Feuille d'exercices n°9 : Suites

PTSI B Lycée Eiffel

10 janvier 2013

Exercice 1 (*)

Déterminer pour chacune des relations suivantes s'il s'agit ou non d'une relation d'ordre, et si la relation d'ordre éventuelle est totale. On déterminera également dans ce cas si l'ensemble admet un plus grand et un plus petit élément.

1. relation de parallélisme sur l'ensemble des droites du plan.
2. relation d'inclusion sur l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$.
3. relation R définie par $aRb \Leftrightarrow a^b \leqslant b^a$ sur $\mathbb{N}^*$, puis sur $\{3; 4; \dots\}$.
4. relation $fRg \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant g(x)$ sur l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
5. relation $(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow |x' - x| \leqslant y' - y$ sur $\mathbb{R}^2$. Le disque trigonométrique possède-t-il un plus grand élément pour cette relation ? Une borne supérieure ?

Exercice 2 (***)

On souhaite prouver qu'une application $f : [0; 1] \to [0; 1]$ croissante admet nécessairement un point fixe. Pour cela, on pose $E = \{x \in [0; 1] \mid f(x) \geqslant x\}$. montrer que E possède une borne supérieure a, puis que cette borne supérieure vérifie $f(a) = a$ (on pourra raisonner par l'absurde et distinguer deux cas).

Exercice 3 (**)

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ (qui admettent donc une borne supérieure). Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure, et déterminez-là en fonction de celle de A et B (on fera naturellement une preuve rigoureuse).

Exercice 4 (***)

On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$, et $f(xy) = f(x)f(y)$.

1. Montrer que la fonction nulle convient. On exclut désormais ce cas peu intéressant.
2. Montrer que $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$.
3. Montrer que f coïncide avec l'identité sur $\mathbb{N}$ (si vous préférez, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$).
4. Montrer que f coïncide avec l'identité sur $\mathbb{Q}_+$.
5. Montrer que f ne prend que des valeurs positives, et qu'elle est croissante.
6. Montrer que $f = id_{\mathbb{R}_+}$.

Exercice 5 (**)

Calculer les nombres suivants :

- $Ent((\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2)$
- $Ent\left(\frac{n-1}{2}\right)+Ent\left(\frac{n+2}{4}\right)+Ent\left(\frac{n+4}{4}\right)$
- $Ent\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=10\ 000}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ (on pourra utiliser le fait que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$).

Exercice 6 (**)

Calculer à l'aide des définitions les limites suivantes :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-2n=+\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+3}=0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{n+1}=2$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+3}=+\infty$

Exercice 7 (**)

Vrai ou faux ?

1. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
2. Une suite convergente est nécessairement monotone à partir d'un certain rang.
3. Une suite divergeant vers $+\infty$ est nécessairement croissante à partir d'un certain rang.
4. Si (v_n) est croissante, et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant v_n$, alors (u_n) est croissante.
5. Si $(|u_n|)$ converge, alors (u_n) aussi.
6. Si $(|u_n|)$ converge vers 0, alors (u_n) aussi.

Exercice 8 (* à **)

Déterminer la limite éventuelle de chacune des suites suivantes :

- $u_n=\frac{3^n-2^n}{4^n}$
- $u_n=(-n+2)e^{-n}$
- $u_n=\frac{n^2-3n+2}{2n^2+5n-34}$
- $u_n=\sqrt{n^2-1}-n$
- $u_n=\frac{(n+2)!}{(n^2+1)\times n!}$
- $u_n=e^{-\frac{1}{2n}}+\ln\left(\frac{n}{n+2}\right)$
- $u_n=\frac{n+\sin(n)}{n-\cos(n)}$
- $u_n=\sinh(2n)-2\sinh(n)$
- $u_n=\arctan\left(\frac{n\sqrt{\ln(1+\frac{\pi^2}{n^2})}}{4}\right)$

Exercice 9 (***)

On considère une suite (u_n) définie par $u_n=\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$, avec $a\in\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que la suite est croissante (pour cette question, on étudiera les variations de la fonction $f:x\mapsto x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$ en la dérivant deux fois).
2. Montrer que, $\forall x\geqslant 0$, $\frac{t}{1+t}\leqslant\ln(1+t)\leqslant t$.

3. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{na}{n+a} \leqslant \ln u_n \leqslant a$.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
5. Quel résultat obtient-on en prenant $a = 1$?

Exercice 10 (*)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies de la façon suivante : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$, et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes (les curieux seront contents d'apprendre que leur limite commune vaut e). Question subsidiaire (nettement plus difficile) : montrer que la limite commune des ces deux suites est un nombre irrationnel (quon ne peut pas écrire sous la forme d'un quotient d'entiers) en faisant un raisonnement par l'absurde.

Exercice 11 (**)

Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. On définit deux suites de la façon suivante : $u_0 = a$; $v_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

1. Vérifier que ces deux suites sont bien définies.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ (pour une fois, pas besoin de récurrence).
3. Déterminer la monotonie de chacune des deux suites.
4. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Exercice 12 (**)

Soit p un entier fixé supérieur ou égal à 2. On pose $u_n = \dfrac{1}{\binom{n+p}{n}}$, et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} u_k$.

1. Montrer la relation $(n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}$.
2. Montrer par récurrence que $S_n = \dfrac{1}{p-1}(1 - (n+p+1)u_{n+1})$.
3. En posant $v_n = (n+p)u_n$, montrer que (v_n) converge vers 0.
4. En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 13 (***)

1. Démontrer le théorème de Cesaro : si une suite (u_n) converge vers une limite finie l, alors la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k$ a la même limite l (on pourra commencer par traiter le cas particulier où $l = 0$, et revenir à la définition de la limite).
2. Soit (u_n) une suite pour laquelle $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} - u_n = \alpha$, déterminer un équivalent simple de u_n.
3. Pour une suite (u_n) convergeant vers l, on pose désormais $v_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k u_k$. Déterminer la limite de (v_n) en utilisant une technique proche de celle de la première question.
4. En déduire un équivalent simple d'uns suite (u_n) pour laquelle $u_{n+1} - u_n \sim \beta n$.

Exercice 14 (*)

Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n^2 + e^{-2n} + \sqrt{n^5}}{\ln(2n) + 2n - 3}$
2. $u_n = (n + 3\ln(n))e^{-(n+1)}$
3. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n^2+1}$
4. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2}\right)$
5. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$
6. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k!$
7. $u_n = \dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$

Exercice 15 (**)

On considère la suite (S_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. À l'aide de la question précédente, déterminer la limite de la suite (S_n).
3. On pose désormais $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Démontrer à l'aide du théorème de convergence monotone que (u_n) converge.
4. En déduire un équivalent simple de S_n.

Exercice 16 (**)

Soit (u_n) une suite décroissante vérifiant $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$. Montrer que la suite converge nécessairement vers 0 et en donner un équivalent simple. Le résultat reste-t-il vrai si la suite n'est pas supposée décroissante ?

Exercice 17 (**)

Trois réels a, b et c (avec $a \neq 0$) vérifient les drôles de conditions suivantes :

- a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q.
- a, $2b$ et $3c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison q (la même que ci-dessus, donc).

Déterminer les valeurs possibles de a, b, c et q.

Exercice 18 (*)

Déterminer pour chacune des suites suivantes la valeur de u_n en fonction de n :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - 6$.

2. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$
3. $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$
4. $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{2}$
5. $u_0 = 2$; $u_1 = \dfrac{10}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$

Exercice 19 (**)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$. Déterminer trois réels a, b et c tels que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + an^2 + bn + c$ soit une suite géométrique. En déduire la valeur de u_n.

Exercice 20 (**)

On considère, pour tout entier naturel n, la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Étudier les variations de f_n.
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
3. Montrer que $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ et en déduire la convergence de la suite (u_n).
4. Montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.
5. Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{1}{n} - u_n$.

Exercice 21 (***)

Pour tout $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 2$ admet une unique solution qu'on notera u_n.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $u_n \in]0;1[$.
3. Déterminer la monotonie de la suite (u_n), et en déduire sa convergence.
4. Calculer la limite de la suite (on pourra commencer par prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$).
5. En posant $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$, montrer que $\left(\dfrac{1}{2} + v_n\right)^{n+1} = 2v_n$.
6. En déduire que $v_n \sim \dfrac{1}{2^{n+2}}$.

Exercice 22 (**)

Étudier le comportement des suites récurrentes suivantes :

1. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$
2. $u_0 = \sqrt{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$
3. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2u_n}$
4. $u_0 \geqslant 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$
5. $u_0 \in [-2;2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$ (on pourra prouver que $|u_n - 1|$ converge vers 0).

Exercice 23 (***)

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$.

1. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. Déterminer une relation simple entre u_{n+1} et u_n.
3. Prouver par récurrence que $u_n \leqslant n$ puis que $u_n = o(n)$.
4. Déterminer un équivalent simple de u_n.
5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \sqrt{n}$.

Exercice 24 (**)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$, où a est un réel fixé strictement positif.

1. Étudier la nature de la suite (u_n).
2. On pose $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$, déterminer v_{n+1} en fonction de v_n, puis v_n en fonction de n et de v_0.
3. En déduire une majoration de l'écart entre u_n et la limite de la suite en fonction de u_0 et de v_0. Pour $a = 2$, quelle valeur de n suffit-il de choisir pour que u_n soit une valeur approchée de la limite à 10^{-100} près (calculatrice autorisée pour l'application numérique !).

Problème (***)

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit la suite $u \star v = w$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$$

Partie A : Exemples

1. **Premiers exemples**
   Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :
   (a) pour tout entier naturel n, $u_n = 2$ et $v_n = 3$.
   (b) pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.
2. **Programmation**
   Dans cette question, les suites u et v sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.
   Écrire une procédure Maple qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n, qui calcule et affiche les valeurs $w_0,\ w_1,\ \ldots,\ w_n$.
3. **Un résultat de convergence**
   Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.
   (a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité :

$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$$

(b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités :

$$w_{2n} \leqslant v_0\, u_{2n} + 2v_n + v_1\, u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leqslant v_0\, u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1\, u_n$$

(c) En déduire que les deux suites $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 ainsi que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) Soit u' la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u'_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $u' \star v$ est convergente et de limite nulle.

Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.
2. Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times},\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.

   (a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

   (b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.

3. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^{\times},\ c_n = a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1}$.

   (a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

   (b) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$.

   Que peut-on en déduire pour les suites $b \star c$ et a ?

   (c) Soit ε la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = c_n - \ell$ et d la suite $b \star \varepsilon$.

   En utilisant le résultat de la question **3**. de la Partie **1**, montrer que la suite d converge vers 0.

   (d) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $d_n = a_n - \dfrac{2}{3}\ell\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

   En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.