

Chapitre 1 : Fonctions usuelles

PTSI B Lycée Eiffel

5 septembre 2012

*Logarithme et exponentielle dînent ensemble au resto.
C'est exponentielle qui paye tout la note, pourquoi ?
Parce que logarithme népérien !*

Ce premier chapitre de l'année a pour principal objectif de constituer un catalogue des fonctions que nous considérerons comme suffisamment classiques pour que leur maîtrise soit indispensable. Certaines de ces fonctions ont déjà été étudiées au lycée (logarithme népérien et exponentielle; fonctions trigonométriques), les autres ne font intervenir aucune théorie supplémentaire, si ce n'est la notion de bijection qui sera abordée en début de chapitre. On en profitera d'ailleurs pour donner quelques notations sur les ensembles qui seront réutilisées en permanence tout au long de l'année, et dont la maîtrise parfaite devra donc être immédiate.

Objectifs du chapitre :

- maîtrise de l'utilisation des quantificateurs \exists et \forall : compréhension d'un énoncé faisant intervenir une succession de quantificateurs, capacité à donner la négation d'un énoncé quantifié.
- maîtrise des règles de calcul sur l'exponentielle, le logarithme et les puissances : résolution d'équations se ramenant à du second degré, manipulation aisée des racines carrées.
- connaissance des dérivées et représentations graphiques des fonctions trigonométriques et hyperboliques, et de leurs réciproques (y compris limites et asymptotes).

1 Vocabulaire

1.1 Ensembles et logique

La logique est un domaine un peu à part au sein des mathématiques, essentiel à la construction même de l'ensemble de la théorie mathématique. À notre petit niveau, nous ne ferons rien de bien compliqué, contentons-nous de considérer la logique comme une sorte de grammaire des mathématiques. Pour bien comprendre le sens exact que l'on attribue à chaque énoncé que contient un texte mathématique, il est important de s'appuyer sur des bases rigoureuses. En ce qui concerne les ensembles, ils forment les briques élémentaires de la grande théorie des mathématiques qui est en cours aujourd'hui. Tous les objets mathématiques que vous manipulerez cette année (y compris les fonctions, ou même les nombres entiers par exemple) peuvent être vus comme des ensembles. Là encore, rien de compliqué dans ce chapitre, simplement quelques définitions, que nous compléterons dans un chapitre ultérieur.

1.1.1 Ensembles

Définition 1. Un **ensemble** est une collection d'objets mathématiques. Il peut être décrit en donnant la liste de tous ses éléments, mais sera plus souvent (notamment pour les ensembles infinis)

défini par une propriété commune de ces objets, par exemple $[2; 3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\}$. Le symbole \in signifie « appartient à » et le symbole $|$ signifie « tels que ». La notation entre accolades désigne toujours un ensemble en mathématiques.

Définition 2. Deux ensembles E et F sont **égaux** s'ils contiennent exactement les mêmes éléments. L'ensemble F est **inclus** dans l'ensemble E si tout élément de F appartient aussi à E . On le note $F \subset E$.

Méthode : Pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, on peut procéder par double inclusion, c'est-à-dire prouver séparément le fait que $E \subset F$ et $F \subset E$.

Remarque 1. Il ne faut pas confondre appartenance et inclusion. Ainsi, $\sqrt{7} \in [2; 3[$, mais $[\pi - 1; \sqrt{7}] \subset [2; 3[$.

Définition 3. L'ensemble ne contenant aucun élément, appelé **ensemble vide**, est noté \emptyset .

1.1.2 Quantificateurs et équivalences

Définition 4. Nous utiliserons tout au long de l'année dans nos énoncés de théorèmes et de propositions les deux symboles suivants, appelés un peu pompeusement **quantificateur existentiel** et **quantificateur universel** :

- le symbole \exists signifie « il existe » ; ainsi, le fait qu'une fonction f s'annule sur l'intervalle $[0; 1]$ peut s'écrire plus mathématiquement $\exists x \in [0; 1], f(x) = 0$.
- le symbole \forall signifie « quel que soit » ; ainsi, le fait qu'une fonction f soit nulle sur l'intervalle $[0; 1]$ s'écrit $\forall x \in [0; 1], f(x) = 0$. Notez bien la différence entre ces deux exemples, il est évidemment essentiel de ne pas confondre les deux symboles.

Remarque 2. Dans les cas où a besoin de plusieurs quantificateurs pour exprimer une propriété (ça arrive souvent), l'ordre dans lequel on les dispose est aussi très important. On les lit naturellement de gauche à droite, ce qui donne par exemple :

- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \neq x \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$ signifie que f admet un maximum (global) en x ($f(x)$ est plus grand que toutes les autres images par f).
- $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \neq y \in \mathbb{R}, f(x) > f(y)$ signifie que f n'admet pas de maximum (quelle que soit la valeur de y , on peut trouver un x ayant une image plus grande par f).

En général, il faut retenir que, dans un énoncé commençant par $\forall x, \exists y$, la variable y dépend de x , alors que dans le cas où l'énoncé stipule $\exists y, \forall x$, le y est universel, il doit fonctionner pour toutes les valeurs de x possibles.

Définition 5. Le symbole \Rightarrow est un symbole d'**implication** : $A \Rightarrow B$ signifie que la propriété B est vraie dès que A l'est (par contre, si A est fausse, B peut bien être vraie ou fausse, ça n'a pas d'importance). Le symbole \Leftrightarrow est un symbole d'**équivalence** : $A \Leftrightarrow B$ signifie que A implique B et B implique A . Autrement dit, dès que l'une est vraie, l'autre aussi, et dès que l'une est fausse l'autre aussi. Autre façon de voir les choses : $A \Rightarrow B$ et sa **réciroque** $B \Rightarrow A$ sont toutes les deux vraies.

Exemple (théorème de Pythagore et réciproque) : Un triangle ABC est rectangle en $A \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Remarque 3. Quand on calcule les longueurs des côtés d'un triangle, et qu'on invoque l'absence d'égalité de Pythagore pour prouver que le triangle n'est pas rectangle, on n'utilise pas la réciproque du théorème, mais bel et bien le théorème lui-même, ou plutôt sa **contraposée** : si $A \Rightarrow B$, la contraposée stipule que la négation de B implique la négation de A . Lorsqu'une implication est vraie, sa contraposée l'est également.

Méthode : Pour prouver une équivalence $A \Leftrightarrow B$, on procède souvent en prouvant séparément les deux implications $A \Rightarrow B$, et $B \Rightarrow A$. Faites très attention à ne pas vous contenter de prouver l'une des deux implications.

1.2 Fonctions

Le vocabulaire de base sur les fonctions étant supposé acquis au lycée, ce paragraphe est simplement l'occasion d'énoncer certaines définitions essentielles à l'aide des quantificateurs. En particulier, les définitions suivantes ne sont pas rappelées : image et antécédents d'un réel par une fonction, limites, asymptotes, continuité, dérivée et lien entre le signe de la dérivée et le sens de variations de la fonction. Tous ces points sont supposés maîtrisés sur le bout des doigts. Nous reviendrons sur les notions de continuité et de dérivabilité (avec une approche beaucoup plus rigoureuse qu'au lycée) ultérieurement.

1.2.1 Domaine de définition

Définition 6. Une **fonction** $f : \mathcal{D}_f \mapsto \mathbb{R}$ est un objet mathématique associant à tout réel x appartenant à un sous-ensemble \mathcal{D}_f de \mathbb{R} , un réel y également noté $f(x)$. L'ensemble \mathcal{D}_f est appelé **domaine de définition** de la fonction f .

Méthode : Pour déterminer un domaine de définition, on fera notamment attention au trois problèmes suivants :

- annulation d'un dénominateur : si $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$, alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.
- positivité sous une racine : si $f(x) = \sqrt{4-2x}$, alors $\mathcal{D}_f =]-\infty; 2]$.
- stricte positivité sous un ln : si $f(x) = \ln(x^2-9)$, alors $\mathcal{D}_f =]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$

1.2.2 Parité, périodicité

Définition 7. Une fonction f est **paire** si son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = f(x)$. Elle est **impaire** si son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = -f(x)$.

Remarque 4. La condition sur la symétrie de l'ensemble de définition est nécessaire pour assurer que $-x$ appartienne toujours au domaine de définition de f .

Méthode : Pour prouver qu'une fonction est paire (ou impaire), on exprime $f(-x)$ en fonction de x et on essaie de le mettre sous une forme permettant de constater que $f(-x) = f(x)$. Pour prouver qu'une fonction n'est pas paire, il suffit de trouver un contre-exemple, donc une valeur de x pour laquelle $f(-x) \neq f(x)$. Attention tout de même, le fait que $f(-2) = f(2)$ par exemple ne prouve rien.

Proposition 1. La courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe (Oy) du repère. La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine 0 du repère.

Démonstration. Graphiquement, la parité s'exprime comme ceci : si un point $A(x; f(x))$, le point $A'(-x, f(x))$ appartiendra également à la courbe (et vice-versa). Or, A' n'est autre que le symétrique de A par rapport à l'axe (Oy) . Le raisonnement est le même pour les fonctions impaires. \square

Définition 8. Une fonction f est périodique de période T si, quel que soit x appartenant à \mathcal{D}_f , $x+T$ appartient à \mathcal{D}_f et $f(x+T) = f(x)$.

Remarque 5. Une fonction périodique possède plusieurs périodes différentes, puisque tout multiple d'une période est également une période. Ainsi, la fonction cos est périodique de période 2π , mais aussi 4π ou encore -56π . Il existe toutefois toujours une période qui sera la plus petite période positive de la fonction f , et qu'on appelle par abus de langage la période de la fonction f .

Proposition 2. La courbe représentative d'une fonction f périodique de période T est invariante par translation de vecteur $T \vec{i}$.

Démonstration. Le point $(x, f(x))$ ayant pour image par cette translation le point $(x+T, f(x))$, c'est une conséquence immédiate de la définition. \square

1.2.3 Monotonie

Définition 9. Une fonction réelle f est **croissante** (resp. **décroissante**) sur un intervalle I si, $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$). Je vous épargne les définitions de croissance et décroissance stricte.

Définition 10. Une fonction réelle f admet un **maximum** (local) en x sur l'intervalle I si $x \in I$ et $\forall y \in I, f(y) \leq f(x)$. On parle de **maximum global** si $I = \mathcal{D}_f$. On définit de même **minimum local et global**.

Définition 11. Le réel m est un **minorant** de la fonction f sur l'intervalle I si $\forall x \in I, f(x) \geq m$. De même, M est un **majorant** de f sur I si $\forall x \in I, f(x) \leq M$. On dit que f est bornée sur I si elle y admet à la fois un majorant et un minorant.

Remarque 6. Un minorant n'est pas la même chose qu'un minimum. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^2$ a pour minimum 0 sur \mathbb{R} , mais elle est aussi minorée par $-2, -15$ et beaucoup d'autres valeurs. Une fonction peut même être minorée sans avoir de minimum, par exemple la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* .

1.2.4 Bijections

Définition 12. Une fonction $f : I \rightarrow J$ est une **bijection** de l'intervalle I dans l'intervalle J si tout élément de J admet exactement un antécédent par la fonction f dans l'intervalle I .

Définition 13. Si f est une fonction bijective de I dans J , on appelle **bijection réciproque** de f la fonction $g : J \rightarrow I$ qui, à un réel y appartenant à J , associe son unique antécédent x par la fonction f . L'application g est alors une bijection de l'intervalle J dans l'intervalle I . On la note f^{-1} .

Exemple : La notion de réciproque est intuitivement simple, il s'agit simplement de créer une fonction g qui « fait le contraire » de la fonction f . Mais pour cela, la condition sur l'unicité des antécédents est indispensable, sinon on aura plusieurs possibilités pour la définition de la fonction g . Un exemple que vous connaissez déjà est celui de la racine carrée, qui est la réciproque de la fonction carré $f : x \mapsto x^2$. Attention tout de même, la fonction f n'est pas une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , puisque les réels négatifs n'ont pas d'antécédent par f , mais que les réels strictement positifs en ont deux. Par contre, cette même fonction f est bijective de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ . C'est pour cela que la racine carrée est une fonction définie seulement sur \mathbb{R}_+ , à valeurs dans \mathbb{R}_+ (dans la définition de la racine carrée, on précise bien qu'il s'agit d'un nombre positif).

Remarque 7. Pour tout x appartenant à I , on a $f^{-1}(f(x)) = x$; pour tout x dans J , $f(f^{-1}(x)) = x$. De plus, les représentations graphiques des fonctions f et f^{-1} dans un repère orthogonal sont des courbes symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Théorème 1. Soit $f : I \rightarrow J$ une fonction continue et strictement monotone. Alors f effectue une bijection de I dans J . De plus, sa réciproque f^{-1} est également continue et strictement monotone, de même monotonie que f .

Proposition 3. Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection dérivable sur I et telle que $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$, alors sa bijection réciproque est dérivable sur J et $\forall y \in J, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Exemple : Si on reprend l'exemple de la racine carrée, on trouve en utilisant le fait que $(x^2)' = 2x$, la formule bien connue $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2 Logarithmes et exponentielles

Éternel dilemme du professeur de maths au moment d'aborder cette partie du cours : exponentielle d'abord ou logarithme en premier ? Quel que soit le choix, soyez conscients que la construction

s'appuiera à ce stade sur des résultats puissants que nous ne serons pas en mesure de démontrer : existence d'une primitive à une fonction continue pour le logarithme, existence d'une solution à une équation différentielle pour l'exponentielle. Nous commencerons avec le logarithme (c'est le plus traditionnel) car les démonstrations sont plus faciles à enchaîner dans ce sens, mais je vous donnerai également des définitions indépendantes de l'exponentielle.

2.1 La fonction logarithme népérien

Définition 14. La fonction \ln (**logarithme népérien**) est l'unique primitive de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ s'annulant pour $x = 1$.

Proposition 4. Principales propriétés de la fonction \ln :

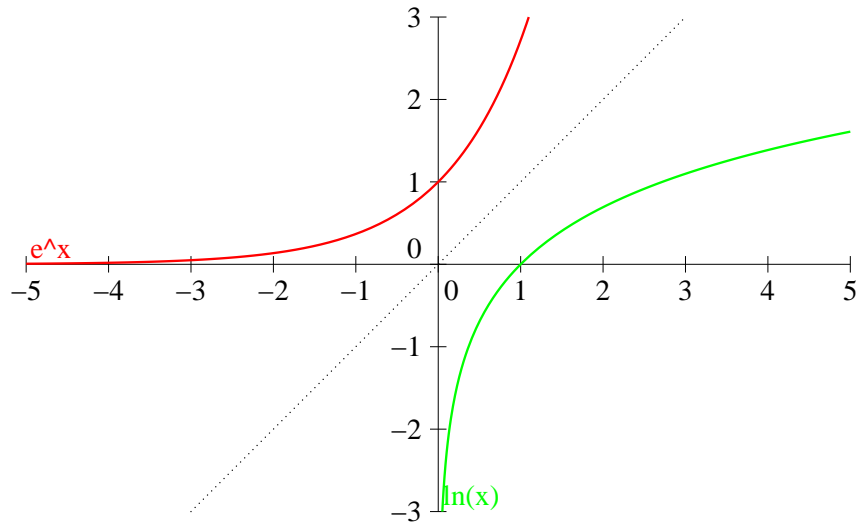
- Pour tous nombres réels strictement positifs x et y , $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
- Les formules suivantes découlent de la première propriété : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$; $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$; pour tout entier relatif n , $\ln(x^n) = n \ln(x)$.
- La fonction \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}^{+*} .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- Il existe un unique réel, noté e , vérifiant $\ln(e) = 1$.

Démonstration.

- Puisque tout ce que nous savons pour l'instant sur le logarithme est qu'il est une primitive de $\frac{1}{x}$, la démonstration va passer par une dérivation. Fixons donc une valeur de $y > 0$, et posons $g(x) = \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y)$. La fonction g est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, de dérivée $g'(x) = \frac{y}{xy} - \frac{1}{x} = 0$. La fonction g est donc constante sur \mathbb{R}^{+*} . Comme $g(1) = \ln(y) - \ln(1) - \ln(y) = 0$, on en déduit que $\forall x > 0$, $\ln(xy) - \ln(x) - \ln(y) = 0$, ce qui est équivalent à notre propriété.
- En choisissant $y = \frac{1}{x}$ dans la formule précédente, on obtient $\ln(1) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$, soit $\ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, ce qui prouve le premier point. Il suffit ensuite d'écrire $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ pour obtenir le deuxième. La dernière formule se prouve, pour les valeurs positives de n , par récurrence. Pour $n = 0$, $\ln(x^0) = \ln(1) = 0 = 0 \times \ln(x)$. Ensuite, si on suppose vraie la propriété au rang n , alors $\ln(x^{n+1}) = \ln(x^n \times x) = \ln(x^n) + \ln(x) = n \ln(x) + \ln(x) = (n+1) \ln(x)$, ce qui prouve l'hérédité de la propriété. Pour les valeurs négatives de n , on écrit simplement $\ln(x^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\ln(x^n) = -n \ln(x)$.
- Sa dérivée étant strictement positive, c'est clair.
- La fonction étant croissante, elle admet nécessairement une limite (finie ou infinie) en $+\infty$, il suffit donc de prouver qu'elle n'est pas majorée pour obtenir une limite infinie. Or, en prenant un x pour lequel $\ln(x) > 0$ (par exemple $x = 2$), on a $\ln(x^n) = n \ln(x)$, qui a pour limite $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. La fonction ne peut donc être majorée, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$. En posant $X = \frac{1}{x}$, on a alors $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = -\infty$.
- La fonction \ln étant continue et strictement croissante, et au vu des limites calculées précédemment, elle effectue une bijection de \mathbb{R}^{+*} vers \mathbb{R} . Le nombre réel 1 admet donc un unique antécédent par la fonction \ln .

□

Ajoutons la courbe représentative de la fonction, que je couple avec celle de la fonction exponentielle que nous allons maintenant aborder.



2.2 La fonction exponentielle

Définition 15. La **fonction exponentielle**, que l'on notera \exp , est définie sur \mathbb{R} comme la réciproque de la fonction \ln .

Remarque 8. On peut définir la fonction exponentielle de façon indépendante, sans référence au logarithme. Par exemple, la fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur \mathbb{R} solution de l'équation différentielle et vérifiant de plus $f' = f$. Une autre définition nettement plus maniable mais faisant intervenir des séries (vous la reverrez l'an prochain) est la suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Proposition 5. Principales propriétés de la fonction exponentielle :

- La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, et strictement croissante sur \mathbb{R} . Sa dérivée est la fonction exponentielle elle-même.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$.
- Pour tous nombres réels x et y , $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$. En particulier, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$, et $(\exp(x))^n = \exp(nx)$. Pour tout entier n , $\exp(n) = e^n$ (où e , rappelons-le, est l'unique réel vérifiant $\ln(e) = 1$; on étendra comme vous en avez l'habitude la notation e^x à toutes les valeurs de l'exponentielle).

Démonstration.

- On peut appliquer le théorème de la bijection rappelé plus haut. La fonction \exp est définie sur \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R}^{+*} , et de même monotonie que \ln . De plus, sa dérivée est donnée par $\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \exp(x)$.
- Les limites découlent également du théorème de la bijection.
- Le but ici est d'utiliser les règles de calcul vues sur le logarithme. Notons a et b les antécédents (uniques à chaque fois par bijectivité du \ln) de x et y par la fonction \ln , on peut écrire $\exp(x+y) = \exp(\ln(a) + \ln(b)) = \exp(\ln(ab)) = ab = \exp(x) \times \exp(y)$. Comme $\ln(1) = 0$, on a par ailleurs $\exp(0) = 1$, donc $\exp(x) \times \exp(-x) = \exp(x-x) = 1$, soit $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ (on peut aussi revenir au logarithme pour démontrer cette formule). Ensuite, $\exp(nx) = \exp(n \ln a) = \exp(\ln(a^n)) = a^n = (\exp(x))^n$. En particulier, $\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n$, puisque $\ln(e) = 1 \Leftrightarrow \exp(1) = e$.

□

2.3 Fonctions logarithmes et exponentielles quelconques

2.3.1 Logarithmes en base a

Définition 16. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction **logarithme en base a** est définie sur \mathbb{R}^{+*} par $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Remarque 9. La fonction \ln correspond en fait au logarithme en base e . Un autre logarithme est assez fréquemment employé, le logarithme en base 10, aussi appelé logarithme décimal et noté simplement \log (c'est à cette fonction que correspond la touche \log des calculatrices).

Proposition 6. Principales propriétés des fonctions logarithmes :

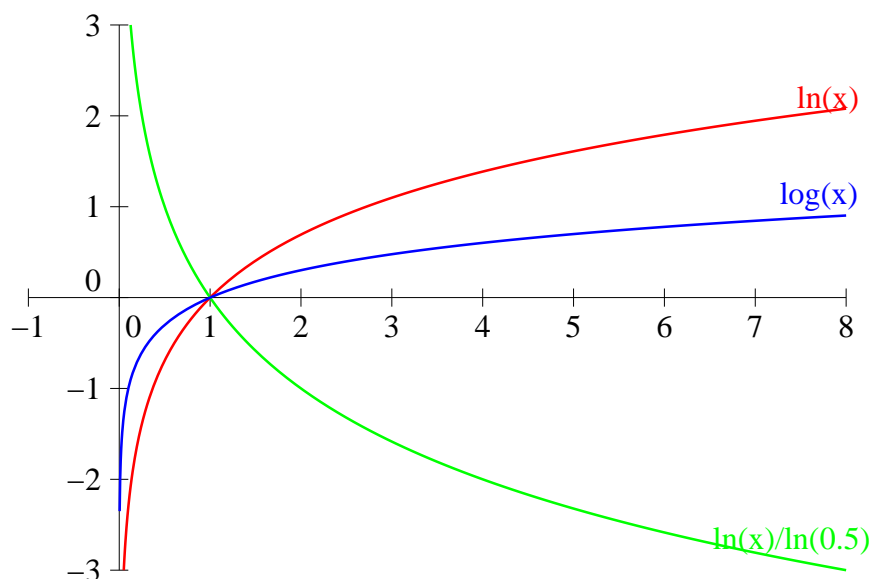
- Lorsque $a > 1$, la fonction \log_a est strictement croissante et admet les mêmes limites que le logarithme népérien.
- Lorsque $0 < a < 1$, la fonction \log_a est strictement décroissante; $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty$.
- Toutes les règles de calcul vues sur le logarithme népérien restent valables pour le logarithme en base a .

Démonstration.

- La fonction \log_a étant proportionnelle au logarithme népérien, elle est dérivable, de dérivée $\log'_a(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$. Lorsque $a > 1$, $\ln(a) > 0$, la fonction est donc strictement croissante, et les limites découlent de celles de la fonction \ln par simple application des règles usuelles de calculs de limites.
- Cette fois-ci, $\ln(a) < 0$, ce qui explique à la fois le changement de sens de variation, et le changement de signe des limites.
- Il suffit de reprendre chacune des formules pour le \ln , et de diviser partout par $\ln(a)$, pour obtenir les équivalents pour le logarithme en base a .

□

Pour finir, quelques exemples de courbes, qui ont la même allure que celle de la fonction \ln :



2.3.2 Exponentielles de base a

Définition 17. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, la fonction **exponentielle en base a** est définie sur \mathbb{R} comme la réciproque de la fonction \log_a . On la note \exp_a .

Proposition 7. Principales propriétés des exponentielles :

- On dispose de la formule explicite suivante : $\exp_a(x) = e^{x \ln(a)}$.
- Lorsque $a > 1$, la fonction \exp_a est strictement croissante et admet les mêmes limites que l'exponentielle.
- Lorsque $0 < a < 1$, la fonction \exp_a est strictement décroissante; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a(x) = 0$.
- Toutes les règles de calcul vues sur l'exponentielle restent valables pour l'exponentielle en base a . On notera généralement, similairement à ce qu'on fait pour l'exponentielle de base e , $\exp_a(x) = a^x$.

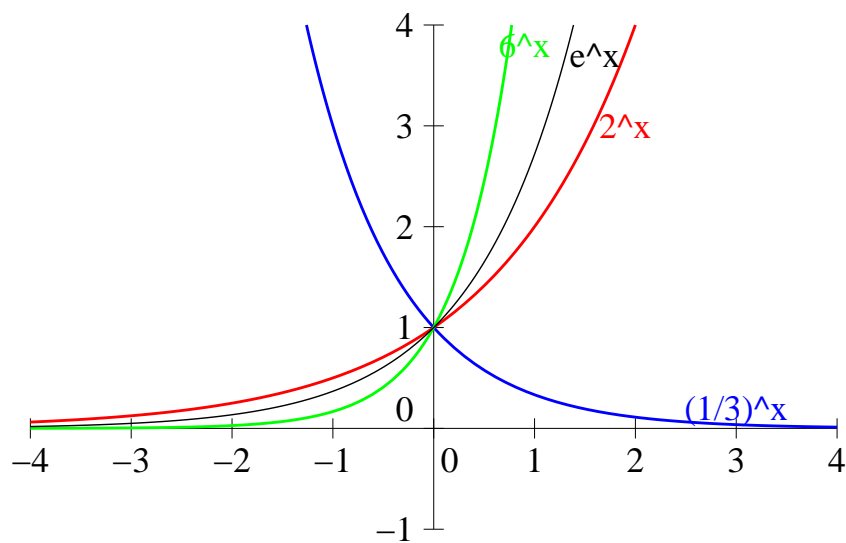
Démonstration.

- En effet, $\log_a(e^{x \ln(a)}) = \frac{\ln(e^{x \ln(a)})}{\ln(a)} = x$, donc $e^{x \ln(a)}$ est bien l'unique antécédent de x par la fonction \log_a .
- On peut au choix utiliser le théorème de la bijection comme on l'a fait pour l'exponentielle, ou simplement utiliser la formule explicite vue ci-dessus.
- Cf le point précédent.
- Là encore, on peut reprendre la méthode utilisée dans le cas de l'exponentielle, ou utiliser la formule explicite. Par exemple, $\exp_a(x + y) = e^{(x+y) \ln(a)} = e^{x \ln(a) + y \ln(a)} = e^{x \ln(a)} \times e^{y \ln(a)} = \exp_a(x) \times \exp_a(y)$.

□

Remarque 10. En utilisant la notation introduite en fin de proposition précédente, on peut écrire les règles de calcul sous une forme plus simple, par exemple $a^{x+y} = a^x a^y$. Toutes ces formules correspondent à des propriétés classiques de manipulation des puissances, qui se généralisent ainsi sans difficulté à des exposants et des bases non entiers.

Et pour changer, on conclut avec quelques courbes :



3 Fonctions puissances

3.1 Rappels sur les fonctions puissances entières et racines n -èmes

3.1.1 Fonctions puissances entières

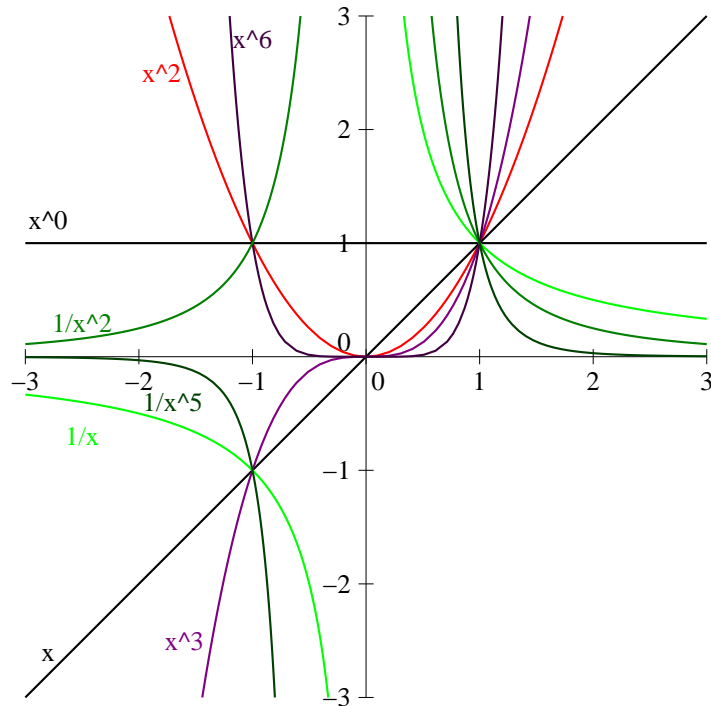
Définition 18. Soit x un nombre réel. Les **puissances positives** de x sont définies par récurrence : $x^0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} = x^n \times x$. Lorsque $x \neq 0$, on peut également définir des **puissances négatives** comme inverses des puissances positives : $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Les fonctions puissances $x \mapsto x^n$ sont donc définies sur \mathbb{R} lorsque $n \geq 0$, et sur \mathbb{R}^* lorsque $n < 0$.

Proposition 8. Principales propriétés des fonctions puissances entières :

- Les fonctions puissances sont continues et dérivables sur leur domaine de définition, de dérivée nx^{n-1} lorsque $n \neq 0$ (la dérivée de la fonction constante x^0 étant nulle).
- Lorsque n est un entier pair strictement positif, la fonction puissance n est paire, décroissante sur $] -\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. Elle a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Lorsque n est impair positif, la fonction est impaire, croissante sur \mathbb{R} , de limites respectives $-\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Lorsque n est pair strictement négatif, la fonction est paire, strictement croissante sur $] -\infty; 0[$ et décroissante sur $]0; +\infty[$. De plus, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = +\infty$.
- Lorsque n est impair négatif, la fonction est impaire, décroissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. De plus, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^n = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n = +\infty$.

Démonstration. Nous nous contenterons de démontrer la formule pour la dérivée, les limites étant « évidentes » à ce stade de l'année (on reviendra sur ces calculs après avoir rigoureusement défini les limites dans un chapitre ultérieur). Prouvons donc la formule quand $n > 0$ par récurrence, ce qui nous donnera une occasion de réviser un peu la théorie de la dérivation. Pour $n = 1$, la fonction $x \mapsto x$ a pour taux d'accroissement au point d'abscisse x l'expression $\tau_x(h) = \frac{x+h-x}{h} = 1$. Cette expression ayant évidemment pour limite 1 quand h tend vers 0, la dérivée de la fonction $x \mapsto x$ est constante égale à 1. Supposons désormais la formule vraie pour un certain entier n , et appliquons la formule de dérivation d'un produit à la fonction $f : x \mapsto x^{n+1} = x^n \times x : f'(x) = nx^{n-1} \times x + x^n \times 1 = nx^n + x^n = (n+1)x^n$, ce qui prouve l'hérédité et achève la récurrence. Pour les puissances négatives, on peut utiliser la dérivée d'un inverse. Si $n > 0$, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ a pour dérivée $-\frac{nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$. La formule annoncée est donc toujours valable. \square

Vous commencez à avoir l'habitude, quelques petites courbes pour illustrer tout cela :

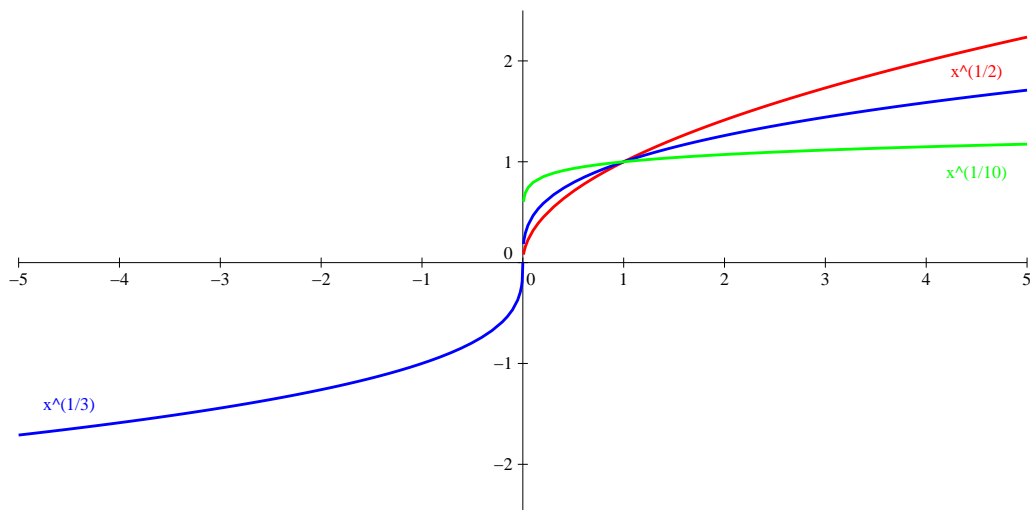


3.1.2 Racines n -èmes

Définition 19. Soit n un entier pair strictement positif. On définit la fonction **racine n -ème** comme la réciproque de la fonction puissance n sur l'intervalle $[0; +\infty[$. On la note $\sqrt[n]{x}$. Lorsque n est impair strictement positif, on peut définir la fonction racine n -ème sur \mathbb{R} puisque la puissance n est alors bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . La notation reste la même.

Remarque 11. Lorsque $n = 2$, comme vous en avez l'habitude, on notera la racine carrée \sqrt{x} .

Encore quelques exemples de courbes :



3.2 Puissances quelconques

Définition 20. Soit $a \in \mathbb{R}^*$, la fonction **puissance en base a** est définie sur \mathbb{R}^{+*} par $x^a = e^{a \ln x}$.

Remarque 12. Cette définition prolonge bien celle donnée pour les puissances entières et les racines n -èmes. Pour les puissances entières par exemple, on a vu que $n \ln x = \ln(x^n)$, donc $e^{n \ln x} = x^n$.

Proposition 9. Principales propriétés des fonctions puissances :

- La fonction $x \mapsto x^a$ est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} , de dérivée ax^{a-1} .
- Si $a > 0$, la puissance en base a est strictement croissante sur \mathbb{R}^{+*} . De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty$.
- Si $a < 0$, la puissance en base a est strictement décroissante sur \mathbb{R}^{+*} . De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = 0$.
- Les fonctions puissances en base a et en base $\frac{1}{a}$ sont réciproques l'une de l'autre. En particulier, la fonction puissance en base $\frac{1}{n}$ coïncide avec racine n -ème.
- Les propriétés algébriques des puissances entières restent valables pour les puissances quelconques : $x^a \times x^b = x^{a+b}$; $(x^a)^b = x^{ab}$; $1^a = 1$.

Démonstration.

- En effet, $e^{a \ln(x)}$ se dérive comme une composée, et a pour dérivée $\frac{a}{x} e^{a \ln(x)} = \frac{a}{e^{\ln(x)}} e^{a \ln(x)} = a e^{(a-1) \ln(x)} = a x^{a-1}$.
- En effet, la dérivée est alors positive. Les limites se calculent via les règles usuelles de calculs de limites. Par exemple, $\lim_{x \rightarrow 0} a \ln(x) = -\infty$, et par composition $\lim_{x \rightarrow 0} e^{a \ln(x)} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$.
- Même principe que ci-dessus.
- Vérifions : $e^{a \ln(x)} = y$ est équivalent à $a \ln(x) = \ln(y)$, soit $\ln(x) = \frac{1}{a} \ln(y)$ ou encore $x = e^{\frac{1}{a} \ln(y)}$, ce qui prouve le proposition.
- Tout cela se vérifie aisément à l'aide des propriétés du logarithme et de l'exponentielle. Par exemple, $x^a \times x^b = e^{a \ln(x)} \times e^{b \ln(x)} = e^{(a+b) \ln(x)} = x^{a+b}$. De même, $(x^a)^b = e^{b \ln(e^{a \ln(x)})} = e^{ab \ln(x)} = x^{ab}$. Quant au $1^a = 1$, c'est une conséquence directe du fait que $\ln(1) = 0$.

□

Remarque 13. La fonction puissance en base a est prolongeable par continuité en 0 en posant $0^a = 0$ lorsque $a > 0$. Si $a > 1$, sa dérivée est également prolongeable par 0 en 0 (cf les résultats de croissance comparée), ce qui prouve que la courbe représentative de ces fonctions admet en 0 une tangente verticale (on reviendra sur ce genre de calculs dans un chapitre ultérieur sur la dérivation).

Vous attendiez les courbes ? Il n'y en aura pas, les fonctions puissances quelconques ayant des allures très similaires à celles des puissances entières et des racines n -èmes vues plus haut.

4 Limites et dérivées utiles

4.1 Limites classiques

Proposition 10. Les deux limites suivantes en 0 peuvent permettre de lever des indéterminations complexes : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Démonstration. Ce sont des conséquences des formules pour les dérivées des fonctions \ln et \exp . Le taux d'accroissement de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 vaut $\tau_0(h) = \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \frac{\ln(1+h)}{h}$.

La fonction f étant dérivable, de dérivée $\frac{1}{x+1}$, l'expression converge donc quand h tend vers 0 vers $f'(0) = 1$. De même, en considérant simplement le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en 0, la deuxième limite est égale à $e^0 = 1$. □

Proposition 11. Croissances comparées :

- $\forall a > 1, \forall b > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty$
- $\forall b > 0, \forall c > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{(\ln(x))^c} = +\infty$
- $\forall a > 1, \forall c > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{(\ln(x))^c} = +\infty$

Autrement dit, on peut répartir de la façon suivante les fonctions usuelles en $+\infty$, les croissances les plus rapides se situant à droite :

$$(\ln x)^{\frac{1}{2}} \quad \ln x \quad (\ln x)^2 \quad (\ln x)^{47} \quad \sqrt{x} \quad x \quad x^2 \quad x^{2436525} \quad 1, 2^x \quad 2^x \quad e^x \quad 12^x$$

Démonstration. Toutes ces propriétés se ramènent à la plus simple des propriétés de croissance comparée, à savoir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, ce que nous ne pouvons pas prouver aisément avec notre définition du logarithme.

- Constatons par exemple que $\frac{a^x}{x^b} = \frac{e^{x \ln(a)}}{e^{b \ln(x)}} = e^{x \ln(a) - b \ln(x)} = e^{x(\ln(a) - b \frac{\ln(x)}{x})}$. En admettant la limite précédente, l'exposant dans l'exponentielle a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (avec la condition $a > 1$), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty$.
- La deuxième est exactement du même type en posant $X = \ln(x)$, puisqu'on a alors $\frac{x^b}{(\ln(x))^c} = \frac{e^{bX}}{e^{c \ln(X)}} = e^{X(b - c \frac{\ln(X)}{X})}$.
- La dernière découle des deux premières par un simple produit de limites. □

Remarque 14. On peut déduire de ces résultats les autres propriétés suivantes :

- $\forall a > 1, \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x \times x^n = 0$
- $\forall b > 0, \forall c > 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^b (\ln x)^c = 0$.

4.2 Dérivation de fonctions issues d'exponentielles

Proposition 12. Rappelons les deux cas particuliers suivants de la formule de dérivation d'une composée :

- $(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$
- $(e^u)' = u' e^u$

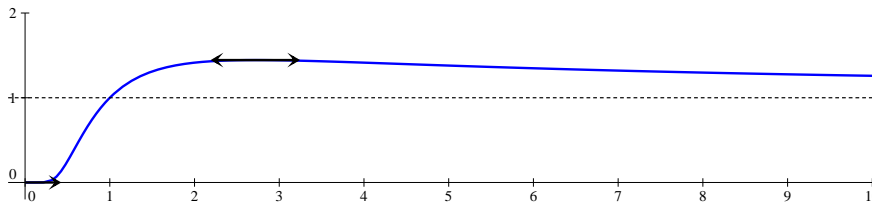
Nous y ajouterons une troisième formule utilisant les puissances quelconques étudiées ci-dessus : lorsque u est une fonction à valeurs strictement positives, $(u^v)' = \left(v' \ln(u) + \frac{vu'}{u} \right) u^v$.

Démonstration. Il est totalement inutile d'apprendre cette dernière formule par coeur, il faut simplement se rappeler que, pour étudier une fonction de ce type, il est indispensable de l'écrire d'abord sous forme exponentielle : $u^v = e^{v \ln(u)}$. La formule est alors une simple application de dérivation d'exponentielle. □

Exemple : Étudions en détail la fonction $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.

- Le premier réflexe à avoir est d'écrire f sous la forme $f(x) = e^{\frac{1}{x} \ln(x)}$. Cela permet notamment de justifier de façon immédiate que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+*}$.
- On peut ensuite calculer la dérivée : $f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} \ln(x) + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \right) e^{\frac{1}{x} \ln(x)} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} e^{\frac{1}{x} \ln(x)}$.
L'exponentielle étant toujours positive, et x^2 également, le signe de f' est celui de $1 - \ln(x)$, qui s'annule lorsque $\ln(x) = 1$, soit $x = e$. La fonction f est croissante sur $]0; e]$ et décroissante sur $[e; +\infty[$. Elle admet un maximum pour $x = e$, de valeur $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$ (ça ne se simplifie pas).

- Déterminons désormais les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici), $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. De l'autre côté, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(x) = 0$ (par croissance comparée), on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^0 = 1$. Il y a en particulier une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.
- Si on est courageux, on peut tenter de déterminer la présence d'une éventuelle tangente en 0 (où la fonction est prolongeable par continuité), en cherchant si f' y admet une limite. Le calcul est loin d'être évident, mais on peut faire une factorisation ingénieuse : $f'(x) = \frac{\ln(x)^2}{x^2} \left(\frac{1}{\ln(x)^2} - \frac{1}{\ln(x)} \right) e^{\frac{\ln(x)}{x}}$. En posant $X = \frac{\ln(x)}{x}$, X a pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0, donc le produit $X^2 e^X$ tend vers 0 (c'est de la croissance comparée). La parenthèse restante avec les inverses de \ln tendant elle aussi manifestement vers 0, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$, ce qui prouve l'existence d'une tangente horizontale à la courbe en 0.
- On achève naturellement par une jolie courbe, en indiquant les tangentes connues :



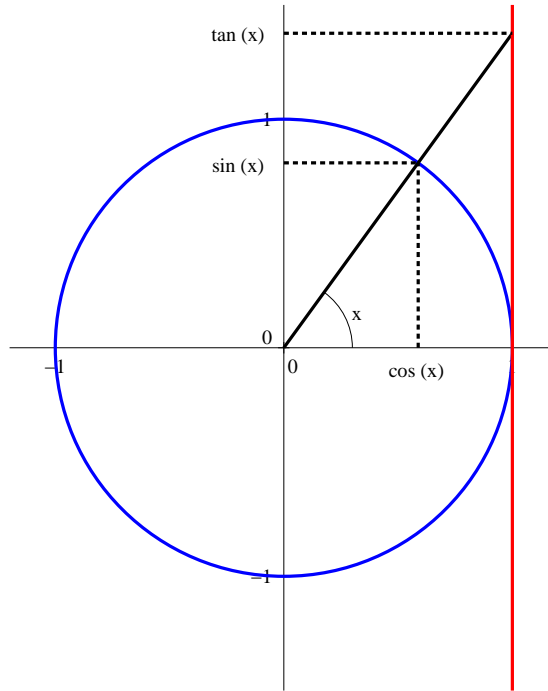
5 Fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques

5.1 Rappels de trigonométrie

Nous débuterons cette partie de cours par un retour sur les bases de la trigonométrie, que vous avez du voir de façon un peu éparpillée au collège, puis en seconde. Les démonstrations seront volontairement brèves, puisque ces premiers paragraphes sont censés être constitués de révisions.

5.1.1 Cercle trigonométrique, radians

Définition 21. Le **cercle trigonométrique**, dans un repère orthonormé, est le cercle de centre O (origine du repère) et de rayon 1. À tout réel x , on associe un point M du cercle trigonométrique en parcourant le cercle sur une distance x à partir du point $(1,0)$, et x est appelé **mesure en radians** de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$. L'abscisse et l'ordonnée du point M associé à x sont appelées respectivement **cosinus** et **sinus** de ce réel. On définit par ailleurs la **tangente** quand c'est possible, c'est à dire si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Pour une interprétation géométrique de la tangente (expliquant d'ailleurs le nom de tangente), cf le dessin ci-dessous.



Remarque 15. Le repérage du cercle trigonométrique suppose le choix d'une orientation sur ce cercle. On appelle sens trigonométrique (ou positif) le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre.

Proposition 13. Valeurs remarquables à connaître :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0	

Démonstration. Pour les multiples de $\frac{\pi}{2}$, il suffit de regarder le cercle trigonométrique. Pour $\frac{\pi}{4}$, on obtient les valeurs facilement en se plaçant dans un demi-carré de côté 1 (en revenant à la définition purement géométrique du cosinus et du sinus dans les triangles rectangles, que vous avez vue au collège). La diagonale a pour longueur $\sqrt{2}$, donc le cosinus comme le sinus de chacun des deux angles de mesure $\frac{\pi}{4}$ valent $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pour $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, on se place dans un demi-triangle équilatéral de côté

1. Les longueurs des trois côtés sont donc 1 ; $\frac{1}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (un petit coup de théorème de Pythagore), dont on déduit sans difficulté les valeurs des lignes trigonométriques. \square

Proposition 14. Propriétés de symétrie du cosinus, du sinus et de la tangente :

- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
- $\cos(x + \pi) = -\cos x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
- $\tan(x + 2\pi) = \tan x$
- $\tan(x + \pi) = \tan x$
- $\tan(-x) = -\tan x$
- $\tan(\pi - x) = -\tan x$
- $\tan(x + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan(x)}$
- $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)}$

Démonstration. C'est toujours une question de symétries du cercle trigonométrique : à $x + 2\pi$ correspond le même point qu'à x ; à $x + \pi$ le symétrique par rapport à 0 ; à $-x$ le symétrique par rapport à l'axe des abscisses ; à $\pi - x$ celui par rapport à l'axe des ordonnées ; à $x + \frac{\pi}{2}$ l'image par une rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et enfin à $\frac{\pi}{2} - x$ l'image par la composée de cette rotation et de la symétrie par rapport à l'axe des abscisses (en commençant par la symétrie). \square

5.1.2 Formules trigonométriques

Proposition 15. Pour tout réel x , $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Démonstration. Soit M le point associé à x sur le cercle trigonométrique. La distance OM , qui vaut 1, est égale à $\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}$, ce qui élevé au carré donne notre égalité. \square

Les formules suivantes sont toutes à connaître parfaitement et surtout à ne pas confondre les unes avec les autres. Nous verrons un peu plus tard comment les retenir plus facilement à l'aide des exponentielles complexes.

Proposition 16. Formules d'addition :

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Démonstration. Soient M et N les points du cercle trigonométrique de coordonnées respectives $(\cos a, \sin a)$ et $(\cos(a + b), \sin(a + b))$ et M' l'image de M par rotation autour de l'origine d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Le triplet $(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ est un repère (orthonormal direct). Les coordonnées de N dans ce repère sont $(\cos b, \sin b)$ (puisque N appartient toujours au cercle trigonométrique dans ce nouveau repère, et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = a + b - a = b$), donc $\overrightarrow{ON} = \cos b \overrightarrow{OM} + \sin b \overrightarrow{OM'} = \cos b (\cos a \vec{i} + \sin a \vec{j}) + \sin b (-\sin a \vec{i} + \cos a \vec{j}) = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) \vec{i} + (\sin a \cos b + \cos a \sin b) \vec{j}$. Comme on sait par ailleurs, par définition du point N , que ces coordonnées sont égales à $(\cos(a + b), \sin(a + b))$, une petite identification donne les formules d'addition du sinus et du cosinus. On a ensuite $\tan(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$. Pour obtenir les formules de soustraction, on reprend les formules précédentes en remplaçant b par $-b$. \square

Méthode : Ces formules permettent de calculer les valeurs exactes des lignes trigonométriques d'angles qui peuvent s'exprimer comme sommes ou différences d'angles classiques, par exemple $\frac{\pi}{12}$:

on utilise le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, donc $\cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. De même, $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Proposition 17. Formules de duplication :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2 \cos a \sin a$
- $\cos(3a) = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$
- $\sin(3a) = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$

Démonstration. Ce ne sont que des cas particuliers des formules d'addition, mais il est bon de bien les connaître. Pour obtenir $\cos(3a)$, on applique la formule d'addition à a et $2a$: $\cos(3a) = \cos(2a) \cos a - \sin(2a) \sin a = 2 \cos^3 a - \cos a - 2 \cos a \sin^2 a = 2 \cos^3 a - \cos a - 2 \cos a(1 - \cos^2 a) = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$. \square

Remarque 16. On peut calculer les valeurs de $\cos(na)$ et $\sin(na)$ de proche en proche de cette manière, mais on verra une méthode plus efficace utilisant les nombres complexes.

Proposition 18. Transformations de sommes en produits (et vice versa) :

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b))$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b))$
- $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$
- $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p + q}{2}\right) \cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$
- $\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p + q}{2}\right) \sin\left(\frac{p - q}{2}\right)$
- $\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p + q}{2}\right) \cos\left(\frac{p - q}{2}\right)$
- $\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p + q}{2}\right) \sin\left(\frac{p - q}{2}\right)$

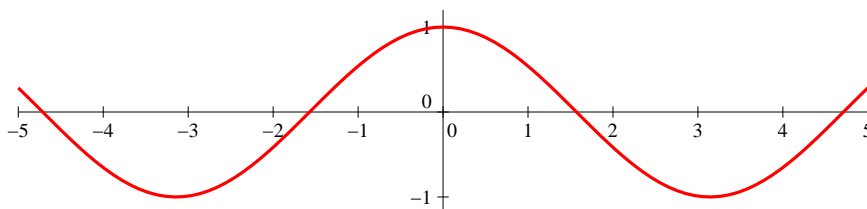
Démonstration. Rien de compliqué, par exemple $\cos(a + b) + \cos(a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b = 2 \cos a \cos b$. On obtient de même les deux formules suivantes, puis les quatre dernières s'obtiennent directement en partant du membre de droite et en utilisant les trois premières. \square

5.2 Fonctions trigonométriques

Proposition 19. La fonction **cosinus** est définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto \cos(x)$. Elle est paire et 2π -périodique, continue et dérivable, et sa dérivée est égale à $-\sin(x)$. Sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$, son tableau de variations est le suivant :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	-1	0	1	0	-1

La courbe bien connue du cosinus :

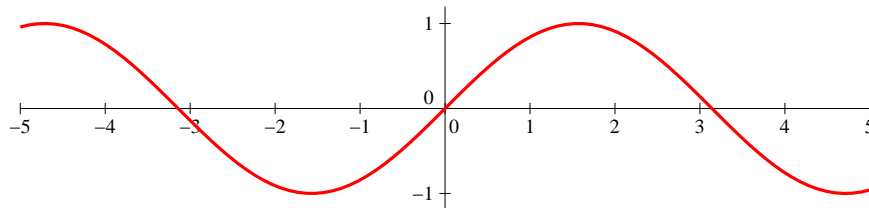


Démonstration. La périodicité et la parité découlent des propriétés $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\cos(-x) = \cos x$. Le calcul de dérivée peut s'effectuer en revenant au taux d'accroissement et en utilisant des encadrements exploitant la définition géométrique des lignes trigonométriques, nous verrons cette démonstration en exercice. \square

Proposition 20. La fonction **sinus** est définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto \sin(x)$. Elle est impaire, 2π -périodique, continue et dérivable, sa dérivée est la fonction cosinus, et voici son tableau de variations sur $[-\pi; \pi]$:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	-1	0	1	0

Et une autre courbe bien connue :

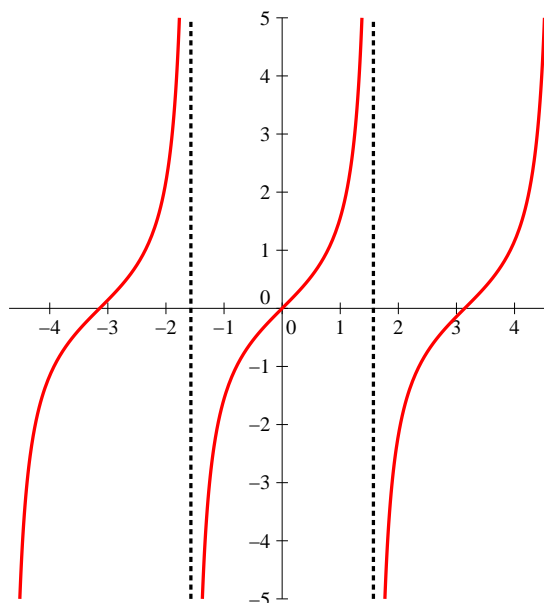


Démonstration. Mêmes remarques que pour le sinus. □

Proposition 21. La fonction **tangente** est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ par $x \mapsto \tan(x)$. Elle est impaire, π -périodique, continue et dérivable sur son domaine de définition, et $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$. D'où le tableau de variations suivant sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$:

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$-\infty$	0	$+\infty$

Et une dernière courbe peut-être moins bien connue :

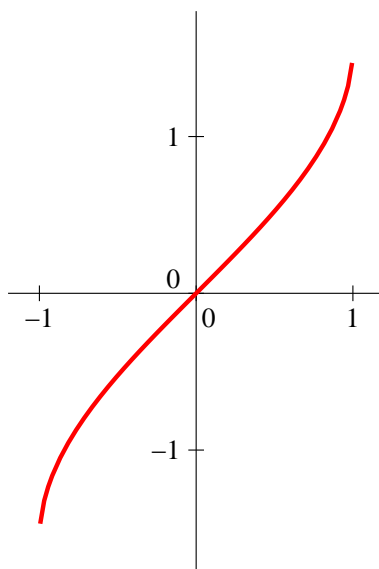


Démonstration. Encore une fois, tout a été vu sauf la dérivée et les limites, qui se calculent facilement. Par exemple, $\tan'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$ en utilisant la formule de dérivation d'un quotient. Par ailleurs, $1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$, d'où la deuxième forme possible. \square

5.3 Fonctions trigonométriques réciproques

Définition 22. La fonction sin étant strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, elle y est bijective vers l'intervalle image $[-1; 1]$. La fonction réciproque du sinus sur cet intervalle est appelée **arcsinus** et notée arcsin.

Proposition 22. La fonction arcsin est impaire, définie et continue sur $[-1; 1]$ et dérivable sur $] -1; 1[$, de dérivée $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. Elle est strictement croissante sur son domaine de définition.

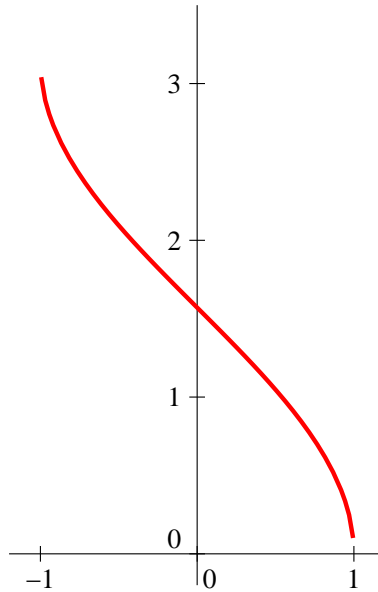


Démonstration. L'imparité et la croissance d'arcsin découlent de celles du sinus via le théorème de la bijection. Pour la dérivée, appliquons la formule de dérivation d'une réciproque : $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}$. La fonction arcsin étant à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, et le cosinus étant positif sur cet intervalle, on a $\cos(\arcsin y) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)} = \sqrt{1 - y^2}$, ce qui prouve la formule. \square

Remarque 17. Le fait que $\sin(\arcsin y) = y$, utilisé dans la démonstration, n'est vrai que si $y \in [-1; 1]$ (sinon $\arcsin(y)$ n'existe pas). De même, $\arcsin(\sin(x)) = x$ seulement si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (mais cette expression est définie quelle que soit la valeur de x).

Définition 23. La fonction cos est strictement décroissante sur $[0; \pi]$, elle y est donc bijective vers son intervalle image $[-1; 1]$. On définit la fonction **arccosinus** sur $[-1; 1]$ (notée arccos) comme la réciproque de cos sur cet intervalle.

Proposition 23. La fonction arccos est paire, continue sur $[-1; 1]$ et dérivable sur $] -1; 1[$, de dérivée $\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. Elle est strictement décroissante sur son domaine de définition.



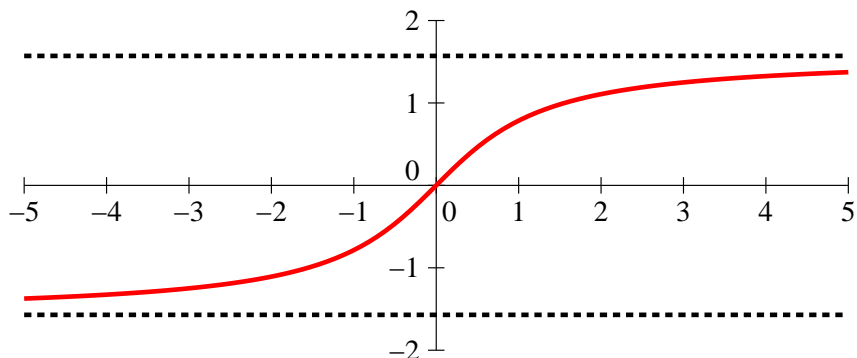
Démonstration. La preuve est totalement similaire à la précédente. □

Proposition 24. Pour tout réel $y \in [-1; 1]$, $\arccos(y) + \arcsin(y) = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Notons $g : y \mapsto \arccos(y) + \arcsin(y)$. La fonction g est définie sur $[-1; 1]$, dérivable et de dérivée nulle sur $] -1; 1[$. Elle est donc constante égale à $g(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$. □

Définition 24. La fonction \tan est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, elle y effectue donc une bijection vers son intervalle image \mathbb{R} . La fonction **arctangente** est définie sur \mathbb{R} comme sa réciproque, on la note \arctan .

Proposition 25. La fonction \arctan est impaire, continue et dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$. Elle est strictement croissante sur \mathbb{R} , avec pour limites respectives $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$ et $+\infty$.



Démonstration. Comme d'habitude, contentons-nous du calcul de la dérivée, qui est ici facile : $\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan y)} = \frac{1}{(1 + \tan^2)(\arctan y)} = \frac{1}{1 + y^2}$. □

6 Fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques

Les fonctions hyperboliques sont de la même famille que les fonctions trigonométriques dans le sens où elles ont une interprétation géométrique très similaire en remplaçant le cercle trigonométrique par une hyperbole, ce qui explique le nom de ces fonctions. Je ne vous donnerai toutefois pas cette interprétation immédiatement, car ces fonctions peuvent s'exprimer très simplement à partir d'une autre fonction que vous connaissez bien, l'exponentielle.

6.1 Fonctions hyperboliques

Définition 25. Les fonctions **cosinus hyperbolique**, **sinus hyperbolique** et **tangente hyperbolique** sont définies sur \mathbb{R} par les équations suivantes : $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

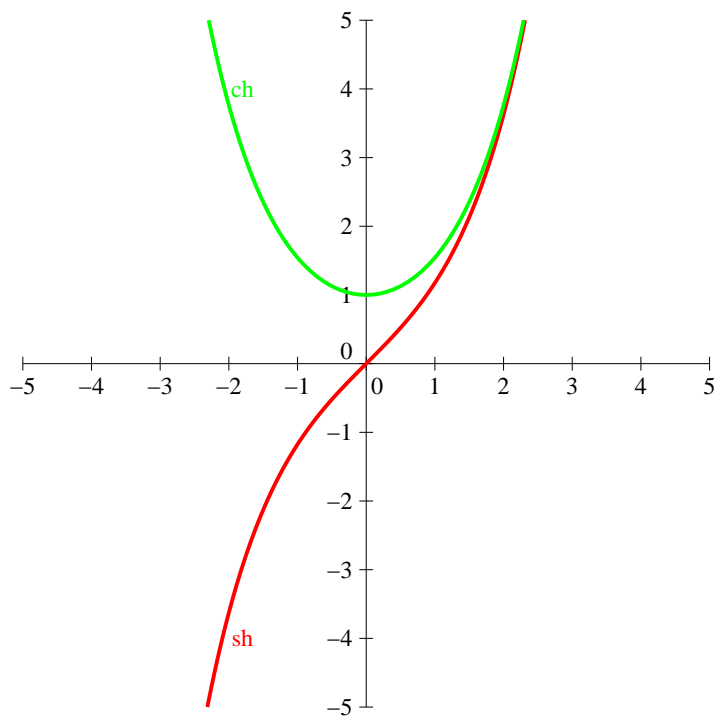
Remarque 18. Nous verrons quand nous reverrons les propriétés classiques des nombres complexes que les formules d'Euler donnent une forme extrêmement similaires aux fonctions trigonométriques. Par ailleurs, les fonctions trigonométriques interviennent naturellement dans le cadre de certains problèmes physiques simples : la courbe formée par un câble fixé en deux points et soumis à la force gravitationnelle (câble téléphonique mal tendu entre deux poteaux, par exemple) est une courbe de cosinus hyperbolique.

Proposition 26. Pour tout réel x , on a $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Démonstration. $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2) = 1$. □

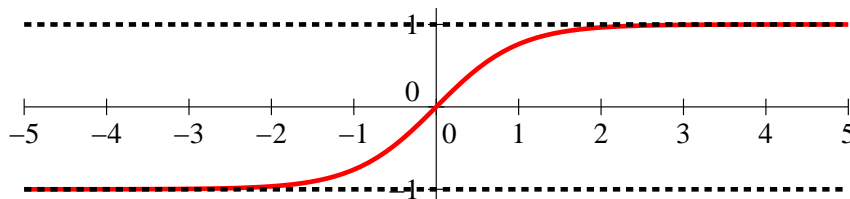
Remarque 19. Il existe beaucoup d'autres formules de trigonométrie hyperbolique, ressemblant souvent aux formules de trigonométrie classiques, nous en verrons quelques exemples en exercice.

Proposition 27. La fonction \cosh est paire, la fonction \sinh impaire. Les fonctions \cosh et \sinh sont dérivables sur \mathbb{R} et $\cosh' = \sinh$; $\sinh' = \cosh$. Le cosinus hyperbolique est décroissant sur \mathbb{R}_- et croissant sur \mathbb{R}_+ , alors que le sinus hyperbolique est croissant sur \mathbb{R} . Les courbes sont les suivantes :



Démonstration. Tout ceci est assez facile : $\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$; $\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x$; $\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$, et de même pour \sinh' . Quand aux signes, \cosh est positive comme somme de deux exponentielles, \sinh est donc croissante et s'annule en 0, elle est donc négative sur \mathbb{R}_- et positive sur \mathbb{R}_+ . \square

Proposition 28. La fonction \tanh est impaire, dérivable sur \mathbb{R} et de dérivée $\tanh' = 1 - \tanh^2 = \frac{1}{\cosh^2}$. Elle est croissante sur \mathbb{R} , et admet pour asymptotes horizontales les droites d'équation $y = -1$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$. La courbe :

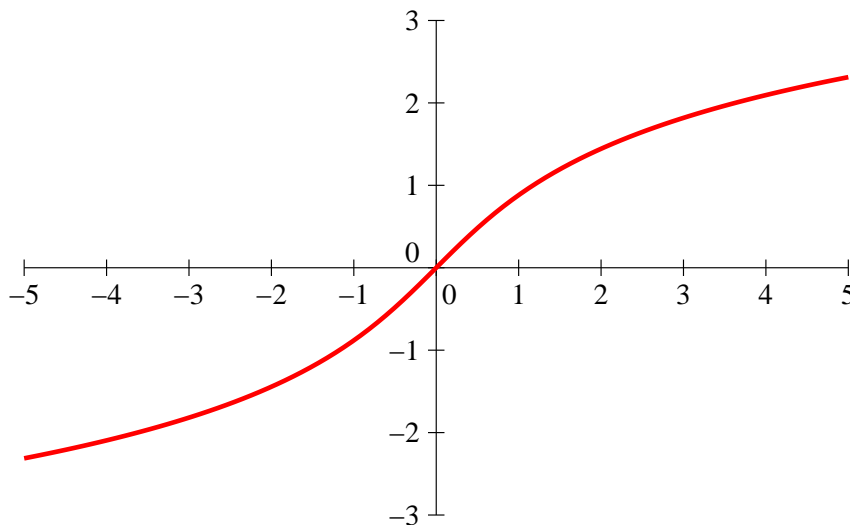


Démonstration. \tanh est impaire comme quotient d'une fonction paire et d'une impaire. De plus, $\tanh' = \frac{\cosh^2 - \sinh^2}{\cosh^2} = \frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2$. Les calculs de limites sont élémentaires, par exemple $\tanh(x) = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$, qui a bien pour limite 1 en $+\infty$. On peut déduire la limite en $-\infty$ de l'imparité de la fonction. \square

6.2 Fonctions hyperboliques réciproques

Définition 26. La fonction \sinh étant bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , on définit la fonction **argument sinus hyperbolique**, ou Argsh , sur \mathbb{R} comme étant sa réciproque.

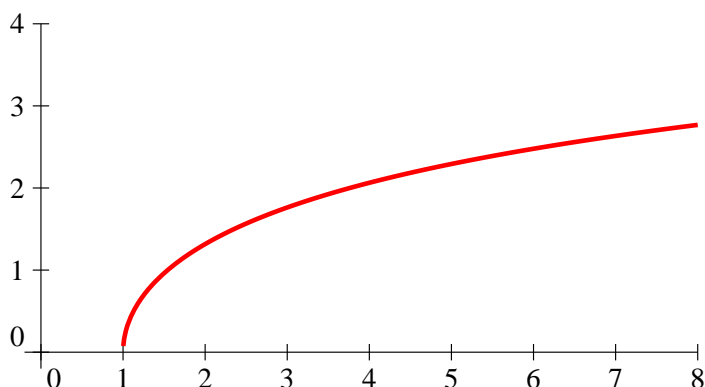
Proposition 29. La fonction Argsh est impaire, continue et dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $\text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Elle est strictement croissante sur \mathbb{R} .



Démonstration. Comme d'habitude, le théorème de la bijection fournit une grande partie des résultats, et la formule de la dérivée d'une réciproque permet d'obtenir la dérivée : $\text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\cosh(\text{Argsh}(x))}$. Or, $\cosh(\text{Argsh}(x)) = \sqrt{1 + \sinh^2(\text{Argsh}(x))} = \sqrt{1 + x^2}$ en utilisant la formule $\sinh^2(x) + \cosh^2(x) = 1$. \square

Définition 27. La fonction \cosh étant strictement croissante, donc bijective sur \mathbb{R}_+^* , on peut définir la fonction argument cosinus hyperbolique, ou Argch , sur $[1; +\infty[$ comme sa réciproque.

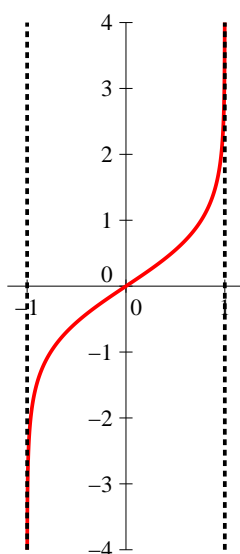
Proposition 30. La fonction Argch est continue sur $[1; +\infty[$ et dérivable sur $]1; +\infty[$, de dérivée $\text{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Elle est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.



Démonstration. Démonstration tout à fait similaire à la précédente. \square

Définition 28. La fonction \tanh étant bijective de \mathbb{R} dans $] - 1; 1[$, on définit la fonction argument tangente hyperbolique, ou Argth , sur $] - 1; 1[$ comme sa réciproque.

Proposition 31. La fonction Argth est impaire, continue et dérivable sur $] - 1; 1[$, de dérivée $\text{Argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$. Elle est strictement croissante sur $] - 1; 1[$.



Démonstration. Ici aussi, la preuve est la même que dans le cas d' \arctan , à un petit signe près dans le calcul de la dérivée. \square

7 Formulaire de dérivées à connaître

Pour terminer, un petit tableau récapitulatif des dérivées à savoir par coeur :

fonction	dérivée	\mathcal{D}_f	$\mathcal{D}_{f'}$	condition
c	0	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$c \in \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$n \in \mathbb{N}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$n \in \mathbb{N}^*$
x^a	ax^{a-1}	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}_+	$a \geq 1$
x^a	ax^{a-1}	\mathbb{R}_+	\mathbb{R}_+^*	$0 < a < 1$
x^a	ax^{a-1}	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	$a < 0$
e^x	e^x	\mathbb{R}	\mathbb{R}	
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	
a^x	$a^x \ln a$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$a > 0$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$	\mathbb{R}_+^*	\mathbb{R}_+^*	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\}$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1; 1]$	$] - 1; 1[$	
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1; 1]$	$] - 1; 1[$	
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	
$\tanh(x)$	$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	
$\text{Argsh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	
$\text{Argch}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$[1; +\infty[$	$]1; +\infty[$	
$\text{Argth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$] - 1; 1[$	$] - 1; 1[$	