Feuille d'exercices n°9 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

10 janvier 2013

Exercice 1 (*)

1. La relation de parallélisme est réflexive (une droite est parallèle à elle-même), et transitive (si d et d' d'un coté, et d' et d'' de l'autre sont parallèles, alors d et d'' sont parallèles), mais pas antisymétrique. Au contraire, la relation est symétrique : si d est parallèle à d', alors d' est automatiquement parallèle à d. La relation de parallélisme est en fait une relation d'équivalence.
2. La relation d'inclusion est réflexive, transitive (si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$), et antisymétrique puisque $E \subset F$ et $F \subset E$ implique bien $E = F$. Il s'agit donc d'une relation d'ordre, qui n'est pas le moins du monde totale (par exemple, si $E = [0;1]$ et $F = [2;3]$, on n'a ni $E \subset F$ ni $F \subset E$). Le plus grand élément pour cette relation est $\mathbb{R}$, le plus petit est $\emptyset$.
3. La relation R est sûrement réflexive puisque $a^a \leqslant a^a$. Elle n'est par contre pas transitive : par exemple $7R2$ puisque $7^2 = 49 < 2^7 = 128$; $2R3$ puisque $2^3 = 8 < 3^2 = 9$, mais on n'a pas $3^7 < 7^3$ (en effet, $3^7 = 2\ 187$ et $7^3 = 343$). Elle n'est pas non plus antisymétrique : $2R4$ et $4R2$ sont tous les deux vérifiés puisque $2^4 = 16 = 4^2$. Il y a un plus petit élément tout de même pour cette relation puisque $1Rb$ est vérifié quel que soit l'entier b. Il y a également un plus grand élément qui est 3 (cf plus bas). Si on enlève les cas particulier 1 et 2, on peut en fait prouver que la relation R coïncide avec la relation $\geqslant$ (et qu'il s'agit donc d'une relation d'ordre dont le plus grand élément est toujours 3 mais qui ne possède plus de plus petit élément). En effet, aRb est équivalent à $b\ln(a) \leqslant a\ln(b)$. Si on pose $f_a(x) = a\ln(x) - x\ln(a)$, la fonction a pour dérivée $\dfrac{a}{x} - \ln(a)$, qui s'annule en $x = \dfrac{a}{\ln(a)}$. La fonction est donc croissante puis décroissante. Or, elle s'annule certainement en $x = a$, avec $a > \dfrac{a}{\ln(a)}$ puisque a est supposé supérieur à 3. On a donc $f_a(x) < 0$ si $x > a$, et en particulier bRa si $b > a$. Sur l'intervalle $[3;a]$, la fonction f_a est croissante puis décroissante, reste à vérifier le signe de $f_a(3)$. Or, $f_a(3) = a\ln(3) - 3\ln(a) = -f_3(a)$, donc on vient d'expliquer que c'était nécessairement positif si $a \geqslant 3$. La fonction f_a est donc positive sur $[3,a]$, et cela prouve que aRb si $b \leqslant a$. Notre relation est donc bien une relation d'ordre total (assez élémentaire qui plus est !).
4. La relation R est certainement réflexive, transitive (si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ pour tout réel alors $f(x) \leqslant h(x)$), mais également antisymétrique (en effet si $f(x) \leqslant g(x)$ et $g(x) \leqslant f(x)$, alors $f(x) = g(x)$ et cette relation est vraie pour tous les réels). C'est donc une relation d'ordre. Ce n'est pas du tout une relation d'ordre total, si on prend par exemple $f(x) = x$ et $g(x) = -x$, on ne peut pas les comparer à l'aide de la relation R (si $x < 0$, $f(x) < g(x)$, mais si $x > 0$, $g(x) < f(x)$). Il n'y a pas non plus de plus grand élément (une fonction ne peut pas être supérieure à toutes les fonctions constantes, encore moins à toutes les fonctions tout court) ni de plus petit élément.
5. La relation R est réflexive (puisque $|0| \leqslant 0$), mais aussi transitive (si $|x'-x| \leqslant y'-y$ et $|x''-x'| \leqslant y''-y'$, alors par inégalité triangulaire $|x''-x| \leqslant |x''-x'| + |x'-x| \leqslant y''-y'+y'-y \leqslant y''-y$) et antisymétrique : si $|x'-x| \leqslant y'-y$ et $|x-x'| \leqslant y-y'$, alors on a nécessairement $y-y' = 0$ (sinon l'un des deux membres de droite des inégalités précédentes est strictement négatif, et une valeur absolue ne peut pas lui être inférieure !), puis $|x-x'| = 0$, soit $x = x'$. Les deux

couples coïncident donc. La relation d'ordre n'est pas totale, par exemple $(0,0)$ et $(1,0)$ ne sont pas comparables puisqu'on a alors $y - y' = y' - y = 0$, mais $|x - x'| = 1$. Il n'y a pas de plus grand ni de plus petit élément pour R (pour un couple fixé, on peut par exemple toujours trouver un autre couple tel que $y - y' < 0$ qui ne peut donc pas être plus grand). Un plus grand élément pour le disque trigonométrique serait nécessairement le point du disque ayant la plus grande ordonnée (pour que le membre de droite dans la relation R ne soit jamais strictement négatif, sinon on ne peut plus comparer avec un autre élément du disque), à savoir le point $(0,1)$. Mais ce point n'est pas plus grand que tous les autres du disque trigo, par exemple $(0,6;0,6)$ est un point du disque trigonométrique, mais $|0,6 - 0| > 1 - 0,6$. On peut par contre trouver une borne supérieure, en l'occurence le couple $(0, \sqrt{2})$

Exercice 2 (***)

L'ensemble E est un sous-ensemble de $[0;1]$ donc est un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$, et il est non vide car il contient nécessairement 0 (puisque $f(0 \in [0;1])$. Il admet donc une borne supérieure qu'on va noter a conformément aux indications de l'énoncé. Par propriété de la borne supérieure, on peut trouver pour tout ε positif un réel dans $[a - \varepsilon; a]$ appartenant à E. On peut alors écrire, en utilisant la croissance de f et l'appartenance de $a - \varepsilon$ à E les inégalités $f(a) \geqslant f(a - \varepsilon) \geqslant a - \varepsilon$. Autrement dit, $f(a) \geqslant a - \varepsilon$, ce qui implique $f(a) \geqslant a$ puisque c'est vrai pour tout ε positif. De plus, a étant la borne supérieure de E, on peut dire que $\forall \varepsilon > 0$, $f(a + \varepsilon) < a + \varepsilon$ (puisque ces éléments ne peuvent pas appartenir à E). Par croissance de f, on a donc $f(a) \leqslant f(a + \varepsilon) < a + \varepsilon$ et on conclut comme tout à l'heure que $f(a) \leqslant a$. Conclusion : $f(a) = a$.

Exercice 3 (**)

Notons par exemple $s = \sup(A)$ et $t = \sup(B)$. Si A et B sont non vides et majorées, $A \cup B$ est certainement non vide, et également majorée (par exemple par le $\max(s,t)$). Montrons que ce maximum est en fait la borne supérieure de $A \cup B$. On vient de voir que c'en est un majorant. De plus, si ce max est égal à s (le cas où il est égal à t est complètement similaire), on sait que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$, $s - \varepsilon \leqslant x \leqslant s$. A fortiori on peut donc trouver un élément de $A \cup B$ (le même que précédemment) tel que $s - \varepsilon \leqslant x \leqslant s$, ce qui prouve que s est la borne supérieure de $A \cup B$.

Exercice 4 (***)

1. En effet, il parait que $0 + 0 = 0$ et $0 \times 0 = 0$.
2. Prenons par exemple $y = 1$ et un x pour lequel $f(x) \neq 0$ (cela existe forcément depuis qu'on a exclu la solution nulle) dans la relation $f(xy) = f(x)f(y)$. On obtient $f(x) = f(1)f(x)$, ce qui en simplifiant par $f(x)$ (ouf, il n'est pas nul) donne bien $f(1) = 1$. Pour 0, c'est encore plus facile : en prenant $x = y = 0$ dans le première relation, $f(0) = f(0) + f(0)$, donc $f(0) = 0$.
3. Effectuons une petite récurrence. On a déjà vu que $f(1) = 1$, supposons désormais $f(n) = n$ et appliquons la première relation avec $x = n$ et $y = 1$ pour obtenir $f(n+1) = f(n) + f(1) = n+1$ en exploitant l'hypothèse de récurrence. La relation est donc vraie pour tous les entiers naturels.
4. Considérons donc un nombre rationnel $x = \dfrac{p}{q}$, et appliquons la deuxième relation à $x = \dfrac{p}{q}$ et à $y = q$, on trouve alors $f(p) = f(x)f(q)$, soit $p = qf(x)$ puisque p et q sont des entiers. On en déduit immédiatement $f(x) = \dfrac{p}{q} = x$.
5. Puisque f n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$, on peut toujours écrire $f(x) = f(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = f(\sqrt{x})f(\sqrt{x}) = (f(\sqrt{x}))^2 \geqslant 0$. Prenons désormais deux réels a et b tels que $a < b$, alors $b = a + (b - a)$, donc $f(b) = f(a) + f(b - a) \geqslant f(a)$ puisque $f(b - a) \geqslant 0$ (on vient de prouver que f ne prenait que des valeurs positives). La fonction f est donc croissante.

6. Soit donc un nombre réel positif irrationnel, supposons que $f(x) \neq x$, par exemple $f(x) > x$ (l'autre cas est très similaire). L'intervalle $[x, f(x)]$ étant donc non vide, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il contient un nombre rationnel y. On a alors $x < y < f(x)$. Or, par croissance de f, on devrait avoir $f(x) \leqslant f(y)$, ce qui constitue une grave contradiction. On a donc nécessairement $f(x) = x$, quel que soit le réel positif x.

Exercice 5 (**)

- Commençons par constater que $(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 = 2n + 1 + 2\sqrt{n^2+n}$. Par ailleurs, $4n^2 < 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$, donc $2n < 2\sqrt{n^2+n} < 2n+1$. Autrement dit, $Ent(2\sqrt{n^2+n}) = 2n$, et $Ent((\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2) = 2n + 1 + 2n = 4n + 1$.
- Le plus simple, bien que ce soit un peu laborieux, est de distinguer quatre cas selon le reste de la division de n par 4 :
  – si $n = 4p$, $Ent\left(\dfrac{n-1}{2}\right) + Ent\left(\dfrac{n+2}{4}\right) + Ent\left(\dfrac{n+4}{4}\right) = Ent\left(2p - \dfrac{1}{2}\right) + Ent\left(p + \dfrac{1}{2}\right) + Ent(p+1) = 2p - 1 + p + p + 1 = 4p = n$.
  – si $n = 4p+1$, $Ent\left(\dfrac{n-1}{2}\right) + Ent\left(\dfrac{n+2}{4}\right) + Ent\left(\dfrac{n+4}{4}\right) = Ent(2p) + Ent\left(p + \dfrac{3}{4}\right) + Ent\left(p + \dfrac{5}{4}\right) = 2p + p + p + 1 = 4p + 1 = n$.
  – si $n = 4p+2$, $Ent\left(\dfrac{n-1}{2}\right) + Ent\left(\dfrac{n+2}{4}\right) + Ent\left(\dfrac{n+4}{4}\right) = Ent\left(2p + \dfrac{1}{2}\right) + Ent(p+1) + Ent\left(p + \dfrac{3}{2}\right) = 2p + p + 1 + p + 1 = 4p + 2 = n$.
  – si $n = 4p+3$, $Ent\left(\dfrac{n-1}{2}\right) + Ent\left(\dfrac{n+2}{4}\right) + Ent\left(\dfrac{n+4}{4}\right) = Ent(2p+1) + Ent\left(p + \dfrac{5}{4}\right) + Ent\left(p + \dfrac{7}{4}\right) = 2p + 1 + p + 1 + p + 1 = 4p + 3 = n$.

  Dans tous les cas, la partie entière recherchée est simplement égale à n.
- En utilisant subtilement l'indication donnée, et en constantant la présence de sommes télescopiques $\sqrt{10\ 001} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=1}^{10\ 000} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \sqrt{10\ 000}$. Comme $\sqrt{10\ 000} = 100$, la quantité dont on cherche la partie entière est strictement inférieure à 100 mais supérieure à un nombre plus grand que 99. Bref, la partie entière en question vaut 99.

Exercice 6 (**)

- Soit donc un réel $M > 0$ (si $M \leqslant 0$, il suffit de prendre $n_0 = 2$ pour que la définition de la limite soit vérifiée). On aura $n^2 - 2n > M$ dès que (ce n'est pas une équivalence) $n - 2 > \sqrt{M}$ (puisqu'alors $n > \sqrt{M}$, et $n^2 = n(n-2) > M$). Il suffit donc de prendre $n_0 = Ent(2 + \sqrt{M}) + 1$ pour satisfaire la définition de la limite infinie.
- Soit $\varepsilon > 0$, $\dfrac{1}{2n+3} < \varepsilon$ si $2n + 3 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, soit $n > \dfrac{1}{2\varepsilon} - \dfrac{3}{2}$, il suffit donc de prendre un n_0 strictement supérieur à cette quantité (je vous épargne le coupe de la partie entière augmentée d'un) pour satisfaire à la définition de la limite nulle.
- Soit $\varepsilon > 0$, on calcule $\dfrac{2n-1}{n+1} - 2 = \dfrac{-3}{n+1}$. On aura donc $\left|\dfrac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$ si $\dfrac{3}{n+1} < \varepsilon$, soit $n > \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$, ce qui donne facilement une valeur de n_0 convenable.
- Soit $M > 0$ (si $M \leqslant 0$, encore une fois, ce n'est pas trop dur de rendre $\sqrt{n+3}$ plus grand que M). On aura $\sqrt{n+3} > M$ dès que $n > M^2 - 3$. Il suffit donc de prendre $n_0 = Ent(M^2 - 3) + 1$.

Exercice 7 (**)

1. Vrai, elle est minorée par le plus petit des termes précédant le rang à partir duquel elle est croissante (c'est-à-dire que si, par exemple, (u_n) est croissante à partir du rang 1000, la suite sera minorée par le plus petit des termes parmi u_0, u_1, ..., $u_{1\ 000}$; en effet, tous les termes suivants seront de toute façon plus grands que $u_{1\ 000}$).
2. Faux, par exemple $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0 mais $u_{n+1} - u_n$ change de signe en permanence.
3. C'est également faux, on peut par exemple prendre $u_n = n^2$ si n est pair, et $u_n = (n-1)^2 - 1$ si n est impair. La suite n'est pas croissante à partir d'un certain rang puisque chaque terme d'indice impair est plus petit que le terme d'indice pair qui le précède, et pourtant elle diverge vers $+\infty$.
4. C'est tout à fait faux, par exemple la suite utilisée dans la question précédente a des valeurs toujours plus grandes que $n - 2$ (je vous laisse le vérifier) qui est une suite croissante.
5. Faux, par exemple $(-1)^n$ ne converge pas alors que sa valeur absolue est constante égale à 1 (et donc convergente).
6. Vrai, dire que $|u_n - 0| < \varepsilon$ est la même chose que $|u_n| - 0 < \varepsilon$.

Exercice 8 (* à **)

Première version du corrigé, en rédigeant tout le plus soigneusement possible, et de façin un brin « rustique » :

- On peut écrire $u_n = \dfrac{3^n}{4^n} - \dfrac{2^n}{4^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. La suite est donc une différence de deux suites géométriques dont les raisons sont comprises entre -1 et 1. Ces deux suites convergent donc vers 0, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- On peut développer : $u_n = 2e^{-n} - ne^{-n}$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, donc le premier terme de la différence tend vers 0. Le deuxième peut s'écrire sous la forme $\dfrac{n}{e^n}$, c'est un cas d'école de croissance comparée, il tend également vers 0. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Pour un quotient de polynôme, vous êtes autorisés à utiliser la règle du quotient des termes de plus haut degré : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{2n^2} = \dfrac{1}{2}$.
- Utilisation de la quantité conjuguée très conseillée pour ce calcul :
$u_n = \dfrac{(\sqrt{n^2-1} - n)(\sqrt{n^2-1} + n)}{\sqrt{n^2-1} + n} = \dfrac{n^2 - 1 - n^2}{\sqrt{n^2-1} + n} = \dfrac{-1}{\sqrt{n^2-1} + n}$.
Le dénominateur de cette fraction ayant clairement pour limite $+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- La principale difficulté est la manipulation des factorielles : $u_n = \dfrac{n! \times (n+1) \times (n+2)}{(n^2+1) \times n!} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{n^2+1} = \dfrac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 1}$. Reste à utiliser la règle des termes de plus haut degré pour obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- Il faut simplement faire les choses méthodiquement. D'un côté, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{2n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = e^0 = 1$; de l'autre côté, en utilisant la règle des termes de plus haut degré, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{n}{n+2}\right) = \ln(1) = 0$. Il ne reste plus qu'à additionner les deux termes pour obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- On peut factoriser si on le souhaite numérateur et dénominateur par n, mais le plus simple reste sûrement d'encadrer le quotient en utilisant que $-1 \leqslant sin(n) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$.

On obtient ainsi, $\forall n \geqslant 2$, $\frac{n-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{n-1}$, soit $1 - \frac{2}{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{2}{n-1}$. Les deux membres extrêmes de l'encadrement ayant la même limite 1, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.

- Revenons à la définition du sinus hyperbolique : $u_n = \frac{e^{2n} - e^{-2n}}{2} - (e^n - e^{-n}) = e^n \left(\frac{e^n}{2} - 1 \right) - \frac{e^{-2n}}{2} + e^{-n}$. Une simple application des règles de calcul sur les sommes et produits de limite permet alors d'obtenir $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Pour celle-ci, difficile de s'en sortir sans équivalents, ou du moins sans une utilisation subtile des taux d'accroissement : comme $\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{\pi^2}{n^2} = 1$, on peut dire que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{\pi^2}{n^2}) - \ln(1)}{1 + \frac{\pi^2}{n^2}} = \ln'(1) = 1$, soit $\lim_{n \to +\infty} n^2 \ln \left(1 + \frac{\pi^2}{n^2} \right) = \pi^2$. Or, $n\sqrt{\ln \left(1 + \frac{\pi^2}{n^2} \right)} = \sqrt{n^2 \ln \left(1 + \frac{\pi^2}{n^2} \right)}$, donc tout ce qui se trouve dans l'arctangente définissant u_n a pour limite $\frac{\sqrt{\pi^2}}{4} = \frac{\pi}{4}$, et $\lim_{n \to +\infty} u_n = \arctan \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1$.

Deuxième version du corrigé, en utilisant les équivalents et avec une rédaction nettement moins détaillée :

- $\frac{3^n - 2^n}{4^n} \sim \left(\frac{3}{4} \right)^n$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n} = 0$.
- $\lim_{n \to +\infty} (-n+2)e^{-n} = 0$ par croissance comparée.
- $\frac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34} \sim \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$, donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34} = \frac{1}{2}$.
- $\sqrt{n^2 - 1} - n = \frac{n^2 - 1 - n^2}{\sqrt{n^2 - 1} + n} = -\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$, donc $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n^2 - 1} - n = 0$.
- $\frac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!} = \frac{(n+1)(n+2)n!}{(n^2+1)n!} = \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 1} \sim \frac{n^2}{n^2} = 1$, donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!} = 1$.
- $\lim_{n \to +\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} \ln \left(\frac{n}{n+2} \right) = 0$, donc la limite recherchée est égale à 1.
- $u_n \sim \frac{n}{n} = 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.
- $u_n = \frac{e^{2n} - e^{-2n}}{2} - (e^n - e^{-n}) \sim \frac{e^{2n}}{2}$, donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- $\tan u_n \sim \frac{n}{4} \sqrt{\frac{\pi^2}{n^2}} \sim \frac{\pi}{4}$, donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = \arctan \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1$.

Exercice 9 (***)

1. Commençons donc par prouver la croissance de f sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $f(x) = x \ln \frac{x+a}{x} = x \ln(x + a) - x \ln x$, donc $f'(x) = \ln(x+a) + \frac{x}{x+a} - \ln x - 1$, et $f''(x) = \frac{1}{x+a} + \frac{x+a-x}{(x+a)^2} - \frac{1}{x} = \frac{x(x+a) + ax - (x+a)^2}{x(x+a)^2} = \frac{-a^2}{x(x+a)^2} < 0$. La fonction f' est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, $f'(x) = \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right) + \frac{x}{x+a} - 1$ a pour limite 0 en $+\infty$ (en effet, ce qui se trouve dans le ln a pour limite 1 donc le terme avec le ln tend vers 0 ; et en conservant les termes de plus haut degré, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+a} = 1$). Il est inutile ici (même si ce n'est pas spécialement difficile)

de calculer la limite de f' en 0, on peut déjà conclure que f' est toujours positive, ce dont on déduit que f est bien croissante.

Il faut maintenant faire le lien avec la suite (u_n) en remarquant que $\ln(u_n) = n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) = f(n)$. La fonction f étant croissante, on aura certainement, pour tout entier n, $f(n) \leqslant f(n+1)$, c'est-à-dire $\ln(u_n) \leqslant \ln(u_{n+1})$. Un petit passage à l'exponentielle donne alors $u_n \leqslant u_{n+1}$, ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.

2. Le plus simple est de démontrer séparément chacune des deux inégalités en faisant tout passer d'un seul côté et en faisant des études de fonctions. Posons ainsi $g(t) = t - \ln(1+t)$. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}_+$ (elle est même définie entre -1 et 0, mais pour ce qu'on nous demande, pas la peine de s'y intéresser), de dérivée $g'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \geqslant 0$. La fonction g est donc croissante, et comme $g(0) = 0$, elle est toujours positive, ce qui prouve que $t - \ln(1+t)$ sur $\mathbb{R}_+$, soit $\ln(1+t) \leqslant t$.

   De même, on pose $h(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}$, fonction dont la dérivée vaut $\frac{1}{1+t} - \frac{1+t-t}{(1+t)^2} = \frac{1+t-1}{(1+t)^2} = \frac{t}{(1+t)^2} \geqslant 0$. Cette fonction est donc également croissante, et vérifie aussi $h(0) = 0$, d'où sa positivité sur $\mathbb{R}_+$ et l'encadrement souhaité.

3. On a vu que $\ln u_n = n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$, donc en posant $t = \frac{a}{n}$ et en appliquant l'encadrement de la question précédente, $\frac{\frac{a}{n}}{1+\frac{a}{n}} \leqslant n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right) \leqslant \frac{a}{n}$, soit $\frac{\frac{a}{n}}{\frac{n+a}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\ln u_n \leqslant \frac{a}{n}$, ou encore $\frac{a}{a+n} \leqslant \frac{1}{n}\ln u_n \leqslant \frac{a}{n}$. Il ne reste plus qu'à tout multiplier par n pour obtenir l'encadrement demandé.

4. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{na}{n+a} = a$ (on garde les termes de plus haut degré, a étant toujours une constante), le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $\ln(u_n)$ converge vers a. La suite (u_n) a donc pour limite e^a.

5. Pour $a = 1$, on obtient le résultat classique suivant : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Exercice 10 (*)

Il y a deux points sur les trois qui sont très faciles à prouver :

- $v_n - u_n = \frac{1}{n \times n!}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.
- $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

Ne reste plus qu'à prouver que (v_n) est décroissante : $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n\times n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)!} - \frac{1}{n\times n!} = \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n\times(n+1)\times(n+1)!} = \frac{n^2+2n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$. La suite (v_n) est donc bien décroissante, et les deux suites étant adjacentes, elles convergent donc vers une limite commune.

Notons donc l la limite commune des deux suites, et supposons que $l = \frac{a}{b}$, avec a et b deux entiers naturels. Comme la suite (u_n) est strictement croissante, et la suite (v_n) strictement décroissante, on peut écrire, pour tout entier n, $u_n < l < v_n$, soit $\sum\limits_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k!} < \frac{a}{b} < \sum\limits_{k=0}^{k=n}\frac{1}{k!} + \frac{1}{n\times n!}$. C'est en particulier vrai lorsque $n = b$: $\sum\limits_{k=0}^{k=b}\frac{1}{k!} < \frac{a}{b} < \sum\limits_{k=0}^{k=b}\frac{1}{k!} + \frac{1}{b\times b!}$. Multiplions cet encadrement par $b \times b!$:

$b\sum_{k=0}^{k=b}\frac{b!}{k!} < a\times b! < b\sum_{k=0}^{k=b}\frac{b!}{k!}+1$. À gauche, chaque quotient $\frac{b!}{k!}$ est un entier lorsque $k \leqslant b$ (en effet, $b!$ est un multiple de $k!$ pour tous les entiers k compris entre 0 et b), donc le membre de gauche est une somme d'entiers et appartient à $\mathbb{N}$. Notons ce nombre p. Le membre de droite est le même que celui de gauche, avec un simple $+1$, donc est égal à $p+1$. On a donc $p < a\times b! < p+1$. Autrement dit, le nombre $a\times b!$, qui est lui aussi un nombre entier, est strictement compris entre les deux entiers consécutifs p et $p+1$. Ce n'est pas possible ! On a prouvé par l'absurde que l ne pouvait pas être un nombre rationnel (pour les curieux, la valeur de l est en fait le nombre e que nous connaissons bien depuis l'étude de la fonction exponentielle).

Exercice 11 (**)

1. Il suffit pour cela de prouver par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$ et $v_n>0$. C'est vrai au rang 0 par hypothèse, et si u_n et v_n sont tous deux strictement positifs, ce sera aussi le cas de u_n+v_n et de u_nv_n, donc de u_{n+1} et v_{n+1}. Ainsi, les deux suites sont bien définies.
2. Supposons $n\geqslant 1$ (pour $n=0$ l'inégalité est vraie par hypothèse). On a $v_n-u_n=\frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2}-\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}=\frac{u_{n-1}+v_{n-1}-2\sqrt{u_{n-1}}\sqrt{v_{n-1}}}{2}=\frac{(\sqrt{u_{n-1}}-\sqrt{v_{n-1}})^2}{2}>0$, donc $u_n\leqslant v_n$.
3. C'est désormais facile en utilisant le résultat de la question précédente : $u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_nv_n}-u_n=\sqrt{u_n}(\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n})>0$ puisque $v_n>u_n$, donc (u_n) est strictement croissante. De même, $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+v_n}{2}-v_n=\frac{u_n-v_n}{2}<0$, donc (v_n) est décroissante.
4. On ne peut pas affirmer que les suites sont adjacentes car on ne sait pas si (u_n-v_n) tend vers 0. Par contre, (u_n) étant croissante et majorée par exemple par v_0 (car $u_n\leqslant v_n\leqslant v_0$ puisque la suite (v_n) est decroissante), le théorème de convergence monotone permet d'affirmer qu'elle est convergente vers une certaine limite l. De même, (v_n) est décroissante et minorée (encore plus simplement, par 0), donc converge vers une limite l'. La suite (v_{n+1}) converge aussi vers l', mais comme $v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$, on a donc, par passage à la limite, $l'=\frac{l+l'}{2}$, d'où $\frac{l'}{2}=\frac{l}{2}$, soit $l=l'$. Finalement, les deux suites ont bien la même limite (appelée moyenne arithmético-géométrique des deux réels a et b).

Exercice 12 (**)

1. C'est un simple calcul : $(n+p+2)u_{n+2}=\frac{(n+p+2)(n+2)!p!}{(n+p+2)!}=\frac{(n+2)!p!}{(n+p+1)!}$, et $(n+2)u_{n+1}=\frac{(n+2)(n+1)!p!}{(n+p+1)!}=\frac{(n+2)!p!}{(n+p+1)!}$. Les deux quantités sont bien égales.
2. Faisons donc une récurrence. Pour $n=0$, $S_0=0$ (il n'y a rien dans la somme !) et comme $u_1=\frac{1}{p+1}$, $\frac{1}{p-1}(1-(p+1)u_1)=\frac{1}{p-1}(1-1)=0$. Supposons donc l'égalité vérifiée au rang n, alors $S_{n+1}=S_n+u_{n+1}=\frac{1}{p-1}(1-(n+p+1)u_{n+1})+u_{n+1}=\frac{1}{p-1}(1-(n+p+1)u_{n+1}+(p-1)u_{n+1})=\frac{1}{p-1}(1-(n+2)u_{n+1})=\frac{1}{p-1}(1-(n+p+2)u_{n+2})$ en utilisant le résultat de la question précédente. C'est exactement ce qu'on doit démontrer pour prouver la propriété au rang $n+1$, par principe de récurrence, la propriété est donc toujours vraie.
3. Il suffit d'écrire que $v_n=\frac{(n+p)n!p!}{(n+p)!}=\frac{p!}{(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)}$. Ce quotient a certainement pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$ (rappelons que p est fixé). On peut même

être beaucoup plus précis : puisqu'on a un polynôme de degré $p-1 \geqslant 1$ au dénominateur, $v_n \sim \frac{p!}{n^{p-1}}$.

4. On a prouvé plus haut que $S_n = \frac{1-v_{n+1}}{p-1}$. Si (v_n) tend vers 0, on en déduit immédiatement que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{p-1}$.

Exercice 13 (***)

1. Supposons donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, et choisissons un $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe un entier n_0 à partir duquel on aura $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Découpons alors v_n en deux parties : ce qui se passe avant n_0 et après n_0 : si $n > n_0$, $v_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} u_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n_0} u_k + \frac{1}{n}\sum\limits_{k=n_0+1}^{k=n} u_k$. La première somme est une constante (on peut modifier n, mais n_0, lui, est fixé), donc, quand on la divise par n, ça va finir par se rapprocher de 0. Autrement dit, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_1$, $\frac{1}{n}\left|\sum\limits_{k=1}^{k=n_0} u_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Quand à la deuxième somme, elle est constituée de $n-n_0$ termes qui, d'après ce qu'on a dit plus haut, sont tous inférieurs (en valeur absolue) à $\frac{\varepsilon}{2}$, donc par inégalité triangulaire sa valeur absolue est inférieure à $(n-n_0)\frac{\varepsilon}{2}$, d'où $\frac{1}{n}\left|\sum\limits_{k=n_0+1}^{k=n} u_k\right| \leqslant \frac{n-n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (puisque $\frac{n-n_0}{n} \leqslant 1$). Conclusion, lorsque $n \geqslant \max(n_0; n_1)$, on a $|v_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ceci suffit à prouver que la suite (v_n) tend vers 0, et a donc bien la même limite que (u_n).

   Passons désormais au cas général (qui va être facile en fait), c'est à dire lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$. Posons $w_n = u_n - l$, cette suite auxilaire a pour limite 0, donc on peut lui appliquer ce qu'on vient de démontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} w_k = 0$. Or, $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} w_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n}(u_k - l) = \frac{1}{n}\left((\sum\limits_{k=1}^{k=n} u_k) - nl\right) = \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} u_k\right) - l$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} u_k = l$, ce qu'on voulait prouver.

2. Posons donc $v_n = u_{n+1} - u_n$, la suite (v_n) a pour limite α par hypothèse, on peut donc lui appliquer le théorème de Cesaro pour obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k = \alpha$ (on a décalé d'une unité l'indice de la suite pour plus de commodité). Or, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k = u_n - u_0$ (il s'agit d'une somme télescopique). Autrement dit, si $\alpha \neq 0$, $u_n - u_0 \sim \alpha n$, et plus simplement $u_n \sim \alpha n$. Dans le cas où $\alpha = 0$, on ne peut rien dire d'intelligent. Il existe des quantités de suites très différentes vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$. Toutes les suites convergentes ont notamment cette propriété (mais ce ne sont pas les seules !) et ne sont pas toutes équivalentes à la même chose.

3. Posons pour plus de simplicité $w_n = \frac{2}{n(n+1)}\sum\limits_{k=0}^{k=n} ku_k$, et supposons dans un premier temps que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Il existe donc un rang n_0 à partir duquel $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. On découpe la somme en deux comme précédemment : $w_n = \frac{2}{n(n+1)}\sum\limits_{k=0}^{n_0} ku_k + \frac{2}{n(n+1)}\sum\limits_{k=n_0+1}^{n} ku_k$. La première moitié

a certainement une limite nulle, donc deviendra inférieur en valeur absolue à $\frac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang n_1. Quant à la deuxième moitié, on la majore en valeur absolue (comme dans la question 1) par $\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=n_0}^{n}\frac{k\varepsilon}{2} \leqslant \frac{2}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)}{2}\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}$. On a donc globalement, lorsque $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, $|w_n| \leqslant \varepsilon$, et $\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$. Comme $v_n = \frac{n(n+1)}{2n^2}w_n$, avec $\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Supposons désormais $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \neq 0$. Posons comme précédemment $z_n = u_n - l$, alors $w_n = \frac{2}{n(n+1)}\sum kz_k$ tend vers 0. Or, $w_n = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n}(ku_k - kl) = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n}ku_k - l$. Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n}ku_k = l$, soit en multipliant par $\frac{n(n+1)}{2n^2}$ qui tend toujours vers $\frac{1}{2}$, la conclusion $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}ku_k = \frac{l}{2}$.

4. L'hypothèse effectuée revient à dire que $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{n} = \beta$. Appliquons donc le résultat précédent à la suite définie par $a_n = \frac{u_{n+1}-u_n}{n}$, alors $\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}ka_k = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}u_{k+1}-u_k = \frac{u_{n+1}-u_0}{n^2}$ par télescopage. On a donc la limite suivante : $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}-u_0}{n^2} = \frac{\beta}{2}$. Comme u_0 est une constante, on en déduit que $u_{n+1} \sim \frac{\beta n^2}{2}$, soit $u_n \sim \frac{\beta n^2}{2}$.

Exercice 14 (*)

1. $u_n \sim \frac{n^{\frac{5}{2}}}{2n} \sim \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}$ (au numérateur, $n^{\frac{5}{2}}$ l'emporte certainement face à n^2, et au dénominateur, par croissance comparée, $\ln(2n) = o(2n)$).
2. $u_n \sim ne^{-n-1}$, qu'on ne peut pas simplifier davantage (si on tient à l'écrire autrement, $u_n \sim \frac{n}{e\times e^n}$.
3. $u_n = \frac{\ln(n^2)+\ln(1+\frac{1}{n^2})}{n^2+1} \sim \frac{2\ln(n)}{n^2}$.
4. $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2+2}\right) \sim -\frac{1}{n^2+2} \sim -\frac{1}{n^2}$ puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2+2} = 0$.
5. $u_n = \frac{n^2+n+1-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \frac{2n}{n+o(n)+n+o(n)} \sim \frac{2n}{2n} \sim 1$.
6. Celle-ci est un peu plus tordue : d'un côté $u_n \geqslant n!$ (c'est assez évident), de l'autre $u_n = n! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2}k! \leqslant n! + (n-1)! + (n-1)(n-2)!$ en majorant brutalement chaque terme de la dernière somme par la plus gros, à savoir $(n-2)!$. En divisant tout par $n!$, on obtient l'encadrement $1 \leqslant \frac{u_n}{n!} \leqslant 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$. Les deux termes extrêmes ont manifestement pour limite commune 1, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n!} = 1$, c'est-à-dire $u_n \sim n!$.
7. $u_n = \frac{e^{\sqrt{n+1}\ln n}}{e^{\sqrt{n}\ln(n+1)}} = e^{\sqrt{n+1}\ln(n)-\sqrt{n}\ln(n+1)}$. Tentons de trouver un équivalent de ce qui se trouve dans l'exponentielle : $\sqrt{n+1}\ln(n) - \sqrt{n}\ln(n) - \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\ln(n) -$

$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{2\sqrt{n}+o(\sqrt{n})}\ln(n)-\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Par croissance comparée, le premier terme tend vers 0, donc le tout a également une limite nulle. Par composition, $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$, ou si on préfère $u_n\sim 1$.

Exercice 15 (**)

1. En effet, $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{2(n+1-n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Or, comme $\sqrt{n}+\sqrt{n}\leqslant\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\leqslant\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}$, on a $\frac{1}{2\sqrt{n+1}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}$, d'où l'encadrement souhaité en multipliant tout par 2. On peut également prouver l'encadrement en utilisant des intégrales.

2. En utilisant l'inégalité de droite de la question précédente, on obtient $2\sum_{k=1}^{k=n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\leqslant S_n$.
   Or, la somme de gauche est une somme télescopique égale à $2(\sqrt{n+1}-1)=2\sqrt{n+1}-2$. Cette expression a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, donc par théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$ (inutile d'utiliser l'inégalité de gauche de la question 1 ici, celle de droite suffit...).
3. Commençons par déterminer la monotonie de la suite (u_n) : $u_{n+1}-u_n=S_{n+1}-S_n-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, expression négative d'après la question 1. La suite (u_n) est donc décroissante. On a vu par ailleurs que $S_n\geqslant 2\sqrt{n+1}-2$, donc a fortiori $S_n\geqslant 2\sqrt{n}-2$, donc $u_n\geqslant -2$. La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente.
4. Puisque $\lim_{n\to+\infty}S_n-2\sqrt{n}=l\in\mathbb{R}$, on en déduit $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n-2\sqrt{n}}{2\sqrt{n}}=0$, soit $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{2\sqrt{n}}=1$. Autrement dit, on a prouvé que $S_n\sim 2\sqrt{n}$.

Exercice 16 (**)

Puisque la suite est décroissante, on peut certainement écrire $2u_{n+1}\leqslant u_{n+1}+u_n\leqslant 2u_n$, ou encore $\frac{u_{n+1}+u_n}{2}\leqslant u_n\leqslant\frac{u_n+u_{n-1}}{2}$ quitte à décaler les indices pour obtenir l'inégalité de droite. En multipliant tout par n, on a donc $\frac{n(u_{n+1}+u_n)}{2}\leqslant nu_n\leqslant\frac{n(u_n+u_{n-1})}{2}$. Par hypothèse, le membre de gauche a pour limite $\frac{1}{2}$ puisque $u_{n+1}+u_n\sim\frac{1}{n}$. De même, on aura $u_{n-1}+u_n\sim\frac{1}{n-1}\sim\frac{1}{n}$, donc le membre de droite également a pour limite $\frac{1}{2}$. En appliquant le théorème des gendarmes, on conclut que $\lim_{n\to+\infty}nu_n=\frac{1}{2}$, soit $u_n\sim\frac{1}{2n}$. En particulier, $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$. Si on ne suppose pas la suite (u_n) décroissante, ça ne marche absolument plus du tout ! Si on pose $u_1=5$ puis $u_{n+1}=\frac{1}{n}-u_n$ pour tout entier $n\geqslant 1$, on aura toujours $u_{n+1}+u_n=\frac{1}{n}$ (donc a fortiori l'équivalence demandée par l'énoncé), et la suite ne tend même pas vers 0. En effet, on a alors $u_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k+1}}{k}+5(-1)^{n+1}$. On peut prouver que la somme se rapproche alternativement de $\ln(2)$ et $-\ln(2)$ (cf le DS6 pour une explication de cette limite) selon la parité de n, donc les sous-suites d'indices pairs et impairs de la suite ont des limites respectives $\ln(2)-5$ et $-\ln(2)+5$, et la suite ne converge pas.

Exercice 17 (**)

Les deux conditions peuvent se traduire de la façon suivante : $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q$, et $2b - a = 3c - 2b = q$. La première relation revient à dire que $b = aq$ et $c = bq = aq^2$, d'où en remplaçant dans la deuxième donne $2aq - a = 3aq^2 - 2aq (= q)$, d'où $3aq^2 - 4aq + a = 0$, soit en factorisant par a qui est supposé non nul $3q^2 - 4q + 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet deux racines réelles $q_1 = \frac{4+2}{6} = 1$, et $q_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$. Si $q = 1$, la condition $2aq - a = q$ donne $a = 1$, puis $b = aq = 1$ et $c = bq = 1$; et si $q = \frac{1}{2}$, on obtient $\frac{2}{3}a - a = \frac{1}{2}$, soit $a = -\frac{3}{2}$, puis $b = \frac{1}{3}a = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{3}b = -\frac{1}{6}$. Les deux seules possibilités sont donc d'avoir $a = b = c = q = 1$ (auquel cas les trois termes consécutifs de la suite géométrique sont 1, 1 et 1, et les trois termes consécutifs de la suite arithmétique sont 1, 2 et 3) ; ou $q = \frac{1}{3}$, donc $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{6}$ (auquel cas les trois termes consécutifs de la suite géométrique sont $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{6}$, et les trois termes consécutifs de la suite arithmétique sont $-\frac{3}{2}$, -1 et $-\frac{1}{2}$).

Exercice 18 (*)

1. La suite (u_n) est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = 4x - 6$, ce qui donne $x = 2$. On pose donc $v_n = u_n - 2$, et on vérifie que la suite auxiliaire est géométrique : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 4u_n - 6 - 2 = 4u_n - 8 = 4(u_n - 2)$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 4, et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -1$. On a donc $v_n = -4^n$, puis $u_n = v_n + 2 = 2 - 4^n$.
2. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 3x + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $r = \frac{3+1}{2} = 2$ et $s = \frac{3-1}{2} = 1$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = \alpha 2^n + \beta$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $u_0 = \alpha + \beta = 0$ et $u_1 = 2\alpha + \beta = 1$. En soustrayant les deux équations on obtient $\alpha = 1$, puis $\beta = -\alpha = -1$, donc $u_n = 2^n - 1$.
3. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 6x + 9 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 36 - 36 = 0$, et admet une racine double $r = \frac{6}{2} = 3$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = (\alpha + \beta n)3^n$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $u_0 = \alpha \times 3^0 = 0$ et $u_1 = (\alpha + \beta) \times 3^1 = 1$. La première équation donne $\alpha = 0$, puis la deuxième donne $\beta = \frac{1}{3}$, d'où $u_n = \frac{1}{3}n3^n = n3^{n-1}$ (formule valable seulement si $n \geqslant 1$).
4. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$. L'équation admet deux racines complexes conjuguées $z_1 = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}}{2} = \frac{1 + i\sqrt{7}}{4}$, et $z_2 = \frac{1 - i\sqrt{7}}{4}$. On calcule $|z_1| = \frac{\sqrt{1+7}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On peut donc écrire $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + i\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$. En notant $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ (ce n'est pas une valeur remarquable), on peut affirmer que $u_n = \frac{1}{\sqrt{2}^n}(\alpha\cos(n\varphi) + \beta\sin(n\varphi))$. Les conditions initiales donnent $u_0 = \alpha = 1$ et $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\cos(\varphi) + \beta\sin(\varphi)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{2}} + \beta\sqrt{\frac{7}{8}}\right) = \frac{\alpha + \beta\sqrt{7}}{4} = 1$. Cela donne $\beta = \frac{3}{\sqrt{7}}$, donc $u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(n\varphi) + \frac{3}{\sqrt{7}}\sin(n\varphi)\right)$. On ne peut pas dire que cette formule saute aux yeux si on calcule les premiers termes de la suite.

5. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $3x^2 - 4x + 1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 16 - 12 = 4$, et qui admet donc deux racines $r = \frac{4+2}{6} = 1$, et $s = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$. On en déduit la forme générale de la suite : $u_n = \alpha + \frac{\beta}{3^n}$. En utilisant les valeurs des deux premiers termes, on a $u_0 = \alpha + \beta = 2$ et $u_1 = \alpha + \frac{1}{3}\beta = \frac{10}{3}$. En soustrayant les deux équations, on obtient $\frac{2}{3}\beta = 2 - \frac{10}{3} = -\frac{4}{3}$, soit $\beta = -2$, puis $\alpha = 4$. On a finalement $u_n = 4 - \frac{2}{3^n}$.

Exercice 19 (**)

Notons donc $v_n = u_n + an^2 + bn + c$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} + a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 2u_n + 2n^2 - n + an^2 + 2an + a + bn + b + c = 2u_n + (a+2)n^2 + (2a+b-1)n + a + b + c$. Pour que (v_n) soit géométrique, on doit avoir $v_{n+1} = qv_n = qu_n + aqn^2 + bqn + cq$. Il est nécessaire d'avoir $q = 2$, et en identifiant ensuite les coefficients des deux formules obtenues, on a $a + 2 = 2a$, $2a + b - 1 = 2b$ et $a + b + c = 2c$, ce qui donne successivement $a = 2$, puis $b = 2a - 1 = 3$, et enfin $c = a + b = 5$. Avec ces valeurs, la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 + a \times 0^2 + b \times 0 + c = 2 + 5 = 7$. Conclusion de ces calculs : $v_n = 7 \times 2^n$, puis $u_n = v_n - an^2 - bn - c = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$.

Exercice 20 (**)

1. Calculons donc la dérivée $f_n'(x) = 5x^4 + n$. Cette dérivée est toujours strictement positive (sauf en 0 pour $n = 0$), la fonction est donc strictement croissante, quel que soit l'entier n.
2. Comme de plus $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, chaque fonction f_n est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Chaque réel a donc un unique antécédent par f_n et en particulier l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution.
3. Constatons que $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^5} + 1 - 1 = \frac{1}{n^5} > 0$. Comme la fonction f_n est strictement croissante, et $f_n(u_n) = 0$, on en déduit que $u_n < \frac{1}{n}$. Notons par ailleurs que $f_n(0) = -1$, donc par un raisonnement similaire on a toujours $0 < u_n$. Le théorème des gendarmes permet donc d'affirmer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

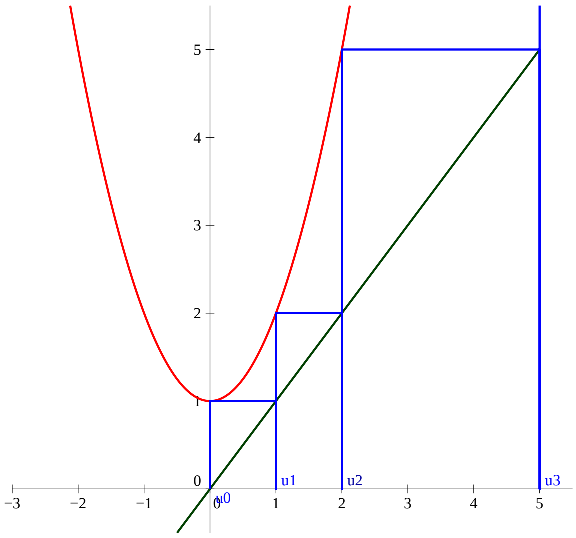
   Démonstration subsidiaire : monotonie de la suite (u_n). Pour déterminer la monotonie de la suite (u_n), il faut réussir à comparer u_n et u_{n+1}. Pour cela, dans le même esprit que les calculs précédents, on va chercher à calculer $f_n(u_n)$ et $f_n(u_{n+1})$. Le morceau facile, c'est $f_n(u_n) = 0$ (par définition). Plus compliqué, $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^5 + nu_{n+1} - 1$. Or, on sait que, par définition, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1}^5 + (n+1)u_{n+1} - 1 = 0$, ou encore en développant $u_{n+1}^5 + nu_n + u_{n+1} - 1 = 0$, soit $u_{n+1}^5 + nu_{n+1} - 1 = -u_{n+1}$. Autrement dit, en reprenant le calcul précédent, $f_n(u_{n+1}) = -u_{n+1} < 0$ (puisqu'on a prouvé plus haut que tous les termes de la suite étaient positifs). En particulier, $f_n(u_{n+1}) < f_n(u_n)$. La fonction f_n étant strictement croissante, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$, donc la suite (u_n) est décroissante.
4. On sait que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$, donc $u_n = \frac{1}{n} - \frac{u_n^5}{n}$. Comme (u_n) tend vers 0, $\frac{u_n^5}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $u_n \sim \frac{1}{n}$.
5. Comme on vient de le voir, $\frac{1}{n} - u_n = \frac{u_n^5}{n} \sim \frac{\frac{1}{n^5}}{n} \sim \frac{1}{n^6}$.

Exercice 21 (***)

1. Sur $\mathbb{R}^{+*}$, les fonctions f_n sont strictement croissantes comme sommes de fonctions croissantes. De plus, $f_n(0) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. La fonction f_n effectue donc une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $[1; +\infty[$, et en particulier 2 admet un unique antécédent par f_n, que l'on peut donc noter u_n.
2. On a déjà vu que $f_n(0) = 1$, donc $u_n > 0$, et $f_n(1) = n + 1 > f_n(u_n)$ si $n \geqslant 2$. Par croissance de la fonction f_n, on a donc bien $u_n < 1$.
3. On peut utiliser la méthode classique : $f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^{n+1}$, donc $f_{n+1}(u_n) = f_n(u_n) + u_n^{n+1} = 2 + u_n^{n+1}$. Comme $u_n > 0$, $u_n^{n+1} > 0$, et $f_{n+1}(u_n) > 2 = f_{n+1}(u_{n+1})$. Par croissance de la fonction f_{n+1}, on déduit que $u_n > u_{n+1}$, et la suite est donc décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge.
4. Nos connaissances sur les suites géométriques nous permettent d'affirmer que, $\forall x \neq 1$, $f_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. En particulier, $\dfrac{1 - u_n^{n+1}}{1 - u_n} = 2$. Or, comme la suite (u_n) est décroissante, on aura $\forall n \geqslant 2$, $u_n \leqslant u_2 < 1$, donc $0 < u_n^{n+1} < u_2^{n+1}$, avec $\lim_{n\to+\infty} u_n^{n+1} = 0$. Une petite application du théorème des gendarmes permet donc d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} u_n^{n+1} = 0$. En passant à la limite la relation obtenue ci-dessus, et en notant l la limite inconnue de la suite (u_n), on trouve alors $\dfrac{1}{1 - l} = 2$, soit $1 - l = \dfrac{1}{2}$ et $l = \dfrac{1}{2}$. On a prouvé que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.
5. Je vois venir d'ici ceux qui se sont lancés dans une récurrence inutile pour cette question. Reprenons donc les calculs des questions précédentes : $\dfrac{1 - u_n^{n+1}}{1 - u_n} = 2$, donc $1 - u_n^{n+1} = 2 - 2u_n$, ou encore $u_n^{n+1} = 2u_n - 1$. Comme $v_n + \dfrac{1}{2} = u_n$, celà revient à dire que $\left(\dfrac{1}{2} + v_n\right)^{n+1} = 2v_n$.
6. Dans l'égalité précédente, on peut écrire le membre de gauche sous la forme $\dfrac{(1 + 2v_n)^{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{e^{(n+1)\ln(1+2v_n)}}{2^{n+1}}$. Ce qui se trouve dans l'exponentielle est équivalent à $2nv_n$ puisque (v_n) a une limite nulle (on peut donc utiliser l'équivalent classique pour $\ln(1 + x)$). Or, comme $v_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^{n+1}}(1 + 2v_n)^{n+1}$, avec $1 + 2v_n$ qui tend vers 0 et se trouve donc certainement inférieur à une constante strictement inférieure à $\dfrac{3}{2}$ à partir d'un certain rang, on peut certainement dire que $v_n = o\left(\dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$. En particulier, v_n est très très négligeable devant $\dfrac{1}{n}$, et $\lim_{n\to+\infty} 2nv_n = 0$. En reprenant notre calcul iinitial, le membre de gauche est donc équivalent à $\dfrac{1}{2^{n+1}}$. Autrement dit, $\dfrac{1}{2^{n+1}} \sim 2v_n$, soit $v_n \sim \dfrac{1}{2^{n+2}}$.

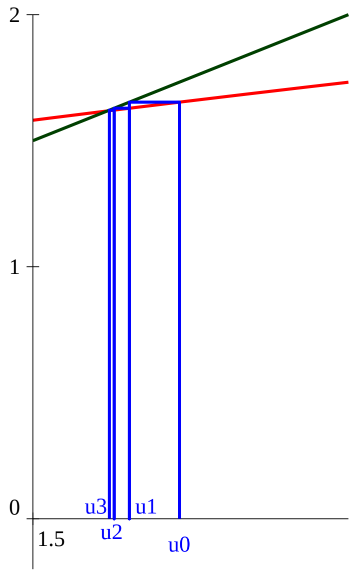
Exercice 22 (**)

1. Posons $f(x) = x^2 + 1$, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. En fait, seul l'intervalle $\mathbb{R}^+$ est réellement pertinent puisqu'on aura $u_n \geqslant 1$ dès que $n \geqslant 1$ (pas besoin de récurrence pour le prouver, il suffit de constater que $u_n^2 + 1 \geqslant 1$ quelle que soit la valeur de u_n. Comme $f(x) - x = x^2 - x + 1$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 < 0$, la fonction f n'a pas de point fixe et $f(x) - x$ est toujours positif. La suitez (u_n) est donc strictement croissante, et ne peut majorer en l'absence de point fixe. Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Ci-dessous, les premiers termes de la suite lorsque $u_0 = 0$:

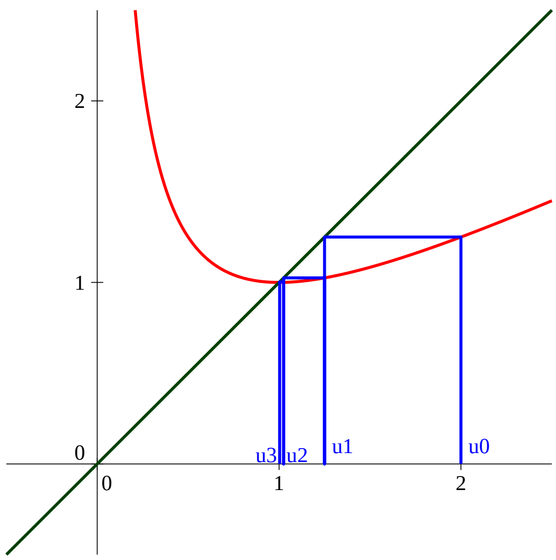


2. Posons cette fois-ci $f(x) = \sqrt{1+x}$. La fonction f est définie et strictement croissante sur $[-1;+\infty[$ (inutile de dériver, on a ici une composée très simple de fonctions croissantes). Pas de problème de définition pour la suite (u_n), puisqu'on a toujours $f(x) \geqslant 0$, donc $u_n \in \mathcal{D}_f$. Par ailleurs $f(x) - x = \sqrt{1+x} - x = \dfrac{1+x-x^2}{\sqrt{1+x}+x}$ par produit par la quantité conjuguée. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5$, il s'annule pour $x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, et pour $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Cette deuxième racine ne nous est d'aucun intérêt car elle est négative. En effet, si $x \leqslant 0$, $\sqrt{1-x} - x \geqslant 0$ sans avoir à passer par la quantité conjuguée. Si $x \geqslant 0$, le dénominateur $\sqrt{1+x}+x$ est positif, donc $f(x) - x \geqslant 0$ sur $\left[0; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ et $f(x) - x \leqslant 0$ sur $\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$.

   Si $u_0 = \sqrt{3}$, qui est supérieur au point fixe (en effet, $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} < 3$ car $\sqrt{5} < 3$), on va pouvoir prouver par récurrence que tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle stable $\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$. En effet, c'est vrai pour u_0, et en supposant $u_n \geqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, par croissance de la fonction f, $u_{n+1} \geqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, ce qui prouve la propriété au rang suivant. Comme $f(x) - x \leqslant 0$ sur cet intervalle, la suite sera décroissante. Puisqu'elle est minorée par $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, elle converge, et comme il n'y a qu'un point fixe, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Et une représentation graphique où on ne voit rien car le premier terme est en fait déjà très proche de la limite :

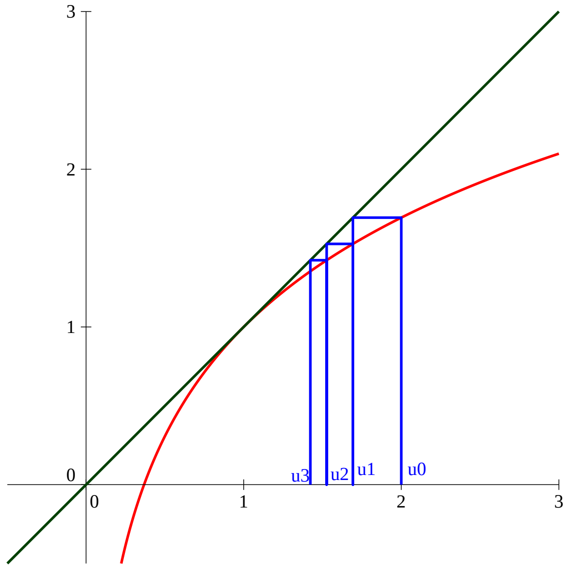


3. Posons $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$, on peut se contenter d'étudier sur $\mathbb{R}^{+*}$ (par une récurrence triviale, tous les termes de la suite seront positifs), où f est dérivable, de dérivée $\dfrac{4x^2 - 2(x^2+1)}{4x^2} = \dfrac{2(x^2-1)}{4x^2}$. Elle est donc décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$. Par ailleurs, $f(x) - x = \dfrac{x^2+1-2x^2}{2x} = \dfrac{1-x^2}{2x}$. Le point fixe correspond avec le minimum de fonction, et $f(x) - x \geqslant 0$ sur $]0;1]$ et $f(x) - x \leqslant 0$ sur $[1;+\infty[$. On va montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$: c'est vrai par hypothèse pour u_0, et si $u_n \geqslant 1$, alors par croissance de f sur $[1;+\infty[$, $f(u_n) \geqslant f(1)$, soit $u_{n+1} \geqslant 1$. Comme $f(x) - x \leqslant 0$ sur $[1;+\infty[$, la suite est décroissante. Minorée par 1, elle converge, et c'est forcément vers l'unique point fixe de la fonction. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

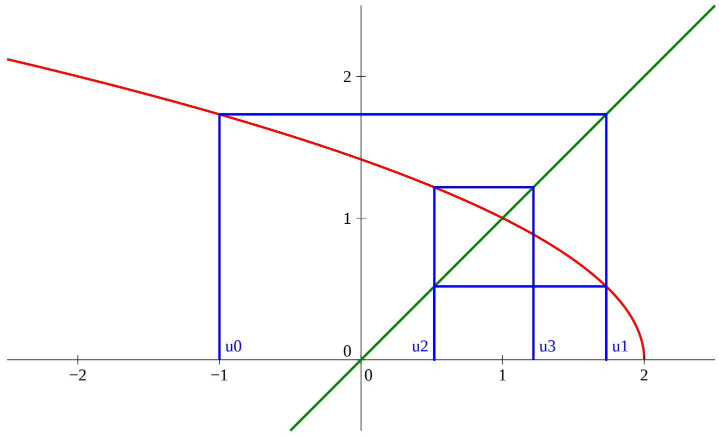


4. Posons $f(x) = 1 + \ln(x)$, la fonction est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus, $f(x) - x = 1 + \ln(x) - x$, dont le signe n'est pas forcément évident. on peut toutefois se souvenir que la droite d'équation $y = x - 1$ est la tangente à la courbe de la fonction ln en $x = 1$, et que la fonction ln est concave. On a donc toujours $\ln(x) \leqslant x - 1$, soit $f(x) - x \leqslant 0$. Il y a un unique point fixe : $x = 1$. La suite sera nécessairement décroissante et minorée par 0,

mais avant de conclure à la convergence, il faut tout de même vérifier que la suite est toujours bien définie, c'est-à-dire que $u_n \geqslant 1$ pour tout entier n. Une petite récurrence suffit : c'est vrai par hypothèse pour u_0, et si on suppose $u_n \geqslant 1$, par croissance de la fonction f, $u_{n+1} \geqslant 1$. La suite est donc convergente, et comme il y a un unique point fixe, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.



5. Posons enfin $f(x) = \sqrt{2-u_n}$, on peut se contenter de définir f sur $[-2,2]$, où elle est décroissante (encore une fois, aucun besoin de dériver). L'intervalle $[-2;2]$ est certainement stable par f puisque $f(-2) = \sqrt{4} = 2$ et $f(2) = 0$. On prouve alors par une récurrence évidente que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-2;2]$: c'est vrai pour u_0, et en le supposant vrai pour u_n, les remarques qu'on vient de faire assurent que $u_{n+1} \in [-2;2]$. Par ailleurs, $f(x)-x = \sqrt{2-x}-x$. Cette expression est toujours positive si $x \leqslant 0$. Si $x > 0$, $f(x)-x = \dfrac{2-x-x^2}{\sqrt{2-x}+x}$, qui est du signe du numérateur. Ce numérateur a pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$, il s'annule pour $x = \dfrac{1+3}{-2} = -2$ qui ne nous intéresse pas le moins du monde pusique cette valeur est négative, et pour $x = \dfrac{1-3}{-2} = 1$. On en déduit que 1 est point fixe de f, et que $f(x)-x \geqslant 0$ sur $[-2;1]$, et $f(x)-x \leqslant 0$ sur $[1;2]$. Comme f est décroissante, la suite ne sera pas monotone, mais on peut s'en sortir sans s'embêter à étudier séparément les sous-suites constituées des termes d'indices pairs et impairs en utilisant l'indication de l'énoncé. En effet, $u_{n+1}-1 = \sqrt{2-u_n}-1 = \dfrac{1-u_n}{\sqrt{2-u_n}+1}$, donc $|u_{n+1}-1| = \dfrac{[u_n-1|}{\sqrt{2-u_n}+1} \leqslant |u_n-1|$. La suite $(|u_n-1|)$ est décroissante, et bien sûr minorée par 0, donc elle converge. Sa limite ne peut être que 0, car si elle convergeait vers $l \neq 0$, en reprenant l'égalité précédente, on ne pourrait pas avoir $\lim_{n\to+\infty} |u_{n+1}-1| = l$. Ceci prouve que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.



Exercice 23 (***)

1. Manifestement, $u_n \geqslant \sqrt{n}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
2. Il suffit d'écrire que $u_{n+1} = \sqrt{n + 1 + \sqrt{n + \dots + \sqrt{1}}} = \sqrt{n + 1 + u_n}$.
3. Allons-y pour une récurrence : $u_1 = 1 \leqslant 1$ est vrai. Supposons donc $u_n \leqslant \sqrt{n}$, et déduisons-en en utilisant l'égalité précédente que $u_{n+1} \leqslant \sqrt{n + 1 + n} \leqslant \sqrt{2n + 1}$. Reste à vérifier que $\sqrt{2n + 1} \leqslant n + 1$. C'est évident quand on élève l'inégalité au carré (on peut, tout est positif) : $2n + 1 \leqslant n^2 + 2n + 1$ puisque $n^2 \geqslant 0$. L'inégalité reste donc vraie au rang $n + 1$, ce qui achève la récurrence. Une fois qu'on sait que $u_n \leqslant n$, on peut écrire $u_{n+1} \leqslant \sqrt{2n + 1}$, donc $u_{n+1} = o(n)$, ce qui prouve la négligeabilité de u_n par rapport à n.
4. Reprenons encore notre égalité : $u_{n+1} = \sqrt{n + 1 + o(n)} \sim \sqrt{n + 1}$, donc $u_n \sim \sqrt{n}$.
5. On peut utiliser la quantité conjuguée : $u_n - \sqrt{n} = \dfrac{u_n^2 - n}{u_n + \sqrt{n}}$. Or, $u_n^2 - n = u_{n-1}$ (c'est toujours une conséquence de la relation de la question 2), et $u_{n-1} \sim \sqrt{n - 1} \sim \sqrt{n}$. Le dénominateur peut s'écrire sous la forme $\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) + \sqrt{n} \sim 2\sqrt{n}$, donc $u_n - \sqrt{n} \sim \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{2}$. Autrement dit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \sqrt{n} = \dfrac{1}{2}$, ou encore $u_n = \sqrt{n} + \dfrac{1}{2} + o(1)$.

Exercice 24 (**)

1. La suite (u_n) est une suite récureente. Posons donc $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{a}{2x^2} = \dfrac{x^2 - a}{2x^2}$. La fonction est donc strictement décroissante sur $]0; \sqrt{a}]$ et croissante sur $[\sqrt{a}; +\infty[$, et admet pour minimum $f(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{a}) = \sqrt{a}$. Le minimum correspond donc à un point fixe de la fonction f. c'est d'ailleurs le seul puisque, si $f(x) = x$, alors $x = \dfrac{a}{x}$, donc $x = \sqrt{a}$. L'expression $f(x) - x$ est positive sur $]0; \sqrt{a}]$ et négative sur $[\sqrt{a}; +\infty[$. Inutile de faire une récurrence pour prouver que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{a}$, puisque $u_n = f(u_{n-1}) \geqslant \sqrt{a}$ qui est le minimum de la fonction f. Comme $f(x) - x \leqslant 0$ sur $[\sqrt{a}; +\infty[$, la suite (u_n) est donc décroissante au moins à partir du rang 1. Étant minorée par $\sqrt{a}$ (à partir du rang 1 également), la suite converge. Comme il n'y a qu'un seul point fixe pour la fonction f, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{a}$.

2. Calculons donc $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \dfrac{\frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}u_n + \frac{a}{2u_n} - \sqrt{a}} = \dfrac{u_n^2 + a - 2\sqrt{a}u_n}{u_n^2 + a + 2\sqrt{a}u_n} = \dfrac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2} =$ v_n^2. On peut alors prouver par récurrence que $v_n = v_0^{(2^n)}$. En effet, c'est trivialement vrai pour $n = 0$, et si on le suppose au rang n, alors $v_{n+1} = v_n^2 = (v_0^{(2^n)})^2 = v_0^{(2\times 2^n)} = v_0^{(2^{n+1})}$, la propriété est donc vrai au rang $n+1$ et la récurrence fonctionne.
3. D'après la question précédente, $u_n - \sqrt{a} = v_0^{2^n}(u_0 + \sqrt{a})$ (même pas besoin de majoration, on a la valeur exacte). Pour $a = 2$, et par exemple $u_0 = 1$ (sans valeur de u_0, l'application numérique est impossible), on a $u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}}\right)^{2^n} \times (1+\sqrt{2})$ (on a changé le signe dans la puissance pour prendre la valeur absolue). Il suffit donc de prendre un n pour lequel $2^n \ln\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2+1}}\right) \geqslant -100\ln(10) - \ln(1+\sqrt{2})$, ce qui donne $2^n \geqslant 132$, soit $n \geqslant 8$ (encore un coup de ln si on veut être très précis). Il suffit donc de prendre le terme d'indice huit de la suite pour avoir une valeur approchée de la limite correcte à 10^{-100} près !

Problème (***)

Partie A : Exemples

1. (a) On a dans ce cas $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 2 \times 3 = 6(n+1)$.

   (b) Dans ce deuxième exemple $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} 2^k \times 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^{k=n} 2^k \times 3^{-k} = 3^n \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k =$ $3^n \dfrac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 3^{n+1}\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right) = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.
2. suites := proc(n : :integer) ;
   for i from 0 to n do w := 0 ; for j from 0 to i do w := w+ln(j+1)/(i-j+1) end do ; print(w) end do ;
   end proc ;
3. (a) On calcule $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=m} u_k = \sum_{k=n+1}^{k=m} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \frac{1}{2^{n+1+k}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{k=m-n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1-\frac{1}{2^{m-n}}}{1-\frac{1}{2}} =$ $\dfrac{1}{2^n}\left(1 - \dfrac{1}{2^{m-n}}\right) = \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^m} < \dfrac{1}{2^n} = u_n$, donc l'inégalité demandée est vraie.

   (b) Il s'agit « simplement » de découper la somme constituant w_{2n} en morceaux et de faire les bonnes majorations : $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=2n} u_k v_{2n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{k=2n-1} u_k v_{2n-k} + u_{2n}v_0$. La première somme est égale à $u_0 v_{2n} + u_1 v_{2n-1} + \cdots + u_n v_n$. Comme la suite (v_n) est supposée décroissante et que tous les termes de (u_n) sont positifs, elle est inférieure ou égale à $(u_0 + u_1 + \cdots + u_n)v_n = u_0 v_n + v_n \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k \leqslant u_0 v_n + u_0 v_n = 2v_n$ (cette dernière inégalité découle de la question précédente). De même, en utilisant la décroissance de (v_n), la deuxième somme est inférieure ou égale à $v_1 \displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=2n-1} u_k \leqslant v_1 u_n$ (toujours d'après la question précédente). En additionnant ces majorations, on obtient bien $w_{2n} \leqslant 2v_n + v_1 u_n + v_0 u_{2n}$.

La deuxième majoration est du même style : $w_{2n+1} = \sum_{k=0}^{k=n} u_k v_{2n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k v_{2n+1-k} + u_{2n+1}v_0 \leqslant v_{n+1}u_0 + v_{n+1}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) + v_1 \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k + u_{2n+1}v_0 \leqslant 2v_{n+1} + v_1 u_n + v_0 u_{2n+1}$.

(c) Les deux suites (u_n) et (v_n) ont pour limite 0 (pour (v_n), ça fait partie des hypothèses, et pour (u_n) c'est une conséquence du fait qu'il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$). On en déduit aisément que $\lim_{n\to+\infty} v_0 u_{2n} + 2v_n + v_1 u_n = 0$, et pareil pour $2v_{n+1} + v_1 u_n + v_0 u_{2n+1}$. Comme de plus tous les termes de la suite (w_n) sont positifs (ils sont constitués d'une somme de réels positifs), le théorème des gendarmes permet de dire que $\lim_{n\to+\infty} w_{2n} = \lim_{n\to+\infty} w_{2n+1} = 0$. Les deux sous-suites constituées des termes pairs et impairs convergeant vers la même limite, la suite (w_n) converge également vers 0.

(d) D'après l'inégalité triangulaire, on aura $0 \leqslant |(u' \times v)_n| = \left| \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k v_{n-k} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{k=n} \left| \left(-\frac{1}{2}\right)^k v_{n-k} \right| = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{2^k} v_{n-k} = w_n$. Comme on vient de voir que la suite (w_n) convergeait vers 0, le théorème des gendarmes nous donne la convergence de $(|u' \times v|)$, et donc de $(u' \times v)$, vers 0.

Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

1. Si (u_n) est une suite décroissante, on a $\frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) = a_n \geqslant a_{n+1}$, donc la suite appartient effectivement à A. Au contraire, si (u_n) est strictement croissante, on aura toujours $\frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) < u_n < u_{n+1}$, donc la suite n'appartient pas à A.

2. (a) La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$, donc elle admet deux racines $r = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$ et $s = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$. Le terme général de la suite est donc bien de la forme $z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

   (b) La suite définie par $u_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, par exemple, appartient à A (elle vérifie la récurrence linéaire de la question précédente, et on vérifie facilement que ses termes sont tous positifs), mais n'est pas monotone puisque les termes d'indices pairs de la suites sont plus grands que 1 et les termes d'indices impairs plus petits que 1.

3. (a) Calculons donc, pour $n \geqslant 1$, $c_{n+1} - c_n = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n - a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} = a_{n+1} - \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \leqslant 0$ puisque $(a_n) \in A$. La suite (c_n) est donc décroissante. Comme elle est par ailleurs constituée de termes positifs (puisque c'est le cas de (a_n)), elle est minorée, donc elle converge.

   (b) Il semble assez naturel de procéder à une récurrence. Pour $n = 0$, l'égalité stipule que $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 c_0 = a_0$, ce qui est effectivement vrai. Supposons désormais l'égalité vérifiée au rang n, alors $\sum_{k=0}^{k=n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n+1-k} = c_{n+1} + \sum_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} c_{n-k} = c_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}a_n = a_{n+1}$. La propriété est donc vérifiée au rang $n+1$, et la récurrence achevée. Ca calcul prouve que les suites $b \times c$ et a sont tout simplement identiques.

(c) La suite (u_n) convergeant vers l, la suite ε a pour limite 0. De plus, elle est décroissante à partir du rang 1 tout comme (u_n), donc tous ses termes sont positifs (sinon elle ne pourrait pas converger vers 0). Elle vérifie donc les hypothèses faites sur la suite (v_n) dans la partie précédente, et on peut en conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$.

(d) Ce n'est pas si dur que ça en a l'air : $d_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (c_{n-k} - l) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} - l \sum\limits_{k=0}^{k=n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = a_n - l\frac{1 - (-\frac{1}{2})^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} = a_n + \frac{3}{2}l\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$. On peut également écrire que $a_n = d_n + \frac{3}{2}l\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

La toute dernière question est un simple calcul de limite : on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ (suite géométrique), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{3}l$.