Géométrie euclidienne et affine

PTSI B Lycée Eiffel

26 mai 2013

Si quelqu'un, en l'éveil de son intelligence, n'a pas
été capable de s'enthousiasmer pour une telle architecture,
alors jamais il ne pourra réellement s'initier à la recherche théorique.

Albert Einstein, à propos de la géométrie euclidienne.

Plus j'y pense, plus je me dis qu'il n'y a aucune raison
pour que le carré de l'hypoténuse soit égal à la somme
des carrés des deux autres côtés.

Frédéric Dard.

Introduction

Pour ce dernier chapître d'algèbre de l'année (mais oui, déjà), nous allons en quelque sorte boucler la boucle puisque nous reviendrons sur des notions déjà abordées largement en début d'année en reconstruisant la géométrie du plan et de l'espace. Ces domaines constituaient en fait le fondement de notre travail sur les espaces vectoriels, puisque ces derniers ont permis de généraliser les notions de bases, de coordonnées et de calcul vectoriel que nous avions largement pratiqué dans ces cas particuliers. Il est maintenant temps de constater qu'on peut effectivement faire de la géométrie dans à peu près tous les espaces vectoriels comme on le fait dans ces espaces usuels. Pourquoi presque ? Parce qu'il nous manque tout de même une notion fondamentale pour cela, la notion d'orthogonalité de vecteurs dont découle tout l'aspect métrique du travail géométrique, c'est-à-dire les calculs de distance notamment. C'est l'objet de notre début de chapître : définir rigoureusement et de façon très générale la notion de produit scalaire dont découle l'orthogonalité. Nous pourrons ensuite compléter notre vocabulaire et nos techniques de calculs dans des espaces vectoriels très généraux, avant de revenir dans le plan et dans l'espace pour une étude beaucoup plus précise qu'en début d'année, en utilisant notamment l'outil matriciel.

Objectifs du chapitre :

- savoir faire des calculs « géométriques » (normes, distances, projections) dans n'importe quel espace euclidien.
- comprendre le procédé de Gram-Schmidt et savoir l'appliquer sans hésitation, y compris sur des produits scalaires « exotiques ».
- connaître les différents types d'isométries euclidiennes et affines dans le plan et dans l'espace, et savoir déterminer les caractéristiques d'une isométrie à partir de sa matrice ou de son expression analytique.

1 Géométrie euclidienne

Certaines notions géométriques, comme le parallélisme que nous évoquerons dans la deuxième partie de ce chapître, sont intrinsèques à la structure d'espace vectoriel. D'autres, au contraire, nécessitent d'ajouter une structure supplémentaire pour être définies. c'est le cas de la notion fondamentale en géométrique vectorielle de norme et de distance, qui découle de celle de produit scalaire. Dans tout le chapître, E désignera un espace vectoriel réel (on peut très bien définir la plupart des notions sur des espaces vectoriels complexes ou même encore plus généraux, mais ça ne nous servirait à rien pour l'instant).

1.1 Produits scalaires et normes

Définition 1. Une **forme bilinéaire sur** E est une application $\varphi : E \times E \to E$ telle que $\forall (x,y,z) \in E^3$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(\lambda x + \mu y, z) = \lambda\varphi(x,z) + \mu\varphi(y,z)$ (linéarité à gauche) et $\varphi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda\varphi(x,y) + \mu\varphi(x,z)$ (linéarité à droite).

Définition 2. Une application $\varphi : E \times E \to E$ est un **produit scalaire** si elle est :
- bilinéaire.
- symétrique : $\forall (x,y) \in E^2$, $\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$.
- positive : $\forall x \in E$, $\varphi(x,x) \geqslant 0$, et définie : $\varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Remarque 1. Il existe plusieurs notations courantes pour les produits scalaires. Dans ce cours, nous prendrons toujours la plus économique en notant $\varphi(x,y) = x.y$, mais on croise aussi régulièrement (x,y), $< x,y >$ ou encore $< x|y >$ (surtout en physique pour cette dernière).

Exemples : L'application $((x,y);(x',y')) \mapsto xx' + yy'$ est bien entendu un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, appelé produit scalaire usuel puisque c'est celui qu'on utilise la plupart du temps (et dont on a déjà vu les propriétés en début d'année). Mais ce n'est sûrement pas le seul. Par exemple, $\varphi((x,y);(x',y')) = 2xx' + 4yy' + xy' + yx'$ définit également un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$:
- φ est symétrique de façon à peu près immédiate.
- $\varphi((\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2);(x',y')) = \lambda\varphi((x_1,y_1),(x',y')) + \mu\varphi((x_2,y_2),(x',y'))$ par un calcul immédiat, donc φ est linéaire à gauche. Étant symétrique, elle est aussi linéaire à droite, donc bilinéaire.
- $\varphi((x,y);(x,y)) = 2x^2 + 4y^2 + 2xy = x^2 + 3y^2 + x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3y^2 + (x+y)^2$ est toujours positif, et ne peut s'annuler que si $x = y = x + y = 0$, donc φ est bien définie positive.

De même sur $\mathbb{R}^3$, ou plus généralement sur $\mathbb{R}^n$, si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, l'application $(x,y) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ définit un produit scalaire usuel, qui est loin d'être le seul possible. Pour donner des exemples plus exotiques mais d'usage fréquent, signalons que $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\ dt$ définit par exemple un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[0,1]$; ou encore que $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (si vous faites le calcul, vous constaterez que ce dernier produit scalaire est en fait le produit scalaire usuel obtenu en identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$).

Définition 3. Un **espace euclidien** $(E,.)$ est un esapce vectoriel de dimension finie E muni d'un produit scalaire (noté .).

Dans toute la suite du cours, E sera supposé euclidien.

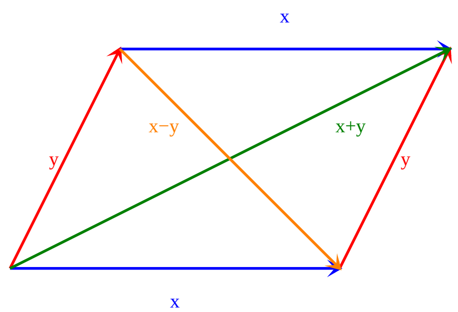
Définition 4. Soit $x \in E$, la **norme de** x est le réel positif $\|x\| = \sqrt{x.x}$. Si $(x,y) \in E^2$, on appelle **distance de** x **à** y le réel positif $d(x,y) = \|y - x\|$.

Proposition 1. Régles de calcul sur les normes.
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

- $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
- $\forall (x,y) \in E^2$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (identité du parallélogramme).
- $\forall (x,y) \in E^2$, $x.y = \dfrac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ (identité de polarisation).

Démonstration.

- C'est une conséquence évidente du caractère défini du produit scalaire.
- En effet, $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x).(\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x.x)} = |\lambda| \|x\|$ par bilinéarité du produit scalaire.
- C'est encore une conséquence de la bilinéarité : $\|x+y\|^2 = (x+y).(x+y) = x.x+x.y+y.x+x.x = \|x\|^2 + 2x.y + \|y\|^2$. De même, $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2x.y + \|y\|^2$. En additionnant les deux égalités, on trouve la formule du parallélogramme. Elle est ainsi nommée car on peut l'interpréter de la façon suivante : dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des deux diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés.



- Cela découle des calculs effectués à la question précédente : $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4x.y$, d'où l'identité.

$\square$

Remarque 2. Cette dernière identité est très importante d'un point de vue théorique, puisqu'elle signifie qu'on peut reconstituer le produit scalaire à partir de la connaissance de la norme. Autrement dit, une norme donnée ne peut être associée qu'à un seul produit scalaire.

Théorème 1. Inégalité de Cauchy-Schawarz.
$\forall (x,y) \in E^2$, $|x.y| \leqslant \|x\| \times \|y\|$.

Démonstration. Il s'agit bel et bien de la même inégalité de Cauchy-Schwarz que celle vue dans le chapître d'intégration, et elle se démontre de la même manière : on pose $P(t) = \|x+ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t(x.y) + t^2\|y\|^2$, le trinôme est toujours positif donc a un discriminant négatif, l'inégalité en découle. $\square$

Théorème 2. Inégalité triangulaire.
$\forall (x,y) \in E^2$, $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Démonstration. Là encore, la démonstration est la même que dans le cas de $\mathbb{C}$ que nous avons vu en début d'année, nous nous épargnerons donc une nouvelle démonstration technique. $\square$

Remarque 3. Les cas d'égalité de ces deux inégalités restent les mêmes que dans les cas particuliers vus auparavant (en terme plus vectoriels, on dira qu'il y a égalité si $y \in \mathrm{Vect}(x)$ ou $x \in \mathrm{Vect}(y)$).

1.2 Orthogonalité

Définition 5. Un vecteur $x \in E$ est **unitaire** (ou **normé**) si $\|x\| = 1$. Deux vecteurs $(x, y) \in E^2$ sont **orthogonaux** si $x.y = 0$.

Exemple : La notion d'orthogonalité dépend évidemment du produit scalaire choisi. Si on se place sur $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $P.Q = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ dt$, alors les polynômes $P(X) = 1$ et $Q(X) = 1 - 2X$ sont orthogonaux : en effet, $P.Q = \displaystyle\int_0^1 1 - 2t\ dt = [t - t^2]_0^1 = 0$.

Théorème 3. Théorème de Pythagore.
Deux vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du calcul effectué plus haut : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2x.y + \|y\|^2$. □

Définition 6. Une famille de vecteurs non nuls $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est **orthogonale** si $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $i \neq j \Rightarrow e_i.e_j = 0$. Elle est **orthonormale** si de plus $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\|e_i\| = 1$. Si la famille $\mathcal{F}$ est une base, on parlera de **base orthogonale** ou de **base orthonormale**.

Proposition 2. Une famille orthogonale est nécessairement libre.

Démonstration. Supposons que la famille ne soit pas libre, c'est-dire que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$, alors, en notant $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, on a bien sûr $\|x\| = 0$, mais par ailleurs, pas bilinéarité, $x.x = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 e_i.e_i$ (tous les autres sont nuls par orthogonalité de la famille). Cette somme qui est constituée uniquement de termes positifs ne peut être nulle que si $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i^2 = 0$ (par hypothèse, $e_i \neq 0$, donc $(e_i.e_i) \neq 0$ par définition du produit scalaire). Finalement, notre combinaison linéaire est la combinaison nulle, ce qui prouve la liberté de la famille. □

Proposition 3. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale, alors

- $\forall x \in E$, $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n (x.e_i)e_i$ (autrement dit, les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ sont les réels $x.e_i$, qu'on notera plus simplement x_i).
- $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2$.
- $\forall (x, y) \in E^2$, $x.y = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Démonstration.

- On peut certainement décomposer le vecteur x dans la base $\mathcal{B}$, notons x_i ses coordonnées. On a donc $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i$. Calulons alors $x.e_j = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i(e_i.e_j) = x_j$ puisque $e_i.e_j$ est nul si $j \neq i$, et vaut 1 si $j = i$.
- Même type de calcul : $\|x\|^2 = x.x = \displaystyle\sum_{i,j=1}^n x_i x_j (e_i.e_j) = \sum_{i=1}^n x_i^2$.
- Même calcul que ci-dessus avec des y_j au lieu des x_j !

□

Définition 7. Soit F un sous-espace vectoriel de E, l'**orthogonal de** F est l'ensemble $\{x \in E \mid \forall y \in F, x.y = 0\}$. On le note $F^\perp$. Plus généralement, deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits **orthogonaux** si $\forall (x, y) \in F \times G$, $x.y = 0$.

Proposition 4. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $F^\perp$ est également un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. On peut faire une démonstration très théorique mais tout à fait correcte. Pour tout vecteur $y \in F$, l'ensemble des vecteurs x orthogonaux à y est un sous-espace vectoriel de E car c'est le noyau de l'application linéaire $x \mapsto x.y$ (elle est linéaire par bilinéarité du produit scalaire). L'orthogonal de Fr étant l'intersection de tous ces sous-espaces vectoriels lorsque y parcourt F, c'est bien un sous-espace vectoriel de E. □

Remarque 4. On peut en fait définir l'orthogonal, non seulement pour un sous-espace de E, mais pour n'importe quel sous-ensemble F de E. Dans ce cas, on vérifie facilement que $F^\perp = \mathrm{Vect}(F)^\perp$, ce qui prouve au passage que l'orthogonal reste un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 4. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E, alors il existe une unique famille orthonormale $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ telle que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_i)$, et $f_i.e_i > 0$.

Démonstration. La démonstration de ce résultat est presque plus importante que le résultat lui-même. Nous allons construire explicitement la famille $\mathcal{C}$ en appliquant une méthode connue sous le nom de **procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**. Elle fonctionne par étapes de la façon suivante :

- On pose $f_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ (autrement dit, on norme simplement le vecteur e_1).
- On pose $f_2' = e_2 - (e_2.f_1)f_1$, puis on norme le vecteur f_2' pour obtenir f_2.
- Plus généralement, à l'étape i, on pose $f_i' = e_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1}(e_i.f_k)f_k$, puis on norme le vecteur f_i' pour obtenir f_i.

La famille est construite pour être orthonormale, on le prouve par récurrence sur i. C'est certainement vrai au rang 1, puisqu'une famille d'un seul vecteur est toujours orthogonale, et que $\left\|\dfrac{e_1}{\|e_1\|}\right\| = 1$. Supposons la famille $(f_1, \dots, f_i)$ orthonormale, alors $\forall k \in \{1, \dots, i\}$, $f_{i+1}'.f_k = e_{i+1}.f_k - (e_{i+1}.f_k)(f_k.f_k) = 0$ puisque les autres termes s'annulent par hypothèse, et que $f_i.f_i = 1$. Le fait de normer ensuite le vecteur f_i' ne change pas le caractère orthogonal, donc la famille sera bien orthonormale. De plus, par construction, $f_{i+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i, e_{i+1})$. En faisant l'hypothèse de récurrence que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_i)$, on trouve alors $f_{i+1} \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_i, e_{i+1})$, et on en déduit facilement que $e_{i+1} \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_i, f_{i+1})$, d'où l'égalité des espaces vectoriels engendrés. Enfin, par construction, $f_i'.e_i = \|e_i\| > 0$, et le fait de normer ne change pas le signe.
L'unicité de la famille découle des propriétés des bases orthonormales, on démontre par récurrence que les seuls vecteurs orthogonaux simultanément à f_1, …, f_i sont les vecteurs proportionnels à f_{i+1}', et l'unicité découle alors de la condition sur la norme et du produit scalaire positif avec e_{i+1}. Nous ne rentrons pas plus dans les détails de cette deuxième partie technique de la démonstration. □

Corollaire 1. On peut compléter toute famille orthonormale de E en une base orthonormale. En particulier, il existe toujours des bases orthonormales dans un espace euclidien E.

Démonstration. On sait déjà qu'on peut compléter la famille en une base de E (c'est le théorème de la base incomplète classique). On applique alors le procédé de Gram-Schmidt à cette base, les premiers vecteurs qui constituaient la famille orthonormale ne seront pas modifiés et on obtiendra donc une base orthonormale dont les premiers éléments sont les vecteurs de notre famille. Si on applique Gram-Schmidt à une base quelconque de E, on trouvera des bases orthonormales. □

Exemple : Essayons de déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$, pour le produit scalaire $P.Q = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ dt$. Pour cela, on part de la base canonique $(1, X, X^2)$. Puisque $1.1 = \displaystyle\int_0^1 1\ dt = 1$, notre premier vecteur est déjà normé. Calculons alors $X.1 = \displaystyle\int_0^1 t\ dt = \frac{1}{2}$, on pose alors $P_2' =$

$X - (X.1) \times 1 = X - \frac{1}{2}$, puis on norme le vecteur : $P_2'.P_2' = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \, dt = \int_0^1 t^2 - t + \frac{1}{4} \, dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. On posera donc $P_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} X - \frac{1}{4\sqrt{3}}$. Enfin, on calcule $X^2.1 = \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3}$, et $X^2.P_2 = \frac{1}{\sqrt{12}} X^2.\left(X - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{12}}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12\sqrt{12}}$. On va donc poser $P_3 = X^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{144}\left(X - \frac{1}{2}\right) = X^2 - \frac{1}{144} X - \frac{95}{288}$. On peut calculer si on y tient vraiment $P_3'.P_3'$, mais les calculs sont passablement ignobles. Bref, même si la méthode de Gram-Schmidt est imparable en théorie, il ne faudra pas être surpris en pratique de devoir faire de gros calculs.

Proposition 5. Soit F un sous-espace vectoriel de E, alors F et $F^\perp$ sont deux sous-espaces vectoriel supplémentaires de E.

Démonstration. Considérons une base orthonormale $(f_1, \dots, f_k)$ de F et complétons-là en une base orthonormale $(f_1, \dots, f_n)$ de E, alors $(f_{k+1}, \dots, f_n)$ est une base (orthonormale) de $F^\perp$. En effet, soit $x \in E$, notons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$, la base étant orthonormale, $x_i = x.f_i$ et x est donc orthogonal à tous les vecteurs f_1, …, f_k si et seulement si il appartient à $\mathrm{Vect}(f_{k+1}, \dots, f_n)$. Comme $x \in F^\perp \Leftrightarrow x \in \{f_1, \dots, f_k\}^\perp$, notre affirmation en découle. Puisque les deux sous-espaces contiennent des bases dont la réunion forme une base de E, ils sont supplémentaires (leur somme est nécessairement égale à E, et $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$). □

Définition 8. Le sous-espace $F^\perp$ est appelé **supplémentaire orthogonal de** F.

Théorème 5. Théorème de représentation de Riesz.
Soit $f; E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire, alors il existe unique vecteur $a \in E$ tel que, $\forall x \in E$, $f(x) = x.a$.

Démonstration. Commençons par prouver l'unicité, en supposant comme souvent qu'il existe deux vecteurs a et b convenables. On a alors $\forall x \in E$, $x.a = x.b$, donc $x.(a - b) = 0$. C'est en particulier vrai pour $a - b$ lui-même, qui vérifie alors $\|a - b\|^2 = 0$, ce qui n'est possible que si $a = b$. Pour l'existence, le plus simple est d'utiliser de la dimension. On sait que l'ensemble F de toutes les formes linéaires sur E est isomorphe à l'ensemble des matrices réelles à 1 ligne et n colonnes, donc $\dim(F) = n$. Notons $\varphi : E \to F$ l'application $a \mapsto f_a$, où $f_a(x) = x.a$. L'application f_a est certainement linéaire car le produit scalaire est bilinéaire, de plus $a \mapsto f_a$ est elle-même linéaire : $f_{\lambda a + \mu b}(x) = (\lambda a + \mu b).x = \lambda(a.x) + \mu(b.x) = \lambda f_a(x) + \mu f_b(x)$. L'application φ étant une application linéaire entre deux espaces de même dimension n, elle sera surjective si (et seulement si) elle est injective. Or, si on suppose $\varphi(a) = 0$, c'est-à-dire $f_a = 0$, on a donc $\forall x \in E$, $x.a = 0$. En particulier, $a.a = 0$, ce qui implique $a = 0$. L'application φ est donc bien injective, et surjective (par la même occasion on a prouvé la bijectivité, ce qui rend inutile le début de notre démonstration). □

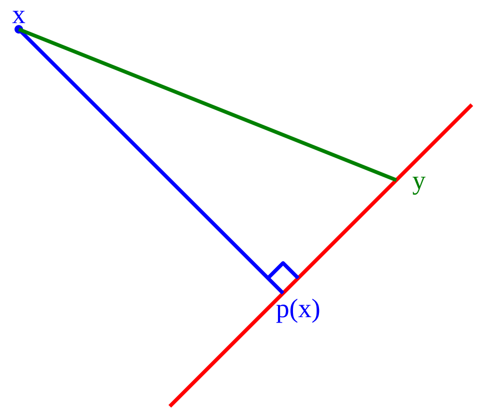
1.3 Projections et symétries orthogonales

Définition 9. Un endomorphisme de E est une **projection orthogonale** s'il s'agit d'un projecteur p pour lequel $\ker(p) \perp \mathrm{Im}(p)$. De façon équivalente, une projection orthogonale est une projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $(\mathrm{Im}(p))^\perp$ puisqu'on sait déjà que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires pour un projecteur. L'image $p(x)$ du vecteur x par p est alors appelé **projeté orthogonal de** x **sur** $\mathrm{Im}(p)$.

Remarque 5. Si $(e_1, \dots, e_k)$ est une base de $\mathrm{Im}(p)$, alors $p(x) = \sum_{i=1}^{k} (x.e_i)e_i$.

Proposition 6. Soit F un sous-espace vectoriel de E. En notant $d(x, F) = \inf_{y \in F} d(x, y)$ la distance de x à F, alors cette distance est atteinte en un unique point, qui est le projeté orthogonal de x sur F.

Démonstration. Considérons un vecteur $y \in F^\perp$ et faisons le petit schéma suivant :



Les vecteurs $y - p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux. En effet, $y - p(x) \in F^\perp$ puisque les deux vecteurs y et $p(x)$ appartiennent à $F^\perp$. Par ailleurs, $x - p(x) \in \ker(p) = F$. On en déduit via le théorème de Pythagore que $\|y - x\|^2 = \|x - p(x)\|p^2 + \|y - p(x)\|^2 \geqslant \|p(x) - x\|^2$. Cela prouve d'une part que la distance de x à $p(x)$ est bien minimale, et par ailleurs que $p(x)$ est l'unique point pour lequel elle est atteinte puisque, si $y \neq p(x)$, l'inégalité est stricte. □

Définition 10. Un endomorphisme de E est une **symétrie orthogonale** s'il s'agit d'une symétrie s pour laquelle $\ker(s - \mathrm{id}) \perp \ker(s + \mathrm{id})$. On l'appelle alors **symétrie orthogonale par rapport à** $\ker(s - \mathrm{id})$.

Définition 11. Une **réflexion** est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

1.4 Endomorphismes orthogonaux

Définition 12. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est appelé **endomorphisme orthogonal** ou **isométrie** si $\forall (x, y) \in E^2$, $u(x).u(y) = x.y$. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de l'espace euclidien E.

Remarque 6. Un endomorphisme est donc orthogonal s'il conserve le produit scalaire, ce qui est une condition naturelle. Attention tout de même au vocabulaire, une symétrie orthogonale est un endomorphisme orthogonal, mais pas une projection orthogonale ! En effet, pour une projection p, on peut trouver des vecteurs x non nuls pour lesquels $p(x) = 0$, et dans ce cas $x.x \neq p(x).p(x)$.

Proposition 7. Un endomorphisme est orthogonal si et seulement s'il conserve la norme : $u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow \forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.

Démonstration. En effet, si u est orthogonal, on aura toujours $u(x).u(x) = x.x$, donc $\|u(x)\| = \|x\|$. La réciproque découle de l'identité de polarisation. Cette propriété explique le terme d'isométrie, ce sont des applications qui conservent les longueurs. □

Proposition 8. Un endomorphisme orthogonal est nécessairement bijectif.

Démonstration. Pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, être bijectif ou injectif est équivalent. Or, si $u(x) = 0$, d'après la propriété précédente, on aura $\|x\| = 0$, donc $x = 0$, ce qui prouve l'injectivité et donc la bijectivité de u. □

Théorème 6. Le groupe $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.

Démonstration. On vient de voir que $\mathcal{O}(E) \subset GL(E)$. De plus, $\mathcal{O}(E)$ est stable par composition (si deux endomorphismes conservent la norme, leur composée la conserve aussi), contient l'élément neutre de $GL(E)$ (qui est l'application identité), et est également stable par passage à l'inverse (si u conserve la norme, u^{-1} aussi). □

Proposition 9. Un endomorphisme u est orthogonal si et seulement s'il vérifie, au choix, l'une des deux conditions suivantes :

- L'image par u de toute base orthonormale de E est une base orthonormale.
- L'image par u d'une base orthonormale fixée de E est une base orthonormale.

Démonstration. La première caractérisation implique évidemment la deuxième. Supposons que l'image d'une certaine base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ soit une autre base orthonormale $(f_1, \dots, f_n)$. Choisissons un vecteur $x \in E$, et notons respectivement $(x_1, \dots, x_n)$ ses coordonnées dans notre première base. On sait alors que $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Or, par linéarité de u, $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$, et comme la deuxième base est aussi orthonormale, $\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2$. Ceci prouve que u conserve la norme, c'est donc un endomorphisme orthogonal. démontrons enfin que l'orthogonalité de u implique la première caractérisation pour achever notre preuve. Supposons donc que u est orthogonal, et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale quelconque de E. Notons $f_i = u(e_i)$, comme u conserve la norme on peut affirmer que $\|f_i\| = \|e_i\| = 1$. De plus, si $i \neq j$, $f_i.f_j = u(e_i).u(e_j) = e_i.e_j = 0$. La base $(f_1, \dots, f_n)$ est donc également orthonormale. □

Définition 13. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** si elle est la matrice représentative d'un endomorphisme u dans une base orthonormale. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les matrices orthogonales.

Proposition 10. $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tAA = I$.

Démonstration. Supposons que ${}^tAA = I$, et notons u l'endormorphisme représenté par A dans une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ orthonormale. Dire que ${}^tAA = I$ signifie deux choses : pour chaque colonne de A, la somme des carrés des éléments de la colonne est égale à 1 (c'est le calcul qu'on fait pour obtenir $({}^tAA)_{ii}$, ce qui revient à dire que $u(e_i)$ est un vecteur de norme 1 ; et si on effectue le calcul $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$ pour $i \neq j$, on obtient 0, ce qui revient cette fois-ci à dire que $u(e_i)$ et $u(e_j)$ sont orthogonaux. Autrement dit, l'image de notre base orthonormale est une base orthonormale, donc u est orthogonal. La réciproque se fait exactement de la même façon. □

Remarque 7. Attention dans la définition des matrices orthogonales à ne pas oublier qu'on doit se placer dans une base orthonormale. Dans une base qualconque, la matrice d'une application orthogonale peut ressembler à n'importe quoi (d'inversible tout de même puisque u est bijectif). Au passage, notre dernière propriété confirme que A est une matrice inversible, et même que son inverse est sa transposée.

Exemple : La matrice $A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ -1 & 8 & -4 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale. Pour le vérifier, on peut évidement calculer ${}^tAA$, mais on peut aussi utiliser le petit truc suivant : on vérifie que les colonnes « sont de norme 1 » et « orthogonales entre elles » comme expliqué dans la démonstration ci-dessus. Ici, $\frac{1}{9}\|(8, -1, 4)\| = \frac{1}{9}\sqrt{64 + 1 + 16} = 1$ et de même pour les deux autres colonnes ; et $(8, -1, 4).(-1, 8, 4) = -8 - 8 + 16 = 0$, et de même pour les deux autres produits scalaires de colonnes.

Proposition 11. Une matrice A est orthogonale si et seulement si ses vecteurs-colonnes forment une base orthonormale de E. De même pour les vecteurs-lignes.

Démonstration. On vient de voir que c'est une autre façon de dire exactement la même chose que dans la proposition précédente. Si ça marche pour les colonnes, ça marche pour les lignes, car A est orthogonale si et seulement si ${}^tA$ l'est (cela découle de l'égalité ${}^tAA = I$). $\square$

Proposition 12. La matrice de passage entre deux bases orthonormales est une matrice orthogonale.

Proposition 13. En effet, elle est la matrice dans la première base de l'application qui transforme cette première base orthonormale en la deuxième, orthonormale aussi. Puisque cette application tranforme une base orthonormale en une autre base orthonormale, elle est orthogonale, et sa matrice dans une base orthonormale est donc orthogonale.

Proposition 14. Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A) = \pm 1$. L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 est noté $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$, l'ensemble de celles de déterminant -1 est noté $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ (non, n'insistez pas, il n'y a pas d'équivalent à la notation $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ dans ce cas-là).

Démonstration. On sait que ${}^tAA = I$, et que $\det({}^tA)\det(A)$, donc $\det(A)^2 = \det(I) = 1$, la propriété en découle. $\square$

Définition 14. Une isométrie est **directe** si sa matrice dans une base orthonormale appartient à $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, elle est **indirecte** sinon.

Remarque 8. Cette définition est une arnaque puisqu'on n'a pas prouvé que la matrice de u dans n'importe quelle base orthonormale a toujours le même déterminant. En fait, c'est plus général que ça : le déterminant de la matrice représentative d'un endomorphisme (orthogonal ou pas) ne dépend pas de la base choisie (orthonormale ou pas) puisque $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$. Pour les fans de nomenclature, l'ensemble des isométries directes est noté $\mathcal{SO}(E)$ ou $\mathcal{O}^+(E)$ et appelé groupe spécial orthogonal. Vous l'aurez deviné, l'ensemble des isométries indirectes est noté $\mathcal{O}^-(E)$.

1.5 Isométries du plan

Dans ce paragraphe et dans le suivant, on supposera $\mathbb{R}_2$ (ou $\mathbb{R}_3$) muni du produit scalaire usuel.

Théorème 7. Toute matrice $A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, où $\theta \in \mathbb{R}$. L'application f ayant pour matrice A dans n'importe quelle base orthonormale est appelée **rotation d'angle** θ.

Démonstration. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$. On peut traduire l'égalité ${}^tAA = I$ par le système d'équations suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcl} a^2 & + & b^2 & = & 1 \\ ac & + & bd & = & 0 \\ b^2 & + & d^2 & = & 1 \end{array}\right.$ (deux des équations obtenues sont identiques). On a de plus la condition $\det(A) = ad - bc = 1$. La dernière équation permet de poser $c = \cos(\theta)$ et $d = \sin(\theta)$, et la première de poser $a = \cos(\alpha)$ et $b = \sin(\alpha)$, pour deux réels α et θ. La deuxième condition devient alors $\cos(\alpha)\cos(\theta) + \sin(\alpha)\sin(\theta) = 0$, soit $\cos(\alpha - \theta) = 0$, et celle sur le déterminant donne de même $\sin(\theta - \alpha) = 1$. Autrement dit, on aura $\alpha = \theta + \frac{\pi}{2}$, et donc $\cos(\alpha) = \cos(\theta)$ et $\sin(\alpha) = -\sin(\theta)$, ce qui donne bien la matrice annoncée. $\square$

Remarque 9. La matrice d'une rotation dans le plan est indépendante de la base orthonormale choisie. Bien évidemment, dans une base qui n'est pas orthonormale, la matrice peut changer.

Définition 15. Un **retournement** est une rotation plane d'angle $\theta = \pi$.

Remarque 10. C'est ce que vous avez appelé pendant des années une symétrie centrale, terme que nous n'utiliseront plus jamais même si l'application f est de fait dans ce cas une symétrie.

Proposition 15. $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \circ)$ est un groupe commutatif.

Démonstration. Plus généralement, $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. En effet, il est stable par composition, la composée de deux isométries directes étant necssairement directe (si on prend les matrices dans une base orthonormale fixée, le produit de deux matrices de déterminant 1 a un déterminant 1). Par contre, la commutativité est très spécifique à la dimension 2. Soient deux matrices de rotation correspondant à des rotations d'angle respectif θ et φ. Alors $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) & -\cos(\theta)\sin(\varphi) - \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) + \sin(\theta)\cos(\varphi) & -\sin(\theta)\sin(\varphi) + \cos(\theta)\cos(\varphi) \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$. Nous venons brillamment de prouver que la composition de deux rotations planes (centrée en l'origine du repère) est une rotation d'angle égal à la somme des angles des deux rotations. Faire le produit dans l'autre sens donnera donc la même chose, ce qui prouve la commutativité du groupe. notons au passage que la réciproque de la rotation d'angle θ sera la rotation d'angle $-\theta$ (puisque leur composée a un angle nul, donc est égale à l'identité). $\square$

Proposition 16. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ un vecteur unitaire, et u une rotation plane d'angle θ, alors $u(x).x = \cos(\theta)$ et $\det(u(x), x) = \sin(\theta)$.

Démonstration. Si on complète x en une base orthonormale du plan (x, y), on aura $u(x) = \cos(\theta)x - \sin(\theta)y$, puis $u(x).x = (\cos(\theta), -\sin(\theta)).(1, 0) = \cos(\theta)$ (en prenant les coordonnées dans la base (x, y), et $\det(x, u(x)) = \sin(\theta)$. $\square$

Remarque 11. Cette propriété est surtout utile dans l'autre sens : à partir de l'image d'un unique vecteur (unitaire ou non), on peut déterminer facilement l'angle d'une rotation plane.

Théorème 8. Toute matrice $A \in \mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. L'application u ayant pour matrice A dans une base orthonormale est une réflexion.

Démonstration. La preuve que la matrice peut se mettre sous cette forme est identique à celle vue pour les isométries directes, à un changement de signe près à un endroit, nous nous épargnerons les calculs. Il est facile de constater que u est une symétrie (nécessairement orthogonale) en calculant $A^2 = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{pmatrix} = I$. C'est nécessairement une symétrie par rapport à une droite vectorielle, donc une réflexion. En effet, si le sous-espace par rapport auquel on symétrise n'est pas une droite, il s'agit soit de $\{0\}$ et alors $u = -\,\mathrm{id}$, soit de $\mathbb{R}^2$ et $u = \mathrm{id}$. Dans les deux cas, u ne serait pas une isométrie indirecte. $\square$

Remarque 12. Dans le cas des réflexions, la matrice de u n'est pas du tout la même dans toutes les bases orthonormales. Par ailleurs, l'angle θ est beaucoup moins facile à interpréter géométriquement que dans le cas d'une rotation.

Remarque 13. Toute rotation dans le plan peut s'écrire comme composée de deux réflexions. En effet, $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & -\cos(-\theta) \end{pmatrix}$.

1.6 Isométries de l'espace

Définition 16. Tout élément de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ est appelé **matrice de rotation** dans l'espace.

Théorème 9. Soit u une isométrie directe de l'espace, alors $F = \ker(u - \mathrm{id})$ est de dimension 1. Si (v, w) est une base orthonormale de $F^{\perp}$, alors la matrice de u dans la base orthonormale $(v, w, v \wedge w)$ est $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration. Nous ne ferons pas la preuve de ce résultat dans l'espace. On ne peut pas s'en sortir avec des calculs brutaux comme dans le plan, il faut donc une preuve plus technique. □

Définition 17. Une isométrie directe ayant pour matrice A dans une base orthonormale est appelée **rotation d'axe dirigé par** $v \wedge w$ **et d'angle** θ.

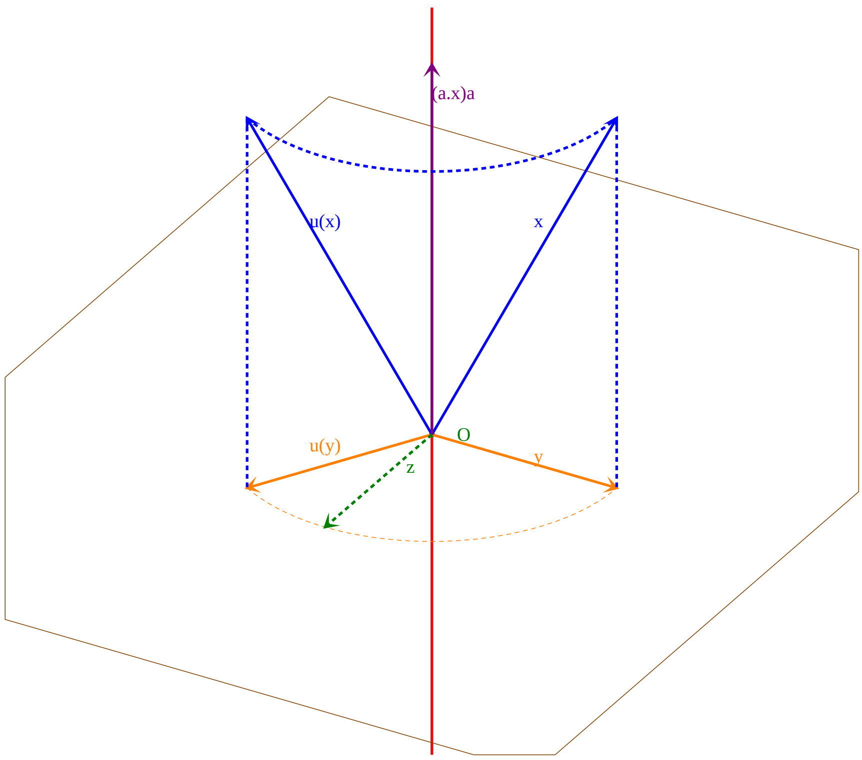
Remarque 14. Une rotation spatiale reste assez facile à visualiser : l'axe ne bouge pas, et le plan orthogonal à l'axe subit une rotation d'angle θ (autrement dit, on tourne d'un angle θ autour de l'axe). Voir le schéma plus bas. Notons quand même que la définition est un peu douteuse, car l'angle de la rotation dépend du vecteur choisi pour diriger l'axe. En effet, si on prend le vecteur opposée, l'angle va être également changé en son opposé.

Proposition 17. La composée de deux rotations dans l'espace est une rotation.

Démonstration. En effet, comme dans le plan, la composée reste une isométrie directe, donc une rotation. Mais pour le coup, ça n'a rien de géométriquement évident (et en particulier, l'angle de la rotation composée n'est pas évident à déterminer à partir de ceux des deux rotations). □

Proposition 18. Soit u la rotation d'axe $F = \mathrm{Vect}(a)$, avec a unitaire, et d'angle θ, alors $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $u(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)a \wedge x + (1 - \cos(\theta))(a.x)a$.

Remarque 15. Dans le cas particulier où $x \in F^{\perp}$, on trouve plus simplement $u(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)(a \wedge x)$, on peut donc retrouver facilement l'angle de la rotation, quasiment comme dans le cas d'une rotation plane, à l'aide des relations $x.u(x) = \cos(\theta)$ et $\det(x, u(x), a) = \sin(\theta)$ (en choisissant un vecteur x unitaire). Sur la figure ci-dessous, l'axe de la rotation est en rouge, le plan orthogonal en marron, le vecteur noté z est $y \wedge a$.



Démonstration. La projection de x sur l'axe de la rotation est simplement donnée par $(a.x)a$. Posons $y = x - (a.x)a$, alors $(y, y \wedge a)$ est une base orthogonale directe de $F^\perp$ constituée de deux vecteurs de même norme. De plus, $y \wedge a = (x - (a.x)a) \wedge a = x \wedge a$ puisque $a \wedge a = 0$. On en déduit que $u(y) = \cos(\theta)y - \sin(\theta)(x \wedge a)$, donc $u(x) = u(y + (a.x)a) = \cos(\theta)y + \sin(\theta)(a \wedge x) + (a.x)a$ (puisque a est laissé fixe par la rotation). Autrement dit, $u(x) = \cos(\theta)x - \cos(\theta)(a.x)a + \sin(\theta)(a \wedge x) + (a.x)a$, ce qui est bien la formule donnée. □

Exemple : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice est orthogonale puisque $\dfrac{1}{3}\|(2,2,1)\| = \dfrac{1}{3}\sqrt{4+4+1} = 1$; $\dfrac{1}{3}\|(-2,1,2)\| = 1$; $\dfrac{1}{3}\|(1,-2,2)\| = 1$; $(2,2,1).(-2,1,2) = -4+2+2 = 0$; $(2,2,1).(1,-2,2) = 0$ et $(-2,1,2).(1,-2,2) = 0$. Il s'agit donc de la matrice d'une isométrie.

On calcule ensuite le déterminant pour déterminer si l'isométrie est directe : $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 3 + 3 \times 6 = 27$, donc $\det(A) = \dfrac{1}{3^3} \times 27 = 1$. Il s'agit d'une isométrie directe, donc d'une rotation.

On cherche ensuite l'axe de la rotation, en déterminant simplement $\ker(u - \mathrm{id})$. quitte à tout multiplier par 3, on doit résoudre le système $\begin{cases} 2x + 2y + z = 3x \\ -2x + y + 2z = 3y \\ x - 2y + 2z = 3z \end{cases}$. La deuxième équation donne $z = x + y$, et la dernière donne $2y = x - z$, soit $2y = -y$. Manifestement, cela implique $y = 0$, puis $z = x$; la première équation donne alors $3x = 3x$, donc $\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}((1,0,1))$, qui est bien une droite F.

On choisit maintenant un vecteur unitaire $x \in F^\perp$. Ce n'est pas bien compliqué ici, il suffit de prendre $x = (0,1,0)$. On peut alors calculer, en notant θ l'angle de la rotation, $\cos(\theta) = x.u(x)$. Puisque $u(0,1,0) = \dfrac{1}{3}(2,1,-2)$, on trouve $\cos(\theta) = \dfrac{1}{3}$. En posant $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$ (vecteur directeur unitaire de l'axe), on peut ensuite calculer $\det(x, u(x), a) = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. On en déduit que $\sin(\theta) = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, donc $\theta = -\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$. Seul le signe de $\sin(\theta)$ était nécessaire pour conclure, mais l'avantage de l'avoir calculé explicitement est de pouvoir vérifier que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = \dfrac{1}{9} + \dfrac{8}{9} = 1$. On peut en tout cas désormais affirmer que u est la rotation d'axe $\mathrm{Vect}((1,0,1))$ et d'angle $\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Remarque 16. Un autre moyen de vérifier la cohérente des calculs est d'utiliser la trace de la matrice. En effet, celle-ci est invariante par changement de repère, donc est égale à $2\cos(\theta) + 1$ dans n'importe quel repère. Ici, on pouvait donc calculer dès le départ $\mathrm{Tr}(A) = \dfrac{5}{3} = 2\cos(\theta) + 1$, et en déduire que $\cos(\theta) = \dfrac{1}{3}$.

Théorème 10. (Hors-programme). Si u est une réflexion dans l'espace, elle a pour matrice dans une base orthonormale bien choisie $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, toute isométrie indirecte de l'espace est la composée d'une rotation (éventuellement égale à id) et d'une réflexion.

Remarque 17. On peut toujours écrire dans l'espace une rotation comme composée de deux réflexions (c'est exactement le même calcul que dans le plan, en ajoutant un 1 en bas à droite de la matrice et des 0 ailleurs sur la dernière ligne et la dernière colonne). Il existe donc trois types d'isométries vectorielles dans l'espace :

- les réflexions, qui laissent tout un plan fixe et sont indirectes.
- les produits de deux réflexion, qui sont des rotations, laissent une droite fixe et sont directes.
- les produits de trois réflexions ne laissent que le vecteur nul invariant et sont indirectes.

Ainsi, dans l'espace, $-\operatorname{id}$ est une isométrie indirecte qui est un produit de trois réflexions (par exemple par rapport aux trois axes du repère canonique). Ce n'est absolument pas la rotation d'angle π autour de l'origine, cette application n'étant pas une rotation avec la définition que nous avons prise. Pour les plus curieux, le théorème précédent se généralise en dimension n, où les isométries peuvent toujours être écrites comme produit d'au plus n réflexions.

2 Géométrie affine

La différence entre la géométrie affine et la géométrie vectorielle est très simple : en géométrie vectorielle, on ne travaille qu'avec des vecteurs, alors qu'en géométrie affine, on parlera de points. Mais dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (seuls exemples que nous étudierons réellement), la différence entre les deux notions est minime, pusiqu'on repérer les vecteurs comme les points à l'aide de coordonnées. Le seul détail qui va faire une différence entre cette partie du cours et tout ce qu'on a déjà fait sur les espaces vectoriels, c'est la notion d'origine du repère. Dans le cadre vectoriel, l'origine O du prepère ne peut pas être modifiée ; en géométrie affine, au contraire, on pourra chenger d'origine.

2.1 Espaces affines

Définition 18. Soit E un espace vectoriel (quelconque) et $u \in E$, la **translation de vecteur** u **dans** E est l'application $t_u : x \mapsto x + u$.

Remarque 18. Cette application n'est absolument pas une application linéaire (sauf dans le cas très particulier $u = 0$).

Proposition 19. La translation t_u est une bijection de réciproque t_{-u}. Muni de la composition, l'ensemble des translations de E est un groupe.

Démonstration. C'est évidemment trivial, puisque $t_{-u}(t_u(x)) = x + u - u = x$. □

Définition 19. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $u \in E$, l'ensemble $A = \{u + x \mid x \in F\} = t_u(F)$ est appelé **sous-espace affine de** E **de direction** F. Une base de F sera alors appelée **ensemble de vecteurs directeurs de** F.

Exemple : N'importe quel plan de $\mathbb{R}^3$, passant par l'origine ou non, est un sous-espace affine. De même pour toute droite de $\mathbb{R}^3$. En fait, les seuls sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$, outre $\mathbb{R}^3$ lui-même, sont les points, les droites et les plans.
Nous avons également déjà croisé des sous-espaces affines dans des espaces nettement plus compliqués : ainsi, l'ensemble des solutions d'une équationd différentielle linéaire (non homogène) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^\infty(I)$ (I étant l'intervalle de définition de l'équation). C'est exactement ce que signifie la méthode « solution particulière + solution de l'équation homogène » que nous utilisons pour résoudre ce genre d'équations. Les solutions de l'équation homogène forment un sous-espace vectoriel, qu'on translate via la solution particulière.

Définition 20. Un élément d'un sous-espace affine A est appelé **point** et usuellement noté M. On utilisera les notations un peu abusives suivantes : $M + u$ pour désigner $t_u(M)$ (M restant bien évidemment un élément de E même si on le voit ici comme un point) ; ou $M + F$ pour désigner le sous-espace affine de direction F contenant M (il est unique), qu'on appelle aussi **sous-espace**

affine passant par M **et de direction** F ; on notera également, si $N = t_u(M)$, $u = N - M$, ou encore plus classiquement $u = \overrightarrow{NM}$ (notation qu'on utilisera en fait très peu).

Remarque 19. Si deux points M et N appartiennent à un même sous-espace affine A, alors le vecteur $\overrightarrow{MN}$ appartient à sa direction F. C'est même une équivalence.

Définition 21. Soient A et B deux sous-espaces affines de direction respective F et G, A est **parallèle à** B si $F \subset G$.

Remarque 20. Attention, cette définition, même si elle correspond bien à la notion intuitive de parallélisme, a la particularité de ne pas être symétrique. Ainsi, si on considère une droite et un plan « parallèles » dans l'espace (c'est-à-dire qu'un vecteur directeur de la droite peut être complété en base du plan), on dira que la droite est parallèle au plan, mais on ne peut pas dire que le plan est parallèle à la droite.

Proposition 20. Soient A et B deux sous-espaces affines de E, de directions respectives F et G, alors $A \cap B$ est, soit vide, soit un sous-epace affine de E de direction $F \cap G$.

Démonstration. Supposons donc que $A \cap B \neq \emptyset$, et soit $M \in A \cap B$. Alors, $\forall x \in F \cap G$, $M + x \in A \cap B$, donc $M + (F \cap G) \subset A \cap B$. Réciproquement, si $N \in A \cap B$, comme $M \in A \cap B$ également, $M - N \in F$ et $M - N \in G$, donc $M - N \in F \cap G$ et $N = M + (M - n) \in M + (F \cap G)$. Finalement, $A \cap B = M + (F \cap G)$, qui est bien un sous-espace affine de direction $F \cap G$. □

2.2 Applications affines

Définition 22. Une application $f : E \to E$ est une **application affine** s'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\forall (M, N) \in E^2$, $\overrightarrow{f(M)f(N)} = u(\overrightarrow{MN})$. De façon équivalente, $\forall M \in E$, $\forall x \in E$, $f(M + x) = f(M) + u(x)$.

Remarque 21. Nous avons décidé par souci de simplicité de nous restreindre à des endomorphismes affines pour ce cours, mais on définit de même des application affines d'un espace vectoriel vers un autre.

Démonstration. L'équivalence entre les deux définitions est assez immédiate. La première condition peut s'écrire $f(N) - f(M) = u(\overrightarrow{MN})$, ce qui correspond exactement à la deuxième condition en posant $x = \overrightarrow{MN}$ (et donc $M + x = N$). Le passage dans l'autre sens se fait de la même façon en posant $N = M + x$. □

Remarque 22. Si f est une application affine, l'application linéaire u est unique (en effet, $u(x) = f(x) - f(0)$ pour tout vecteur x). Par ailleurs, f est uniquement déterminée par la connaissance de u et de $f(0)$. L'application u est parfois appelée **partie linéaire** de f.

Exemple : L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x - y + 3, x - 3y + 2)$ est une application affine, de partie linéaire $u : (x, y) \mapsto (2x - y, x - 3y)$. En fait, la remarque précédente permet de comprendre que toute application affine sera de la même forme que f : une application linéaire à une constante près pour chaque coordonnée.

Proposition 21. Les applications affines conservent le parallélisme, l'alignement, et les barycentres.

Démonstration. Pour le parallélisme, c'est assez simple : si A et B sont deux sous-espaces affines de directions respectives F et G, alors $f(A)$ et $f(B)$ sont des sous-espaces affines de direction $u(F)$ et $u(G)$ (mais si, c'est évident : $f(A) = f(M + F) = f(M) + f(0) + u(F)$, idem pour B). Et comme $u(F) \subset u(G)$ si $F \subset G$, la conservation du parallélisme en découle. Nous n'avons pas vraiment défini clairement les notions d'alignement et de barycentres, mais les résultats les concernant ne sont pas plus compliquées. Hop, on passe les détails techniques. □

Théorème 11. Soit f une application affine, X un vecteur-colonne de E et $f(X)$ son image par f, alors il existe une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice-colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (indépendantes de X) telles que $f(X) = AX + B$.

Démonstration. C'est une conséquence triviale du fait que $f(x) = f(0) + u(x)$: la matrice A est la matrice représentative de u, et B est simplement la matrice-colonne des coordonnées de $f(0)$. □

Remarque 23. On reconnait dans le forme $f(X) = AX + B$ les équations de fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui sont effectivement un cas très particulier d'applications affines dans un espace vectoriel de dimension 1.

Définition 23. Un **isomorphisme affine** est une application affine bijective.

Proposition 22. Une application affine f est bijective si et seulement si sa partie linéaire u est bijective. Dans ce cas, f^{-1} est une application affine de partie linéaire u^{-1}.

Démonstration. C'est essentiellement trivial, puisque f est simplement la composée de u par une translation qui est bijective. Si $f = t_x \circ u$, alors $f^{-1} = u^{-1} \circ t_{-x}$. □

Proposition 23. L'ensemble des isomorphismes affines de E, muni de la composition, est un groupe.

Remarque 24. Les translations sont tout simplement les isomorphismes affines dont la partie linéaire est l'identité. Elles forment un sous-groupe du groupe des isomorphismes affines.

Définition 24. Une **homothétie de centre** M **et de rapport** λ est une application affine h telle que $\forall N \in E$, $h(N) - h(M) = \lambda(N - M)$.

Proposition 24. Les homothéties affines sont exactement les applications affines dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle, c'est-à-dire de la forme $\lambda\,\mathrm{id}$.

Démonstration. C'est encore une fois à peu près évident : par définition, $h(N) = h(M) + \lambda(N - M)$, donc la partie linéaire de h est $\lambda\,\mathrm{id}$. □

Définition 25. Une **projection affine** est une application affine dont la partie linéaire est un projecteur. Une **symétrie affine** est une application affine dont la partie linéaire est une symétrie.

Remarque 25. Ce sont en fait de très mauvaises définitions. Il vaudrait mieux définir une projection comme une application qui, une fois deux sous-espaces affines A et B fixés dont les directions sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, associe à un point $M = \Omega + x_F + x_G$, où $\Omega \in A \cap B$, $x_F \in F$ et $x_G \in G$, le point $p(M) = \Omega + x_F$. Pour cela, il faudrait prouver que la décomposition donnée est unique, et on retrouve alors facilement la caractérisation donnée ci-dessus en définition. Même chose pour les symétries.

2.3 Isométries affines

Pour tout ce dernier paragraphe, on se place désormais dans un espace euclidien E (qui va vite être restreint aux cas de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ munis du produit scalaire usuel).

Définition 26. Une application $f : E \to E$ est une **isométrie affine** si f conserve les distances : $\forall (M, N) \in E^2$, $f(M)f(N) = MN$.

Remarque 26. En géométrie affine, on utilise plus volontiers pour les distances la notation MN que la notation $d(M, N)$. La définition reste évidemment la même : $MN = \|M - N\|$. Notons par ailleurs que, dans la définition d'une isométrie affine, f n'est pas supposée être une application affine. Mais le théorème suivant va régler ce petit souci.

Théorème 12. Une application $f : E \to E$ est une isométrie affine si et seulement si f est une application affine dont la partie linéaire est une isométrie.

Démonstration. La partie réciproque est évidente : si la partie linéaire conserve les normes (donc les distances), f aussi, une translation étant clairement une isométrie. Dans l'autre sens, posons $\forall x \in E$, $u(x) = f(x) - f(0)$. Cette application étant la composée de f par une translation, elle conserve les distances, donc les normes. Par identité de polarisation, elle conserve alors également le produit scalaire : $\forall (x, y) \in E^2$, $u(x).u(y) = x.y$. Fixons alors une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Son image par u est nécessairement une base orthonormale $(f_1, \dots, f_n)$ puisque u conserve le produit scalaire et la norme. Posons alors, pour un vecteur quelconque $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On sait que $x_i = x.e_i$. Par conservation du produit scalaire, on a alors $u(x).u(e_i) = x_i$, donc $u(x).f_i = x_i$, et ce quel que soit l'indice i. Ceci implique que $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$. Comme l'égalité est vraie pour tout vecteur x, l'application u est bien linéaire, ce qui achève notre preuve. □

Définition 27. Un **déplacement** est une isométrie affine dont la partie linéaire est une isométrie directe. Un **antidéplacement** est une isométrie affine dont la partie linéaire est une isométrie indirecte. Une **similitude directe** est la composée d'un déplacement par une homothétie (affine) de rapport strictement positif (appelé **rapport** de la similitude). Une **similitude indirecte** est de même la composée d'un antidéplacement par une homothétie de rapport strictement positif.

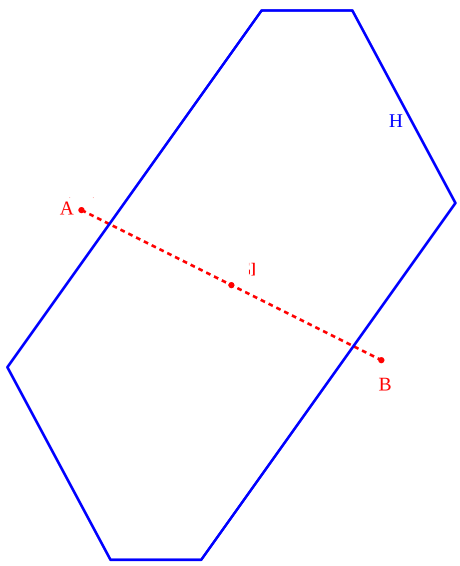
Remarque 27. De façon équivalente, une similitude est une application affine dont la partie linéaire est de la forme λu, avec $\lambda > 0$ et $u \in \mathcal{O}(E)$.

Définition 28. Une **projection orthogonale affine** est une application affine dont la partie linéaire est une projection orthogonale. On définit de même les symétries orthogonales et les réflexions affines.

Remarque 28. Les symétries orthogonales affines sont des isométries affines, mais ce n'est bien sûr pas le cas des projections orthogonales qui ne sont pas bijectives. Toutes ces applications correspondent bien à l'intuition qu'on peut en avoir.

Proposition 25. Soient A et B deux points distincts de E, il existe une unique réflexion s telle que $s(A) = B$ et $s(B) = A$. L'hyperplan (affine) H par rapport auquel s'effectue cette réflexion est appelé **hyperplan médiateur du segment** $[AB]$. Il est constitué de tous les points équidistants de A et de B.

Démonstration. On démontre facilement, comme dans le cas du plan (où l'hyperplan médiateur d'un segment devient beaucoup plus simplement la droite médiatrice de ce segment) que $MA = MB$ est équivalent à $(B - A).(M - I) = 0$, où $I = \dfrac{A + B}{2}$ est le milieu du segment $[AB]$ (laissé en exercice de manipulation des normes). L'hyperplan médiateur est alors simplement caractérisé par le fait qu'il passe par I et est dirigé par l'orthogonal de la droite (vectorielle) dirigée par $B - A$ (étant supplémentaire d'une droite, ce sous-espace est bien un hyperplan). La réflexion par rapport à cet hyperplan envoie alors facilement A sur B et vice-versa, et elle est unique car une telle réflexion doit nécessairement laisser stable l'hyperplan médiateur. Bref, nous ne ferons pas de démonstration détaillée. □



Définition 29. Une **rotation** du plan ou de l'espace est un déplacement admettant au moins un point fixe.

Théorème 13. Classification des déplacements du plan.
Les seuls déplacements du plan sont les translations et les rotations. Plus précisément, si f est un déplacement de partie linéaire u :

- Soit $u = \text{id}$, alors f n'a pas de point fixe et est une translation.
- Soit $u \neq \text{id}$, alors f admet un unique point fixe Ω et est la rotation de centre Ω dont l'angle est donné par celui de u.

Démonstration. Le cas $u = \text{id}$ a déjà été traité. Si $u \neq \text{id}$, u est donc nécessairement une rotation du plan. Dans ce cas, en notant $(x', y') = f(x, y)$, on sait que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Le point $M(x, y)$ est donc un point fixe de f si (x, y) est solution du système $\left\{ \begin{array}{ccccc} (1-\cos(\theta))x & + & \sin(\theta)y & = & a \\ -\sin(\theta)x & + & (1-\cos(\theta))y & = & b \end{array} \right.$. Ce système a pour déterminant $(1-\cos(\theta))^2+\sin^2(\theta) = 2 - 2\cos(\theta) \neq 0$ puisqu'on a supposé $u \neq \text{id}$. Le système est donc de Cramer et admet toujours une solution unique correspondant à un point fixe Ω de l'application f. On peut alors écrire, $\forall M \in E$, $f(M) = f(\Omega) + u(M - \Omega) = \Omega + u(M - \Omega)$. L'application u étant une rotation, f est effectivement la rotation de centre Ω et d'angle θ. □

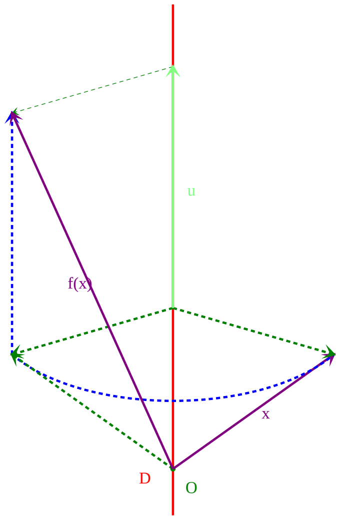
Exemple : Soit $f : (x, y) \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) + 1; \frac{1}{\sqrt{2}}(y - x) \right)$. La partie linéaire de f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ (si ça ne vous saute pas aux yeux, révisez votre trigonométrie de base). Pour déterminer son centre, on cherche tout simplement le point fixe de f en résolvant le système (quitte à tout multiplier par $\sqrt{2}$: $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & \sqrt{2} & = & \sqrt{2}x \\ y & - & x & & & = & \sqrt{2}y \end{array} \right.$. La deuxième équation donne $x = (1 - \sqrt{2})y$, ou encore $y = \frac{1}{1-\sqrt{2}}x = -(1+\sqrt{2})x$ la première devient alors $-\sqrt{2}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}x$, soit $x = \frac{1}{2}$. En découle $y = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. L'application f est donc la rotation de centre $\Omega \left(\frac{1}{2}; -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Théorème 14. Classification des similitudes directes dans l'espace.
Toute similitude directe du plan de rapport $\lambda \neq 1$ est la composée d'une rotation affine et d'une homothétie de rapport λ de même centre. ce centre commun est l'unique point fixe de la similitude.

Démonstration. Nous ne ferons pas cette démonstration qui ressemble à la précédente (il faut là aussi vérifier qu'il existe un unique point fixe via un calcul de déterminant, le reste en découle facilement). Rappelons tout de même que nous avons vu en début d'année comment caractériser une similitude à partir de son écriture complexe, les notations ont changé mais le principe reste le même. □

Définition 30. Un **vissage** dans l'espace est la composée d'une rotation affine de $\mathbb{R}^3$ par une translation dans la direction de l'axe de la rotation.

Sur la figure, on effectue un vissage f d'axe D et de vecteur u : le vecteur x est d'abord tourné autour de l'axe (pointillés bleus circulaires), puis translaté dans la direction de l'axe.



Théorème 15. Classification des déplacements dans l'espace.
Les seuls déplacements dans l'espace sont les translations, les rotations affines et les vissages. Plus précisément, si f est un déplacement de partie linéaire u :

- Soit $u = \mathrm{id}$, alors f n'a pas de point fixe et est une translation.
- Soit $u \neq \mathrm{id}$ (u est alors une rotation), et f admet des points fixes, alors l'ensemble des points fixes de f est une droite D et f est une rotation d'axe D, d'angle égal à celui de u.
- Soit $u \neq \mathrm{id}$ et f n'admet pas de point fixe, alors f est un vissage d'axe dirigé par l'axe de u, et d'angle égal à celui de u.

Démonstration. Comme dans le cas des isométries vectorielles, on se passera de toute démonstration dans l'espace. On oubliera également la classification des similitudes directes dans l'espace. □

Exemple : Considérons l'application affine dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = \frac{1}{3}(-2x - 2y + z + 4; x - 2y - 2z - 2; 2x - y + 2z + 8)$. Sa partie linéaire u a pour matrice dans la base canonique $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On vérifie sans problème que A est une matrice orthogonale : $\|(-2, -2, 1)\| = \|(1, -2, -2)\| = \|(2, -1, 2)\| = 9$, et $(-2, -2, 1).(1, -2, -2) = (-2, -2, 1).(2, -1, 2) = (1, -2, -2).(2, -1, 2) = 0$. On calcule ensuite $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \times 3 + 3 \times 6 = 27$, donc $\det(A) = \frac{1}{3^3} \times 27 = 1$. On en déduit que u est une rotation de l'espace.

Cherchons l'axe et l'angle de cette rotation : on résoud le système $\begin{cases} -2x & - & 2y & + & z & = & 3x \\ x & - & 2y & - & 2z & = & 3y \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 3z \end{cases}$.
La dernière équation donne $2x = y+z$, et la deuxième $x = 5y+2z$, donc $10y+4z = y+z$, soit $z = -3y$,

et donc $2x = -2y$, soit $x = -y$. On reporte dans la première équation : $2y - 2y - 3y = -3y$ est toujours vérifie, donc $\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}((1, -1, 3))$. Pour déterminer l'angle, on prend un vecteur x unitaire et orthogonal à l'axe, par exemple $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$. Son image par u est $u(x) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4, -1, 1))$. on en déduit que $\cos(\theta) = x.u(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{3\sqrt{2}} \times (-5) = -\frac{5}{6}$; puis en prenant comme vecteur directeur unitaire de l'axe $a = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, -1, 3)$, $\sin(\theta) = \frac{1}{6\sqrt{11}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{11}} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \frac{1}{6\sqrt{11}} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{11}}(-2+13) = \frac{\sqrt{11}}{6}$ (on vérifie aisément que $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) = 1$). Finalement, vous serez très heureux de constater que l'angle de la rotation est $\theta = \arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$.

Nous sommes malheureusement loin d'être au bout de nos peines. Il faut savoir si f est une rotation ou un vissage, et pour cela déterminer si f a des points fixes. On résout donc le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -2x & - & 2y & + & z & + & 4 & = & 3x \\ x & - & 2y & - & 2z & - & 2 & = & 3y \\ 2x & - & y & + & 2z & + & 8 & = & 3z \end{array}\right.$. On peut heureusement reprendre les calculs déjà effectués précédemment : $2x = y + z - 8$, et $x = 5y + 2z + 2$, donc $10y + 4z + 4 = y + z - 8$, soit $z = -3y - 4$. On en déduit $x = -y - 6$, et on reporte dans la première équation : $2y + 12 - 2y - 3y - 4 = -3y$, ce qui n'est manifestement jamais vérifié. Il n'y a donc pas de point fixe, c'est un vissage.

Il ne reste plus qu'à déterminer l'axe et la translation du vissage. Pour cela, on peut utiliser le fait que, si M appartient à l'axe, $f(M) - M$ est un vecteur colinéaire à $(1, -1, 3)$. On obtiendra ainsi à la fois un point de l'axe, et le coefficient de colinéarité nous donnera la valeur du multiple à mettre devant $(1, -1, 3)$ pour obtenir le vecteur de translation. Notons-le λ : on résoud le dernier système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -2x & - & 2y & + & z & + & 4 & = & 3x & + & 3\lambda \\ x & - & 2y & - & 2z & - & 2 & = & 3y & - & 3\lambda \\ 2x & - & y & + & 2z & + & 8 & = & 3z & + & 9\lambda \end{array}\right.$. On peut encore une fois exploiter les mêmes calculs : $2x = y + z + 9\lambda - 8$ et $x = 5y + 2z + 2 - 3\lambda$, donc $10y + 4z + 4 - 6\lambda = y + z + 9\lambda - 8$, soit $z = -3y - 4 + 5\lambda$. On en déduit $x = -y - 6 + 7\lambda$, puis en reportant dans la première équation $2y + 12 - 14\lambda - 2y - 3y - 4 + 5\lambda + 4 = -3y - 18 + 21\lambda + 3\lambda$, soit $30 = 33\lambda$. Autrement dit, $\lambda = \frac{10}{11}$.

Pour trouver un point sur l'axe, on peut par exemple choisir $y = 0$ et trouver alors $z = -4 + 5\lambda = \frac{6}{11}$ et $x = -6 + 7\lambda = \frac{4}{11}$.

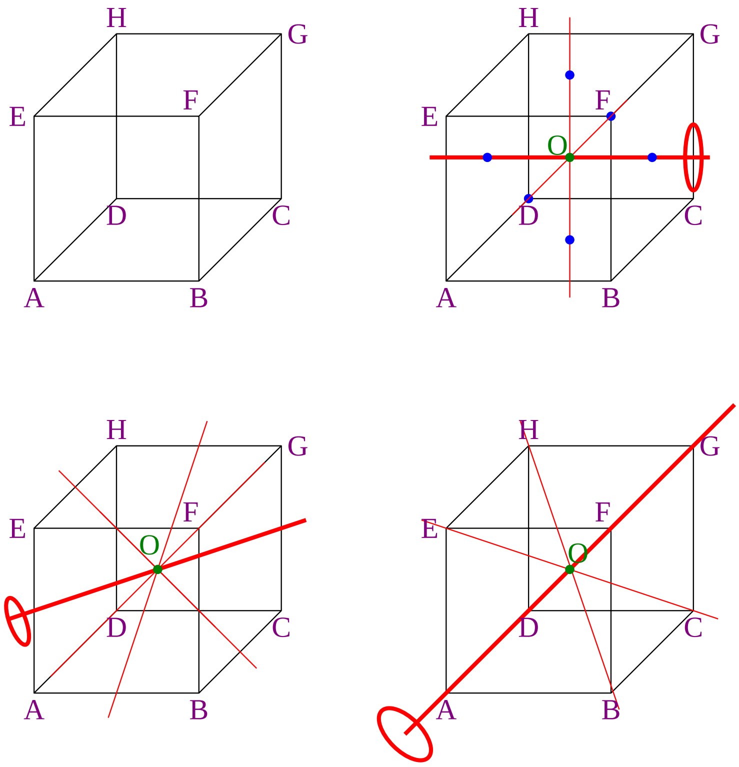
On peut enfin conclure : f est un vissage d'axe D passant par $M\left(\frac{4}{11}, 0, \frac{6}{11}\right)$ et dirigé par $(1, -1, 3)$, d'angle $\theta = \arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$, et de vecteur $\frac{10}{11}(1, -1, 3)$.

Isométries du cube : Considérons un cube fixé (de côté 1 par exemple, mais peu importe), on cherche à déterminer toutes les isométries du cube, c'est-à-dire les isométries de l'espace laissant le cube globalement invariant (chaque point du cube est envoyé sur un point du même cube). On peut déjà déterminer leur nombre : par une telle isométrie, chaque sommet du cube est nécessairement envoyé sur un sommet du cube (car le point situé de l'aute côté de la grande diagonale passant par ce sommet est à une distance qui ne peut être atteinte sur le cube qu'entre deux sommets opposés) ; de plus, deux sommets ne peuvent pas être envoyés au même endroit (sinon les distances ne seraient pas respectées), donc l'isométrie effectue une permutation des sommets. Il n'y a en fait qu'une toute petite proportion de permutations possibles. Pour l'image d'un premier sommet (par exemple A sur la figure ci-dessous), on a huit possibilités (chacun des huit sommets du cube). Mais une fois l'image de A fixé, le sommet voisin B ne peut plus avoir que trois images distinctes, les trois sommets adjacents à l'image de A (par exemple si A reste fixe, B ne peut être envoyé que sur B, D ou E). Une fois les images de A et B fixées, D n'a plus que deux images possibles (si A et B restent fixes, il doit être envoyé sur D ou E), et on n'a plus le choix pour E. Une fois les images de ces quatre points choisies, on connait l'image d'un repère orthonormal par l'isométrie, qui est donc unique. Conclusion : il y a $8 \times 3 \times 2 = 48$ isométries du cube.

Un tout petit peu de théorie des groupes permet de se convaincre que, parmi les 48 isométries, 24 sont directes et 24 indirectes. En effet, il en existe au moins une d'indirecte (par exemple une réflexion par rapport au plan passant par les milieux des quatre arêtes parallèles $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$), notons-là f. Notons par ailleurs I l'ensemble de toutes les isométries du cube, qui est assez clairement un groupe pour la loi $\circ$. L'application de I dans lui-même définie par $u \mapsto f \circ u$ est alors une bijection de I, qui envoie chaque isométrie directe sur une isométrie indirecte (puisqu(on multipli le déterminant par -1, et chaque isométrie indirecte sur une isométrie directe. Il y en a donc autant de chaque catégorie, soit 24.

Contentons-nous d'essayer de faire la liste des 24 isométries directes, qui sont donc des rotations ou des vissages. En fait, il ne peut pas y avoir de vissage : par conservation des barycentres, le centre du cube est toujours un point fixe d'une isométrie du cube, et un vissage n'a pas de point fixe. Nous avons donc 24 rotations à trouver, dont voici la liste :

- l'identité, qu'il faudra prendre soin de ne pas compter plusieurs fois.
- les rotations d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, π et $\dfrac{3\pi}{2}$ autour de chaque axe passant par les centres de deux faces opposées (par exemple la droite (PQ), où P est le centre de $(ABCD)$ et Q le centre de $(EFGH)$). Comme il existe trois paires de faces opposées, cela fait $3\times3 = 9$ rotations distinctes.
- les rotations d'angle π autour de chaque axe passant par les milieux de deux arêtes parallèles opposées (par exemple la droite (IJ), où I est le milieu de $[AE]$ et J celui de $[CG]$). Comme il y a six paires d'arêtes opposées, celà fait six rotations supplémentaires.
- les rotations d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$ (ce sont les plus dures à visualiser) autour des grandes diagonales du cube. Par exemple, en prenant la diagonale (AG), les points B, D et E sont tous trois situés à la même distance de la diagonale, et dans un même plan orthogonal à cette diagonale (ils forment un triangle équilatéral dans ce plan), on peut les permuter circulairement par les deux rotations indiquées. Idem pour les sommets C, F et H. Puisqu'il y a quatre grandes diagonales, nous tenons les $2 \times 4 = 8$ rotations qui nous manquaient.



Sur cette illustration, certains des axes de rotation se superposent, ce qui peut expliquer que vous en comptiez moins que ce qui est annoncé ci-dessus.