + y'\overrightarrow{j'} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + x'(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) + y'(-\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}) = (-1 + x' - y')\overrightarrow{i} + (2 + x' + 3y')\overrightarrow{j}$. Par identification, on a donc les deux équations $4 = x' + y'$ et $1 = x' + 3y'$. Une petit soustraction donne $3 = -2y'$, soit $y' = -\frac{3}{2}$, puis $x' = 4 - y' = \frac{11}{2}$. Les coordonnées cherchées sont donc $\left(\frac{11}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

Proposition 3. Soient $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$ deux repères orthonormaux directs, et $\theta = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i'}})$, alors les coordonnées (x', y') d'un point M dans le nouveau repère sont en relation avec celles de l'ancien, notées (x, y), via les formules :

$$\begin{cases} x - x_{O'} &= \cos(\theta)x' - \sin(\theta)y' \\ y - y_{O'} &= \sin(\theta)x' + \cos(\theta)y' \end{cases}$$

1.3 Répérage polaire

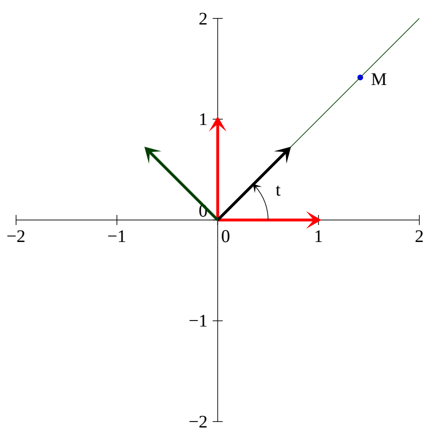
Le repérage polaire est une autre façon de décrire les points du plan à l'aide de deux réels, qui suppose un repère orthonormal direct déjà fixé. Si on veut se ramener aux notions vues dans le chapitre précédent, le repérage cartésien (couple de coordonnées (x, y)) correspond à l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique $z = a + ib$, alors que le repérage polaire sera l'équivalent de la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$.

Définition 9. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal direct, et $\theta \in \mathbb{R}$. Le **repère polaire** associé au réel θ est le repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$, où $\overrightarrow{u}(\theta) = \cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}$, et $\overrightarrow{v}(\theta) = -\sin(\theta)\overrightarrow{i} + \cos(\theta)\overrightarrow{j}$.

Remarque 5. Les vecteurs de base du repère polaire associé à l'angle θ sont parfois notés $\overrightarrow{u}_r$ (au lieu de $\overrightarrow{u}(\theta)$) et $\overrightarrow{u_\theta}$ (au lieu de $\overrightarrow{v(\theta)}$). Le repère polaire associé à l'angle θ correspond simplement à une rotation d'angle θ du repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Définition 10. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal direct, et M un point du plan distinct de l'origine O du repère. Un **couple de coordonnées polaires** du point M est un couple de réels (r, θ) tel que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}(\theta)$, où $\overrightarrow{u(\theta)}$ est le premier vecteur de la base du repère polaire associé à θ. Un tel couple est unique si $M \neq O$ si on impose de plus la condition $r > 0$ (l'angle θ est alors unique à 2π près), mais le couple $(-r, \theta + \pi)$ est également un couple de coordonnées polaires du point M.

Remarque 6. On peut convenir que n'importe quel couple de la forme $(0, \theta)$ constitue un couple de coordonnées polaires de l'origine O du repère.



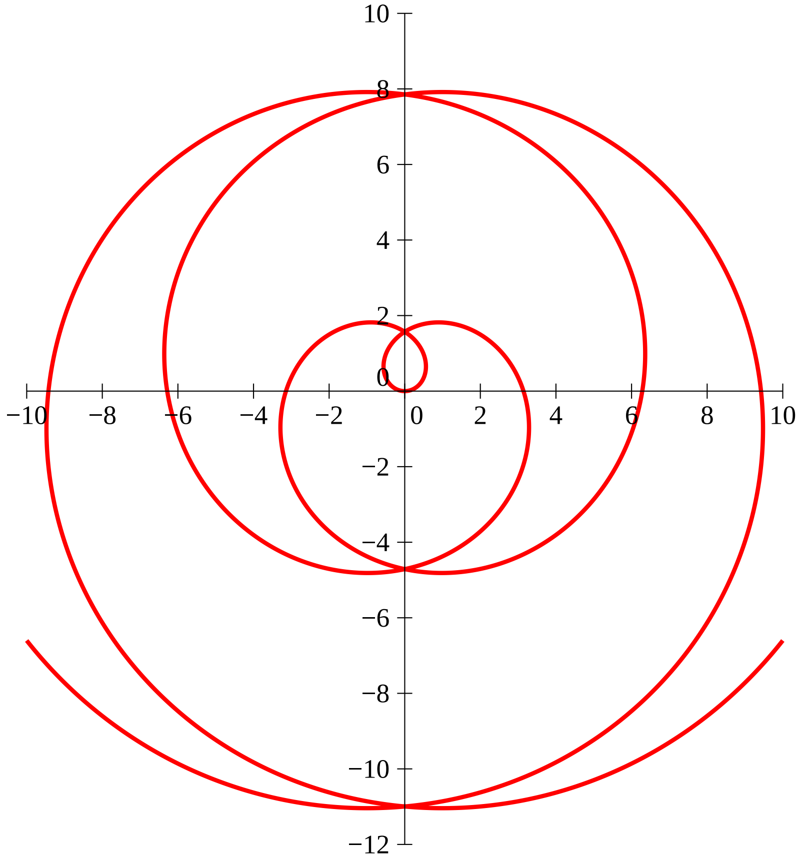
Sur ce schéma (où θ est noté t), le point M a pour coordonnées cartésiennes $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et pour coordonnées polaires $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ ou $\left(-2, -\frac{3\pi}{4}\right)$. En vert, le repère polaire associé à l'angle $\frac{\pi}{4}$

Proposition 4. Si un point M admet pour coordonnées cartésiennes (x, y), et pour coordonnées polaires (r, θ) dans un même repère, alors $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. Dans l'autre sens, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ conviennent (quand cela a un sens et plus ou moins π pour avoir un angle dans le bon quart du cercle trigonométrique).

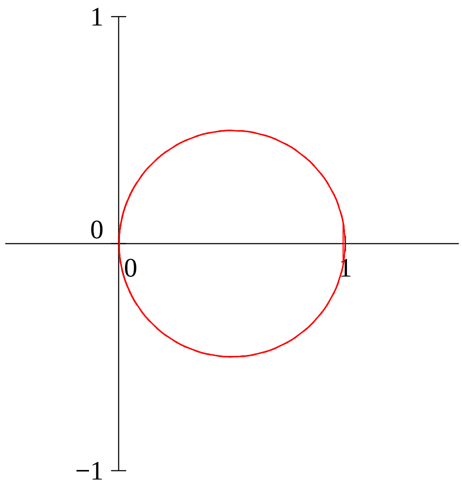
Démonstration. C'est quasi évident vue la définition des coordonnées polaires et du repère polaire associé à θ : $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}(\theta) = r(\cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}) = r\cos(\theta)\overrightarrow{i} + r\sin(\theta)\overrightarrow{j}$. Les formules dans l'autre sens doivent évidemment vous rappeler des souvenirs, cela correspond naturellement au calcul du module et de l'argument d'un nombre complexe. Elles découlent des précédentes : $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} = r$, et $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{r\sin(\theta)}{r\cos(\theta)}\right) = \arctan(\tan(\theta)) = \theta$ si $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. $\square$

Exemple : Les calculs de coordonnées polaires étant identiques à ceux de forme exponentielle d'un nombre complexe, vous en avez en fait déjà fait suffisamment dans le chapitre précédent. Par exemple, un couple de coordonnées polaires du point $(2,2)$ sera $\left(2\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$. Ce même point aura également pour coordonnées polaires $\left(-2\sqrt{2}; \frac{-3\pi}{4}\right)$.

Remarque 7. Nous étudierons un peu plus tard dans l'année des exemples de courbes définies dans le plan par des équations polaires, c'est-à-dire des équations de la forme $r = f(\theta)$. Ces courbes sont très différentes des courbes auxquelles vous êtes habitués dans le cadre d'équations cartésiennes du type $y = f(x)$. En voici deux exemples pour vous donner un petit avant-goût, d'abord le simple $r = \theta$ qui donne une double spirale :



Et une fonction « trigonométrique » $r = \cos(\theta)$ qui donne ici un simple cercle :



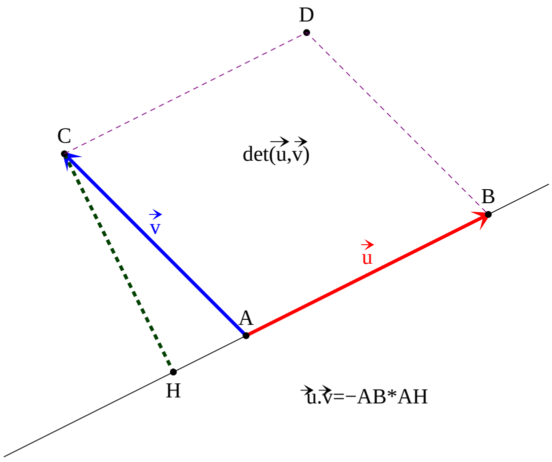
2 Produit scalaire et déterminant

2.1 Produit scalaire

Définition 11. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan, le **produit scalaire** de ces deux vecteurs, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, est le réel $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \| \overrightarrow{u} \| \times \| \overrightarrow{v} \| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$. Si l'un des deux vecteurs est nul, le produit scalaire est nul.

Remarque 8. Rappelons que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \| \overrightarrow{u} \|^2$. On peut ainsi développer des carrés scalaires de sommes ou de différence comme des identités remarquables, par exemple $\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{v} \|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.

Remarque 9. On peut donner une interprétation géométrique du produit scalaire en termes de projection : si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$, en notant H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), on peut écrire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overline{AB}.\overline{AH}$ ($\overline{AB}$ désignant la mesure algébrique du segment $[AB]$, qui est égale à sa distance au signe près, deux segments de même direction mais de sens opposé ayant des mesures algébriques de signe opposés).



Proposition 5. Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de nos définitions : le produit scalaire est nul si et seulement si le cosinus de l'angle formé par les deux vecteurs est nul, ce qui se produit si cet angle est égal à $\frac{\pi}{2}[\pi]$, exactement la définition que nous avons donné pour l'orthogonalité. □

Proposition 6. Propriétés du produit scalaire
Le produit scalaire est :

- bilinéaire : $\overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ et $(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \mu\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$.
- symétrique : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$.
- défini positif : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} \geqslant 0$, et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

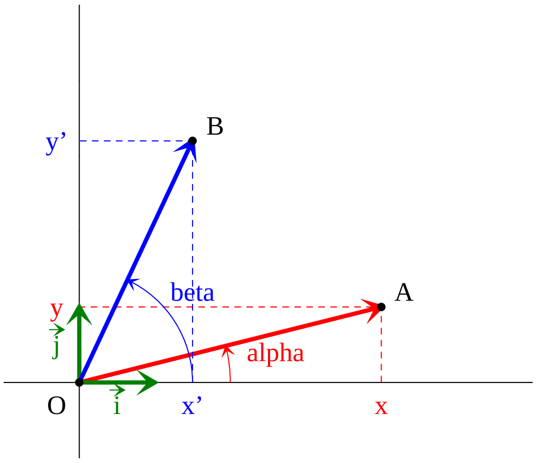
Démonstration.

- La bilinéarité est pénible à vérifier avec notre définition du produit scalaire, alors qu'elle est très facile avec l'expression dans une base orthormée : $x(\lambda x' + \mu x'') + y(\lambda y' + \mu y'') = \lambda(xx' + yy') + \mu(xx'' + yy'')$ (la deuxième partie découle de la symétrie).
- Il suffit de constater que $\cos(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}}) = \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$, ce qui découle de la parité du cosinus.
- C'est une conséquence immédiate du fait que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \| u \|^2$.

□

Proposition 7. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans un repère orthonormal, alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

Démonstration. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le repère orthonormal dans lequel on connait nos coordonnées. Notons A et B les points tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, et notons $\alpha = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OA}})$ et $\beta = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OB}})$. On peut alors écrire $\vec{u}.\vec{v} = OA \times OB \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = OA \times OB \times \cos(\beta - \alpha) = OA \times OB \times (\cos(\beta)\cos(\alpha) + \sin(\beta)\sin(\alpha))$. Or, $x = OA\cos(\alpha)$, $y = OA\sin(\alpha)$; $x' = OB\cos(\beta)$ et $y' = OB\sin(\beta)$. On obtient donc $\vec{u}.\vec{v} = OA \times OB \times \left(\frac{x}{OA} \times \frac{x'}{OB} + \frac{y}{OA} \times \frac{y'}{OB}\right) = xx' + yy'$. □



2.2 Déterminant

Définition 12. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, leur **déterminant** est le nombre réel $\det(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u} \quad \vec{v}| = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Remarque 10. Avec les mêmes notations que pour le produit scalaire, on peut interpréter le déterminant comme $\det(\vec{u}, \vec{v}) = AB \times CH$ (au signe près). Plus intéressant, le déterminant représente l'aire algébrique du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (aire du parallélogramme $ABDC$ dans la figure tracée pour le produit scalaire).

Proposition 8. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Démonstration. Comme pour le déterminant, c'est une conséquence immédiate de nos définitions. □

Proposition 9. Propriétés du déterminant
Le déterminant est :

- bilinéaire : $\det(\vec{u}, \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda\det(\vec{u}, \vec{v}) + \mu\det(\vec{u}, \vec{w})$ et $\det(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \vec{w}) = \lambda\det(\vec{u}, \vec{w}) + \mu\det(\vec{v}, \vec{w})$.
- antisymétrique : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$.

Démonstration. La bilinéarité est à nouveau facile à prouver une fois connue l'expression en base orthonormale, et l'antisymétrie découle de l'imparité du sinus. □

Proposition 10. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans un repère orthonormal direct, alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

Démonstration. En reprenant les notations de la démonstration effectuée dans le cas du produit scalaire, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = OA \times OB \times \sin(\beta - \alpha) = OA \times OB \times (\cos(\beta)\sin(\alpha) - \sin(\beta)\cos(\alpha)) = OA \times OB \times \left(\frac{y'}{OA} \times \frac{x}{OB} - \frac{x'}{OA} \times \frac{y}{OB}\right) = xy' - x'y$. □

Exemple : On peut calculer très rapidement des aires à l'aide du déterminant. Si on place dans un repère orthonormal les points $A(-1,1)$, $B(2,3)$ et $C(-4,6)$, l'aire du triangle ABC est donnée par $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(15+6) = \frac{21}{2}$.

3 Droites et cercles

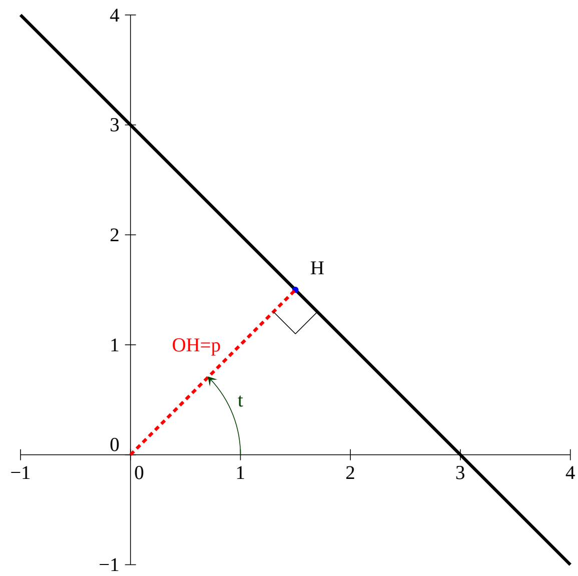
3.1 Équations de droites

Proposition 11. Équations cartésiennes de droite
Une équation du type $ax+by+c=0$, où a, b et c sont trois réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$, est l'équation cartésienne d'une droite. Réciproquement, toute droite du plan admet une équation de cette forme.

Remarque 11. Une telle équation n'est pas unique, si on multiplie les trois coefficients a, b et c par une même constante non nulle k, on trouve une nouvelle équation de la même droite.

Proposition 12. Toute droite (d) du plan admet une équation de la forme $x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = p$, où (p, θ) représente un couple de coordonnées polaires du projeté orthogonal H de l'origine O du repère sur la droite (d). Une telle équation est appelée **équation normale** de la droite (d).

Démonstration. En effet, un point $M(x,y)$ appartient à la droite (d) si et seulement si $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{OH} = 0$, c'est-à-dire si $(x - p\cos(\theta))p\cos(\theta) + (y - p\sin(\theta))p\sin(\theta) = 0$, ce qui donne en développant $xp\cos(\theta) + yp\sin(\theta) = p^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = p^2$. Il suffit alors de tout diviser par p pour obtenir l'équation normale (on vérifie sans mal que l'équation reste valable si $p = 0$). □



Remarque 12. Pour passer d'une équation cartésienne $ax+by+c=0$ à une équation normale, il suffit de diviser tous les coefficients par $\sqrt{a^2+b^2}$. On obtient alors une équation $a'x+b'y+c'=0$, avec $\sqrt{a'^2+b'^2} = 1$. On peut donc écrire $a' = \cos(\theta)$ et $b' = \sin(\theta)$ puisque le point (a', b') correspond à un point du cercle trigonométrique.

Définition 13. Un **vecteur directeur** d'une droite (d) du plan est un vecteur colinéaire à tout vecteur de la forme $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points appartenant à la doite (d). Un **vecteur normal** à la droite (d) est un vecteur orthogonal à tout vecteur directeur de la droite (d).

Remarque 13. Si le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a,b) dans un repère orthonormal est un vecteur directeur non nul de la droite (d), alors $\overrightarrow{v}(-b,a)$ est un vecteur normal à cette même droite, puisque $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n} = -ab + ba = 0$.

Proposition 13. Soit (d) une droite du plan passant par le point $A(x_A, y_A)$ et admettant le vecteur $\overrightarrow{n}(a,b)$ pour vecteur normal, alors l'équation $a(x-x_A)+b(y-y_A)$ est une équation cartésienne de la droite (d).

Démonstration. En effet, un point $M(x,y)$ appartient à la droite (d) si et seulement si $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AM}=0$, soit $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$. □

Exemple : On peut de même utiliser le déterminant pour obtenir une équation de droite à partir d'un vecteur directeur. Soit (d) la droite passant par $A(-1,2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-3,4)$. Un point $M(x,y)$ appartient à la droite (d) si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u})=0$, soit $4(x+1)+3(y-2)=0$, ce qui donne l'équation cartésienne $4x+3y-2=0$. On procède de la même manière si la droite est définie par deux de ses points A et B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ étant alors un vecteur directeur de la droite. Ces méthodes restent valables même si on ne se trouve pas dans un repère orthonormal, l'expression $xy'-x'y$ continuant alors à caractériser la colinéarité des vecteurs de coordonnées (x,y) et (x',y').

Définition 14. La droite (d) passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(a,b)$ peut être décrite par le **système d'équations paramétriques** $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A+at \\ y & = & y_A+bt \end{array}\right.$, où $t\in\mathbb{R}$

Démonstration. En effet, un point $M(x,y)$ appartient à (d) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$, ce qu'on peut traduire par l'existence d'un réel t pour lequel $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{u}$. Cela donne les deux équations $x-x_A=ta$ et $y-y_A=tb$, dont découlent les formules. □

Proposition 14. Équations polaires de droite.
Soit (d) une droite du plan passant par l'origine O du repère, elle admet une équation polaire de la forme $\theta=\theta_0[\pi]$.
Si (d) ne passe pas par O, elle admet une équation de la forme $r=\dfrac{p}{\cos(\theta-\theta_0)}$, où (p,θ_0) constitue un couple de coordonnées polaires du projeté orthogonal du point O sur la droite (d).

Démonstration. Le premier cas est évident : si on considère un couple de coordonnées polaires (r,θ_0) d'un point de la droite distinct du point O, un point quelconque du plan appartient à la droite si et seulement s'il a un « argument » (pour parler en terme de nombres complexes) égal à θ_0 ou $\theta_0+\pi$. La deuxième équation s'obtient très facilement à partir de l'équation normale $x\cos(\theta_0)+y\sin(\theta_0)=p$, en remplaçant x et y par leurs équivalents polaires $r\cos(\theta)$ et $r\sin(\theta)$: on obtient $r(\cos(\theta)\cos(\theta_0)+\sin(\theta)\sin(\theta_0))=p$, soit en utilisant une formule d'addition trigonométrique $r\cos(\theta-\theta_0)=p$. □

Exemple : La droite d'équation cartésienne $x+y-4=0$ admet pour équation normale $\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y=2\sqrt{2}$, donc pour équation polaire $r=\dfrac{2\sqrt{2}}{\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}$. Inversement, la droite d'équation polaire $r=\dfrac{3}{\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})}$ aura pour équation normale $-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=3$, et par exemple pour équation cartésienne $x+\sqrt{3}y+6=0$.

Proposition 15. Distance d'un point à une droite.
Soit $M(x_M, y_M)$ un point du plan, et (d) une droite. La distance de M à la droite (d) peut être donnée par une des quatre formules suivantes :

- Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (d), alors $d(M,d)=\dfrac{|\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u})|}{\parallel\overrightarrow{u}\parallel}$.
- Si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à (d), alors $d(M,d)=\dfrac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{\parallel\overrightarrow{n}\parallel}$.
- Si la droite a pour équation cartésienne $ax+by+c=0$, alors $d(M,d)=\dfrac{|ax_M+by_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

- Si la droite a pour équation normale $x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = p$, alors $d(M,d) = |x_M\cos(\theta) + y_M\sin(\theta) - p|$.

Démonstration.
- Il faut revenir à l'interprétation géométrique du déterminant : $|\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u})| = \parallel \overrightarrow{u} \parallel \times MH$, où H est le projeté orthogonal du point M sur la droite (d). La distance MH étant égale à celle de M à (d), la formule en découle.
- C'est exactement comme ci-dessus, le produit scalaire avec un vecteur normal est (au signe près) égal à $\parallel n \parallel \times MH$.
- Quitte à tout diviser par $\sqrt{a^2+b^2}$, on trouve une équation normale de la droite, et on se ramène au cas suivant.
- Le vecteur $\overrightarrow{n}(\cos(\theta), \sin(\theta))$ est un vecteur normal à (d) normé, et le point $A(p\cos(\theta), p\sin(\theta))$ appartient à la droite, donc en reprenant la deuxième formule démontrée, $d(M,d) = |\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}| = |(x_M - p\cos(\theta))\cos(\theta) + (y_M - p\sin(\theta))\sin(\theta)| = |x_M\cos(\theta) + y_M\sin(\theta) - p(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))| = |x_M\cos(\theta) + y_M\sin(\theta) - p|$.

□

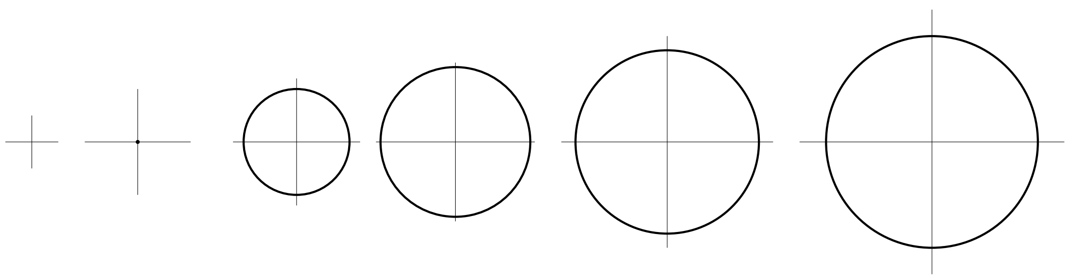
Exemple : Soit $M(3,5)$ et (d) la droite d'équation cartésienne $2x - 3y + 1 = 0$, alors $d(M,d) = \dfrac{|6-15+1|}{\sqrt{4+9}} = \dfrac{8}{\sqrt{13}}$.

3.2 Lignes de niveau

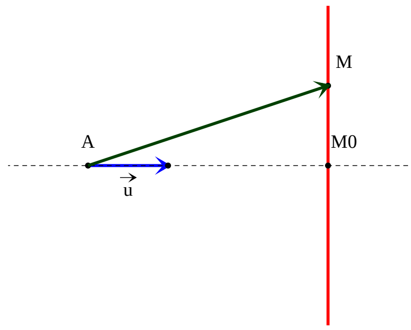
Définition 15. Soit f une application associant à tout point M du réel un nombre réel $f(M)$ (autrement dit, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est en fait une fonction à deux variables), et $k \in \mathbb{R}$. La **ligne de niveau k** de la fonction f est constituée de l'ensemble de tous les points M du plan vérifiant $f(M) = k$.

Remarque 14. Cette notion est très utilisée en dehors du domaine des mathématiques, par exemple en cartographie (où on trace usuellement pour indiquer le relief des lignes de niveau de la fonction altitude), ou en météorologie (lignes de niveau de pression ou de température).

Exemple : Considérons, dans un repère orthonormal d'origine O, la fonction définie par $f(M) = x^2 + y^2 = OM^2$ (carré de la distance à l'origine). Si $k < 0$, la ligne de niveau k associée à f est vide. Si $k \geqslant 0$, la ligne de niveau k associée à f est un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$. Ci-dessous, les lignes de niveau pour $k = -1$, 0, 1, 2, 3, 4.



Proposition 16. Soit A un point du plan et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul, les lignes de niveau de l'application f définie par $f(M) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM}$ sont des droites orthogonales à $\overrightarrow{u}$. Plus précisément, la ligne de niveau k est orthogonale à $\overrightarrow{u}$ et passe par le point M_0 vérifiant $\overrightarrow{AM_0} = \dfrac{k\overrightarrow{u}}{\parallel \overrightarrow{u} \parallel^2}$.



Sur ce schéma, en admettant que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normé, la droite rouge représente tous les points M pour lesquels $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM} = 3$.

Démonstration. Commençons par vérifier que M_0 appartient à la ligne de niveau : $f(M_0) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM_0} = \overrightarrow{u}.\dfrac{k\overrightarrow{u}}{\parallel \overrightarrow{u} \parallel^2} = \dfrac{k \parallel \overrightarrow{u} \parallel^2}{\parallel \overrightarrow{u} \parallel^2} = k$. On peut ensuite utiliser la linéarité du produit scalaire pour décomposer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM_0} + \overrightarrow{u}\overrightarrow{M_0M} = k + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{M_0M}$. On en déduit que $f(M) = k \Leftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{M_0M} = 0$. Autrement dit, M appartient à la droite orthogonale à $\overrightarrow{u}$ passant par M_0. □

Exemple : Soient A et B deux points distants du plan tels que $AB = 4$, on chercher à déterminer l'ensemble des points M du plan pour lesquels $MA^2 - MB^2 = 8$. On peut utiliser le point I, milieu du segment $[AB]$, pour se ramener au cas étudié ci-dessus : $MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$. Les points recherchés sont donc ceux vérifiant $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = 4$, ils sont situés sur une droite orthogonale à (AB), passant par le point M_0 vérifiant $\overrightarrow{IM_0} = \dfrac{4}{16}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Autrement dit, l'ensemble recherché est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu du segment $[IB]$ (on vérifie facilement que ce point M_0 vérifie la condition imposée : $MA = 3$ et $MB = 1$ donc $MA^2 - MB^2 = 9 - 1 = 8$). On peut évidemment effectuer ce genre de calcul plus directement si l'on travaille avec des coordonnées dans un repère orthonormal.

Proposition 17. Soit A un point du plan et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul, les lignes de niveau de l'application f définie par $f(M) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM})$ sont des droites dirigées par $\overrightarrow{u}$. Plus précisément, la ligne de niveau k est parallèle à $\overrightarrow{u}$ et passe par la point M_0 vérifiant $\overrightarrow{AM_0} = \dfrac{k\overrightarrow{n}}{\parallel \overrightarrow{u} \parallel^2}$, où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur de même norme que $\overrightarrow{u}$ directement orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

Démonstration. Le principe est le même que tout à l'heure : $f(M_0) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM_0}) = \det\left(\overrightarrow{u}, \dfrac{k\overrightarrow{n}}{\parallel \overrightarrow{u} \parallel^2}\right) = \dfrac{k \parallel \overrightarrow{u} \parallel . \parallel \overrightarrow{n} \parallel}{\parallel \overrightarrow{u} \parallel^2} = k$. On peut ensuite utiliser la linéarité du déterminant : $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM_0}) + \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{M_0M}) = k + \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{M_0M})$. On en déduit que $f(M) = k \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$. Autrement dit, M appartient à la droite parallèle à $\overrightarrow{u}$ passant par M_0. □

3.3 Équations de cercles

Définition 16. Équation cartésienne de cercle.

Dans un repère orthonormal, le cercle de centre $A(a,b)$ et de rayon R admet pour **équation cartésienne** $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$. Réciproquement, toute équation de la forme $x^2+y^2-2ax-2by-c = 0$ avec $a^2+b^2+c \geqslant 0$ est une équation de cercle de centre $A(a,b)$ et de rayon $R = \sqrt{c+a^2+b^2}$.

Exemple : On peut factoriser l'équation $x^2+y^2+8x-2y+14 = 0$ sous la forme $(x+4)^2+(y-1)^2 = 4$, où on reconnait le cercle de centre $A(-4,1)$ et de rayon 2.

Proposition 18. Le cercle de diamètre $[AB]$ admet pour équation $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B) = 0$

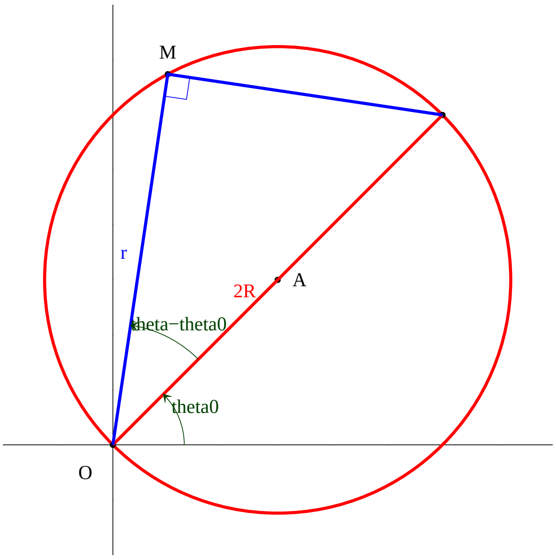
Démonstration. Cela revient à dire qu'un point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$, une propriété que vous connaissez bien depuis votre collège. Démontrons-là à coup de propriétés du produit scalaire, en introduisant le point I, milieu du segment $[AB]$ et donc centre du cercle de diamètre $[AB]$. On peut alors écrire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$. Or, $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$, donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$. Le produit scalaire est donc nul si et seulement si $MI = IA$, ce qui indique bien que M appartient au cercle de centre I et de rayon IA, autrement dit au cercle de diamètre $[AB]$. □

Définition 17. Le cercle de centre $A(a,b)$ et de rayon R peut être décrit dans un repère orthonormal par le **système d'équations paramétriques** $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a+R\cos(t) \\ y & = & b+R\sin(t) \end{array}\right.$, où $t \in]-\pi,\pi]$ (on peut aussi prendre $t \in \mathbb{R}$, on parcourra simplement plusieurs fois le cercle).

Remarque 15. On reconnait, à une homothétie de rapport R et à une translation de vecteur de coordonnées (a,b) près, le classique paramétrage du cercle trigonométrique : $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$.

Proposition 19. Le cercle passant pour l'origine O du repère, de centre A ayant pour coordonnées cartésiennes (a,b) et de rayon R admet pour équation polaire $r = 2a\cos(\theta)+2b\sin(\theta)$. De façon équivalente, son équation peut être mise sous la forme $r = 2R\cos(\theta-\theta_0)$, où (R,θ_0) est un couple de coordonnées polaires de son centre A.

Démonstration. Si le cercle passe par l'origine, il a une équation de la forme $x^2+y^2-2ax-2by = 0$, soit $x^2+y^2+2ax+2by$. En remplaçant x et y par $r\cos(\theta)$ et $r\sin(\theta)$, on obtient $r^2 = 2ar\cos(\theta)+2br\sin(\theta)$. Il suffit de diviser par r pour obtenir l'équation souhaitée, mais cela pose un problème pour $r = 0$ (et l'origine est censée appartenir au cercle). En fait, en prenant θ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\theta) = -\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, on constate que $r = 0$ est également une solution de l'équation.
Pour trouver la deuxième équation, on note θ_0 l'angle tel que $\cos(\theta_0) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\theta_0) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, et on pose $R = \sqrt{a^2+b^2}$ (qui correspond à la distance OA, c'est-à-dire au rayon du cercle). On obtient alors $r = 2R(\cos(\theta)\cos(\theta_0)+\sin(\theta)\sin(\theta_0)) = 2R\cos(\theta-\theta_0)$. Cette dernière équation est en fait très naturelle si on observe la figure suivante :

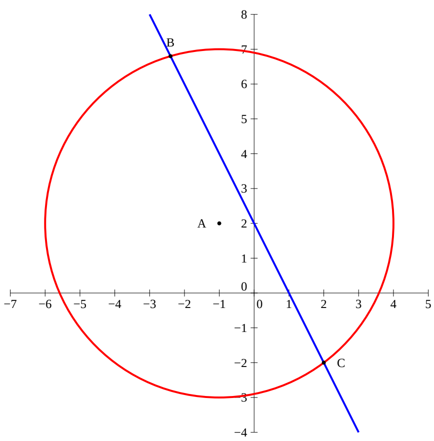


$\square$

Proposition 20. Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre A et de rayon R et (d) une droite du plan. Alors :

- si $d(A,d) > R$, $\mathcal{C}$ et (d) ne se coupent pas.
- si $d(A,d) = R$, $\mathcal{C}$ et (d) se coupent en un point unique, on dit que la droite (d) est **tangente** au cercle $\mathcal{C}$.
- si $d(A,d) < R$, $\mathcal{C}$ et (d) ont deux points d'intersection distincts.

Exemple : Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A(-1,2)$ et de rayon 5, et (d) la droite d'équation $2x+y-2=0$. On peut commencer par calculer $d(A,d) = \dfrac{|-2+2-2|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} < 5$ pour constater que $\mathcal{C}$ et (d) ont deux points d'intersection. Pour les déterminer on peut simplement exprimer y en fonction de x dans l'équation de la droite : $y = 2-2x$, et injecter cette expression dans l'équation du cercle : $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$ donne alors $(x+1)^2 + (-2x)^2 = 25$, soit $x^2+2x+1+4x^2 = 25$, donc $5x^2+2x-24 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 4+480 = 484 = 22^2$, et admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{-2-22}{10} = -\dfrac{12}{5}$ et $x_2 = \dfrac{-2+22}{10} = 2$. On trouve les valeurs correspondantes des ordonnées $y_1 = 2-2x_1 = \dfrac{34}{5}$, et $y_2 = 2-2x_2 = -2$. Le cercle et la droite se coupent donc en $B\left(-\dfrac{12}{5}, \dfrac{34}{5}\right)$, et en $C(2,-2)$.

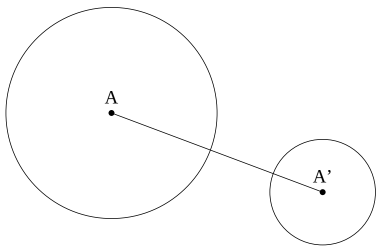


Proposition 21. Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2+y^2-2ax-2by-c=0$, et $M_0(x_0,y_0)$ un point de $\mathcal{C}$, alors une équation de la tangente en M à $\mathcal{C}$ est $xx_0+yy_0-a(x+x_0)-b(y+y_0)-c=0$.

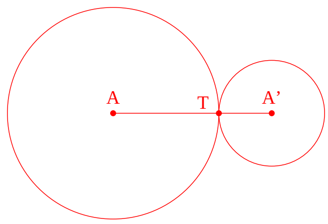
Démonstration. Un point $M(x,y)$ appartient à la tangente en M_0 à $\mathcal{C}$ si $\overrightarrow{M_OM}.\overrightarrow{AM_0}=0$, soit $(x-x_0)(x_0-a)+(y-y_0)(y_0-b)=0$. En développant, $xx_0+yy_0-ax-by+ax_0+by_0-x_0^2-by_0^2$. Mais comme le point M_0 est sur le cercle, il vérifie l'équation $x_0^2+y_0^2=2ax_0+2by_0+c$, donc on retrouve la condition $xx_0+yy_0-a(x+x_0)-b(y+y_0)-c=0$. □

Proposition 22. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles du plan, de centres respectifs A et A' et de rayons respectifs R et R'. Alors :

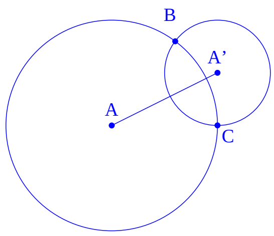
- si $AA'>R+R'$, les deux cercles ne se coupent pas.
- si $AA'=R+R'$, les deux cercles sont tangents extérieurement, ils ont un unique point commun.
- si $|R-R'|<AA'<R+R'$, les deux cercles se coupent en deux points distincts.
- si $AA'=|R-R'|$, les deux cercles sont tangents intérieurement, ils ont un unique point commun.
- si $AA'<|R-R'|$, les deux cercles ne se coupent pas.



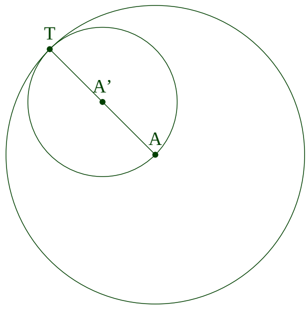
AA'>R+R'



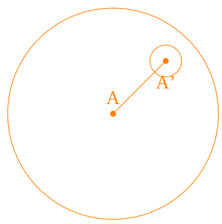
AA'=R+R'



|R−R'|<AA'<R+R'



AA'=|R−R'|



AA' < |R−R'|