Feuille d'exercices n°19 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

11 juin 2013

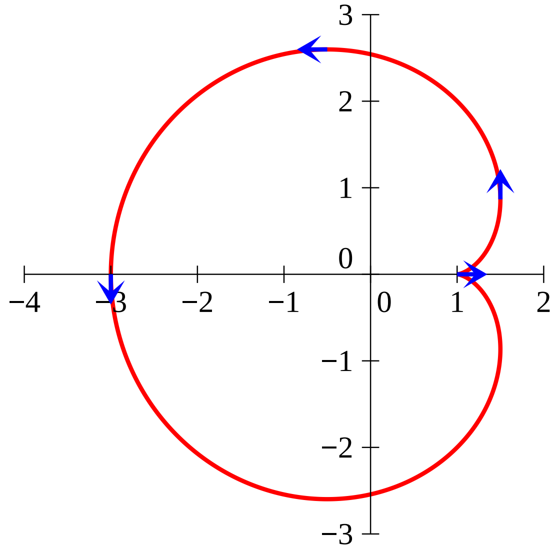
Exercice 1 (*)

Pour chacune des deux courbes, on effectuera une étude détaillée avant de se lancer dans les calculs.

1. Les deux fonctions coordonnées sont définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elles sont par ailleurs 2π-périodiques et respectivement paire et impaire, ce qui permet de restreindre l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$ et de compléter la courbe par symétrie par rapport à (Ox). Dérivons : $x'(t) = -2\sin(t) + 2\sin(2t) = 2\sin(t)(2\cos(t) - 1)$, qui s'annule en 0, en π et en $\frac{\pi}{3}$; et $y'(t) = 2\cos(t) - 2\cos(2t) = 2(\cos(t) - 2\cos^2(t) + 1)$. En posant $X = \cos(t)$, on trouve $y'(t) = 2(-2X^2 + X + 1) = 2(X-1)(-2X-1)$, qui s'annule en 0 et en $\frac{2\pi}{3}$. On peut alors dresser le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
x	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-3
$y'(t)$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

Il y a un point stationnaire en 0, on peut déterminer sa nature, par exemple à l'aide de développements limités : $x(t) = 2\left(1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3)\right) - (1 - 2t^2 + o(t^3)) = 1 + t^2 + o(t^3)$; et $y(t) = 2\left(t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)\right) - \left(2t - \frac{4t^3}{3} + o(t^3)\right) = t^3 + o(t^3)$. La dérivée seconde en 0 est horizontale et la dérivée tierce verticale, on a un point de rebroussement de première espèce avec tangente horizontale. Voici une allure de la courbe, dans laquelle vous ne manquerez pas de reconnaitre une belle cardoïde :



Allons-y pour les calculs. Commençons par calculer $\|\overrightarrow{f'(t)}\| = \|(2\sin(2t) - 2\sin(t); 2\cos(t) - 2\cos(2t))\| = 2\sqrt{\sin^2(2t) + \sin^2(t) - 2\sin(2t)\sin(t) + \cos^2(t) + \cos^2(2t) - 2\cos(2t)\cos(t)}$ $= 2\sqrt{2}\sqrt{1 - (\sin(2t)\sin(t) + \cos(2t)\cos(t))} = 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(t)}$ en utilisant les formules d'addition trigonométriques. Or, par formule de duplication cette fois-ci, $\cos(t) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$, donc $\sqrt{1-\cos(t)} = \sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$. On peut se contenter de faire tous nos calculs sur l'intervalle $[0,\pi]$ où le sinus de $\frac{t}{2}$ est positif (ce serait encore le cas sur $[0, 2\pi]$), on aura alors $\|\overrightarrow{f'(t)}\| = 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)$. C'est amplement suffisant pour nous permettre de calculer la longueur de la courbe (on va intégrer sur $[0,\pi]$ et multiplier par 2 pour tenir compte de la symétrie) : $L = 2\int_0^{\pi} 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)\ dt = 8\left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 8 \times 2 = 16$. Tant qu'on y est, on peut donner les vecteurs du repère de Frénet : $\overrightarrow{T} = \left(\frac{2\sin(t)(2\cos(t)-1)}{4\sin(\frac{t}{2})}; \frac{2\cos(t) - 2\cos(2t)}{4\sin(\frac{t}{2})}\right)$ (on peut simplifier si on est courageux, mais ça n'a pas grand intérêt, seule l'abscisse se simplifie vraiment) et $\overrightarrow{N} = \left(-\frac{2\cos(t) - 2\cos(2t)}{4\sin(\frac{t}{2})}; \frac{2\sin(t)(2\cos(t)-1)}{4\sin(\frac{t}{2})}\right)$.

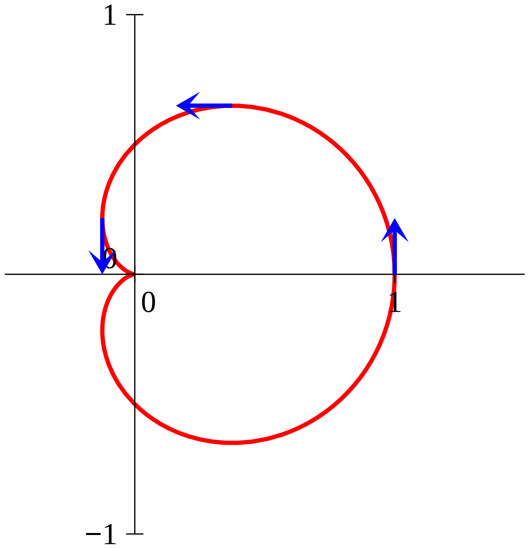
En reprenant les notations du cours, nous avons déjà calculé $\frac{ds}{dt} = 4\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$, reste à calculer α, ou au moins $\frac{d\alpha}{dt}$. Rappelons que, pour une courbe en coordonnées cartésiennes, $\tan(\alpha) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, soit ici $\tan(\alpha) = \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{\sin(2t) - \sin(t)}$. Pas de simplification évidente, alors dérivons brutalement : $(1+\tan^2(\alpha))\frac{d\alpha}{dt} = \frac{(-\sin(t) + 2\sin(2t))(\sin(2t) - \sin(t)) - (2\cos(2t) - \cos(t))(\cos(t) - \cos(2t))}{(\sin(2t) - \sin(t))^2}$.
Quitte à écrire $1 + \tan^2(\alpha) = 1 + \frac{(\cos(t) - \cos(2t))^2}{(\sin(2t) - \sin(t))^2}$, on peut simplifier les dénominateurs et tout développer brutalement (décidément, que de brutalité) pour obtenir
$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\sin^2(2t) + \sin^2(t) - 3\sin(2t)\sin(t) + 2\cos^2(2t) + \cos^2(t) - 3\cos(2t)\cos(t)}{\sin^2(2t) + \sin^2(t) - 2\sin(2t)\sin(t) + \cos^2(t) + \cos^2(2t) - 2\cos(2t)\cos(t)}$
$= \frac{3(1 - \sin(2t)\sin(t) - \cos(2t)\cos(t))}{2(1 - \sin(2t)\sin(t) - \cos(2t)\cos(t))} = \frac{3}{2}$. Bon, là, tout de même, on se dit qu'on a sûrement fait des calculs beaucoup trop compliqués pour avoir un résultat si simple à la fin.

De fait, on pouvait simplifier α à l'aide des formules de transformation somme-produit : $\tan(\alpha) = \dfrac{\cos(t)-\cos(2t)}{\sin(2t)-\sin(t)} = \dfrac{-2\cos(\frac{3t}{2})\cos(\dfrac{-t}{2})}{2\cos(\frac{3t}{2})\sin(\frac{t}{2})} = \tan\left(\dfrac{3t}{2}\right)$. Tout s'explique, et au moins notre calcul est cohérent ! On peut désormais calculer la courbure $c = \dfrac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \dfrac{3}{8|\sin(\frac{t}{2})|}$. Si on préfère, le rayon de courbure vaut donc $R = \dfrac{8}{3}\left|\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\right|$. On termine avec les coordonnées du centre de courbure I. Pour cela, calculons $\overrightarrow{f(t)} + R\overrightarrow{N} = (2\cos(t)-\cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t)) + \dfrac{4}{3}(\cos(2t)-\cos(t), \sin(2t)-\sin(t)) = \left(\dfrac{2}{3}\cos(t) + \dfrac{1}{3}\cos(2t); \dfrac{2}{3}\sin(t) + \dfrac{1}{3}\sin(2t)\right)$. Les plus observateurs remarqueront que le centre de courbure a pour coordonnées $-\dfrac{1}{3}(2\cos(\pi + t) - \cos(2(\pi+t)); 2\sin(\pi+t) - \sin(2(\pi+t)))$, ce qui suffit, en comparant avec le paramétrage de la courbe initiale, à comprendre que le lieu décrit par les centres de courbure est également une cardioïde, mais homothétisée par rapport à l'originale, et symétrisée par rapport à l'axe des ordonnées. Bon, en même temps, on le prouvera dans l'exercice 4, alors attendons un peu.

2. Il peut paraitre curieux de demander le calcul de la longueur d'une courbe paramétrée non périodique mais c'est le cas ici. Les fonctions coordonnées sont définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, x est paire et y est impaire, on peut donc étudier sur $\mathbb{R}^+$ et effectuer ensuite une symétrie d'axe (Ox). Dérivons : $x'(t) = \dfrac{-2t(1+t^2)^2 - 4t(1+t^2)(1-t^2)}{(1+t^2)^4} = \dfrac{2t^3-6t}{(1+t^2)^3} = \dfrac{2t(t^2-3)}{(1+t^2)^3}$; et $y'(t) = \dfrac{2(1+t^2)^2 - 4t(1+t^2)\times 2t}{(1+t^2)^4} = \dfrac{2-6t^2}{(1+t^2)^3} = \dfrac{2(1-3t^2)}{(1+t^2)^3}$. On peut alors dresser le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$x'(t)$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
x	1	$\searrow$	$\frac{3}{8}$	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	0
$y'(t)$	||	$+$	0	$-$	|	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{9}{8\sqrt{3}}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	0

En $\pm\infty$, la courbe se rapproche de l'origine du repère, ce qui explique que la courbe soit effectivement une courbe fermée. elle ressemble d'ailleurs à ceci :



Mais de qui se moque-t-on dans cet exercice ? Encore une cardioïde ? ? Eh oui, mais les calculs vont être différents, alors on va tout refaire (de toute façon, on aime ça, n'est-ce pas ?). Commençons par la dérivée de l'abscisse curviligne : $\|\overrightarrow{f'(t)}\| = \dfrac{2}{(1+t^2)^3}\|(t^3-3t, 1-3t^2)\| = \dfrac{2}{(1+t^2)^3}\sqrt{t^6-6t^4+9t^2+1-6t^2+9t^4} = \dfrac{2}{(1+t^2)^3}\sqrt{t^6+3t^4+3t^2+1} = \dfrac{2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$. On peut déjà en déduire les vecteurs du repère de Frénet : $\overrightarrow{T} = \left(\dfrac{t^3-3t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, \dfrac{1-3t^2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$ et $\overrightarrow{N} = \left(\dfrac{3t^2-1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, \dfrac{t^3-3t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$. Pour le calcul de la longueur, on va tout de même avoir un petit problème, c'est que si on souhaite vraiment calculer la longueur de toute la (demi)-courbe obtenue quand t parcourt $\mathbb{R}^+$, il faut calculer une intégrale impropre, c'est-à-dire une intégrale dont une des bornes est infinie. On peut en fait ruser un peu ici, calculons simplement la longueur de l'arc parcourt lorsque t varie entre 0 et A, et on pourra ensuite faire tendre A vers $+\infty$. Il faut donc calculer $L_A = \displaystyle\int_0^A \frac{2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt$. Vous connaissez tous une primitive de cette fonction depuis que monsieur Raimi vous en a brillamment exhibé une, mais rappelons une façon mathématique d'obtenir le résultat : en intégrant par parties la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ (en primitivant 1 et en dérivant notre fonction), on obtient $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \left[\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right]_0^A - \int_0^A t \times \frac{-2t}{-2(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt = \frac{A}{\sqrt{1+A^2}} + \int_0^A \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt = \frac{A}{\sqrt{1+A^2}} + \int_0^A \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt$. En simplifiant le membre de gauche avec le morceau de droite qui lui est égal, on trouve que $L_A = \dfrac{2A}{\sqrt{1+A^2}}$. Cette quantité a bien une limite finie en $+\infty$, en admettant qu'elle correspond à la longueur de la courbe complète et en multipliant par 2 pour tenir compte de la deuxième moitié de courbe sur $\mathbb{R}^-$, on peut conclure que notre cardioïde a une longueur $L = 2\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{2A}{\sqrt{1+A^2}} = 4$. On peut comparer avezc la longueur de la première cardioïde étudiée dans cet exercice : celle-ci est quatre fois moins longue, et elle est effectivement obtenue à partir de l'autre par une homothétie de rapport $\dfrac{1}{4}$ (composée avec une symétrie par rapport à un axe vertical). Notons d'ailleurs qu'on pouvait certainement ramener le calcul de notre intégrale impropre à celui

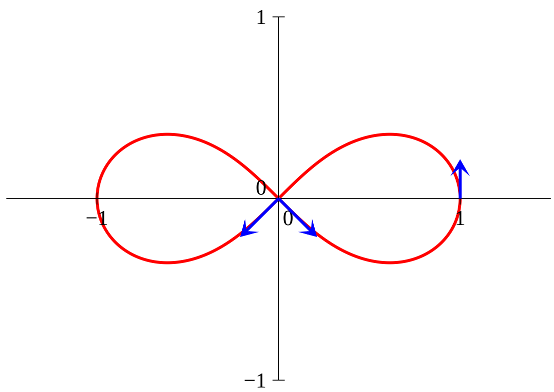
d'une intégrale classique via un changement de variables trigonométrique intelligent.
On peut maintenant passer à la suite des calculs. On sait déjà que $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{2}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$. Par ailleurs, $\tan(\alpha) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{1-3t^2}{t^3-3t}$. En dérivant, $(1+\tan^2(\alpha))\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{-6t(t^3-3t)-3(t^2-1)(1-3t^2)}{(t^3-3t)^2}$. Comme $1+\tan^2(\alpha) = \dfrac{(t^3-3t)^2+(1-3t^2)^2}{(t^3-3t)^2}$, on trouve en mettant tout au même dénominateur et en développant que $\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{-6t^4+18t^2-3t^2+3+9t^4-9t^2}{t^6-6t^4+9t^2+1-6t^2+9t^4} = \dfrac{3(t^4+2t^2+1)}{(t^2+1)^3} = \dfrac{3}{1+t^2}$. On en déduit si on le souhaite que $\alpha(t) = 3\arctan(t)$, ce qui confirme qu'un changement de variables trigonométrique aurait beaucoup simplifié les choses. Peu importe, on peut désormais calculer $c = \dfrac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{1+t^2}$, puis $R = \dfrac{2}{3\sqrt{1+t^2}}$. On peut alors déterminer les coordonnées du centre de courbure I : $\overrightarrow{f(t)} + R\overrightarrow{N} = \left(\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}, \dfrac{2t}{(1+t^2)^2}\right) + \dfrac{2}{3\sqrt{1+t^2}}\left(\dfrac{3t^2-1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}, \dfrac{t^3-3t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \left(\dfrac{1-t^2+\frac{2}{3}(3t^2-1)}{(1+t^2)^2}, \dfrac{2t+\frac{2}{3}(t^3-3t)}{(1+t^2)^2}\right)$
$= \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1-3t^2}{(1+t^2)^2}, \dfrac{2t^3}{(1+t^2)^2}\right)$.

Exercice 2 (**)

1. C'est une lemniscate de Bernoulli, on l'a déjà étudiée dans la feuille d'exercices sur les courbes planes. Rappelons rapidement les calculs : $\mathcal{D}_\rho = \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$ (modulo 2π). Comme ρ est de plus π-périodique, on peut se contenter d'étudier sur le premier intervalle et d'effectuer ensuite une symétrie par rapport à l'origine du repère. On calcule $\rho'(\theta) = -\dfrac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$, ce qui donne le tableau suivant :

θ	$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$
ρ'		$+$	0	$-$	
ρ	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Il y a une tangente orthoradiale au point de paramètre $\theta = 0$, et les deux bissectrices sont tangentes à l'origine aux deux extrêmités de l'intervalle, d'où une courbe ressemblant à ceci :



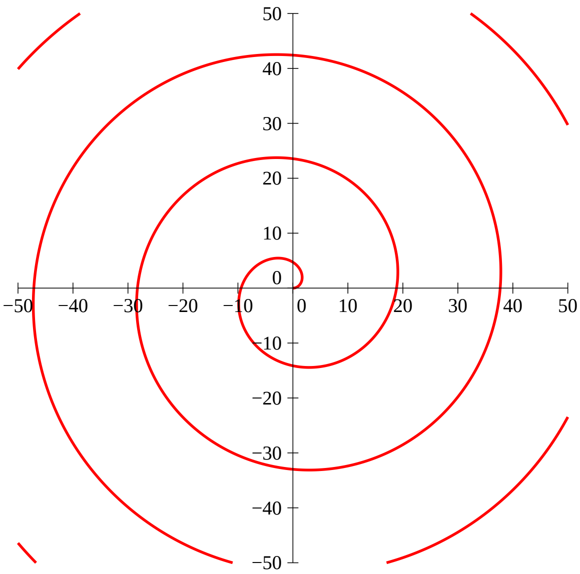
Commençons par calculer la norme du vecteur dérivé : $\|\overrightarrow{f'(t)}\| = \sqrt{\cos(2\theta) + \dfrac{\sin^2(2\theta)}{\cos(2\theta)}} = \dfrac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$. Normalement, arrivés à ce point, vous vous dites que le calcul de la longueur de la courbe va être un simple calcul d'intégrale trigonométrique qui ne devrait pas poser plus de problèmes que ça. Pas de chance, comme dans le cas de l'ellipse vu en cours, nous sommes en présence ici d'une intégrale elliptique qu'on ne sait pas calculer. Le résultat ne s'exprime d'ailleurs pas explicitement, mais simplement en fonction de la moyenne arithmético-géométrique de 1 et de $\sqrt{2}$.

Passons donc au calcul de courbure. On a déjà la valeur de $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$, calculons maintenant α en partant de $\alpha = \theta + V$, avec $\tan(V) = \dfrac{\rho}{\rho'} = \dfrac{\cos(2\theta)}{-\sin(2\theta)} = -\dfrac{1}{\tan(2\theta)} = \tan\left(2\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$. On peut donc choisir $V = 2\theta + \dfrac{\pi}{2}$, soit $\alpha = 3\theta + \dfrac{\pi}{2}$. On trouve alors $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = 3$, donc la courbe vaut $c = \dfrac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = 3\sqrt{\cos(2\theta)} = 3\rho(\theta)$.

Bon, je vous sens quand même frustrés par cette histoire de longueur qu'on ne peut pas calculer, alors je vais essayer de vous expliquer un peu mieux comment ça marche. Reprenons notre intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\, d\theta$ (longueur d'une demi-boucle de la lemniscate, on multiplie par quatre pour la longueur totale de la boucle), et effectuons un changement de variable $t = \tan(\theta)$ comme préconisé par les règles de Bioche : les bornes deviennent 0 et 1, on a $dt = (1+t^2)d\theta$ et $\cos(2\theta) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ (ce sont les formules utilisés quand on prend la tangente de l'angle moitié comme changement de variables), donc $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2}}}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(1-t^2)}}\, dt$. On peut alors faire un deuxième changement de variables en posant $t = \sin(u)$ (donc $dt = \cos(u)du$, les bornes deviennent $\arcsin(0) = 0$ et $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$) pour obtenir $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{\sqrt{(1-\sin^2(u))(1+\sin^2(u))}}\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(u)}}\, du$
$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2(u) + 2\sin^2(u)}}\, du$. On ne sait toujours pas calculer ça, mais cette dernière intégrale est justement du type appelé intégrale elliptique. On pose plus généralement, pour a et b deux réels strictement positifs, $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2(u) + b^2\sin^2(u)}}\, du$ (retournez vois ce qu'on avait fait pour l'ellipse dans le cours). On cherche ici la valeur de $I(1,\sqrt{2})$. Or, on peut constater en faisant un changement de variables ignoble du genre $\sin(u) = \dfrac{2a\sin(v)}{a+b+(a-b)\sin^2(v)}$ que $I(a,b) = I\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$ (je vous passe les détails de ce calcul sans intérêt, qui a été découvert par Gauss quand il était gamin ou à peu près). On peut évidemment recommencer le même calcul avec les nouvelles valeurs de a et b. Si vous préférez, si on construit deux suites récurrentes de la façon suivante : $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, alors on aura toujours $I(a,b) = I(a_n, b_n)$. Mais vous n'êtes pas sans savoir, depuis le magnifique exercice 11 de la feuille n°9, que les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune appelée moyenne arithmético-géométrique des réels a et b. En admettant un passage à la limite pas si facile que ça, et en notant μ la moyenne arithmético-géométrique de 1 et de $\sqrt{2}$, on pourra donc écrire $I(1,\sqrt{2}) = I(\mu,\mu)$. Et cette

dernière intégrale se calcule : $I(\mu,\mu) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\mu^2\cos^2(u)+\mu^2\sin^2(u)}}\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\mu}\,du = \frac{\pi}{2\mu}$. Autrement dit, la longueur totale de la lemniscate est de $\dfrac{2\pi}{\mu}$. Pour les curieux, $\mu \simeq 1.311$, donc $L \simeq 5.244$.

2. L'étude de la courbe ne présente ici que très peu d'intérêt, c'est une spirale donc voici une allure (on a seulement représenté les valeurs positives de θ) :



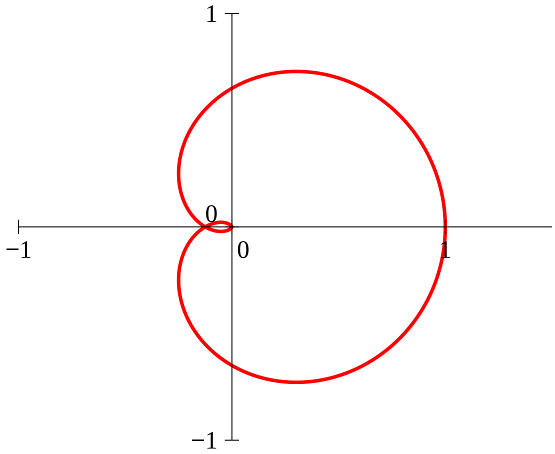
Pour calculer la longueur, il faudra bien sûr se restreindre à un intervalle du type $[0, A]$ puisque la courbe n'est pas fermée. Commençons par calculer $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{9\theta^2+9} = 3\sqrt{1+\theta^2}$. Pas de pot, on ne sait pas trouver de primitive de cette fonction, donc pas calculer exactement cette longueur. Pour en donner une valeur vraiment très approximative, tout ce qu'on peut faire c'est encadrer les morceaux de spirale entre des demi-cercles. Ainsi, la portion de spirale correspondant à $\theta \in [\pi, 2\pi]$ a une longueur comprise entre celle d'un demi-cercle de rayon 3π (donc $3\pi^2$) et celle d'un demi-cercle de rayon 6π, donc $6\pi^2$. De même, entre 2π et 3π, on aura une longueur entre $6\pi^2$ et $9\pi^2$ etc. C'est évidemment extrêmement imprécis.

Passons au calcul de courbure : $\dfrac{ds}{d\theta} = 3\sqrt{1+\theta^2}$. Par ailleurs, $\alpha = \theta + V$, avec $\tan(V) = \theta$. On peut dériver pour obtenir $(1+\tan^2(V))\dfrac{dV}{d\theta} = 1$, soit $(1+\theta^2)\dfrac{dV}{d\theta} = 1$, et donc $\dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{1}{1+\theta^2}$, puis $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \dfrac{1}{1+\theta^2} = \dfrac{2+\theta^2}{1+\theta^2}$. On conclut : $c = \dfrac{2+\theta^2}{3(1+\theta^2)^{\frac{3}{2}}}$.

3. La fonction est 6π-périodique et paire, on peut étudier sur $[0, 3\pi]$ puis effectuer une symétrie par rapport à l'axe des abscisses. On calcule $\rho'(\theta) = -3 \times \dfrac{1}{3}\cos^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)\sin\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$, qui est du signe opposé à celui de $\sin\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$, donc est négatif sur $[0, 3\pi]$. On peut dresser le tableau de variations suivant :

θ	0	$\frac{3\pi}{2}$	3π
ρ	1 $\searrow$	0	$\searrow$ -1

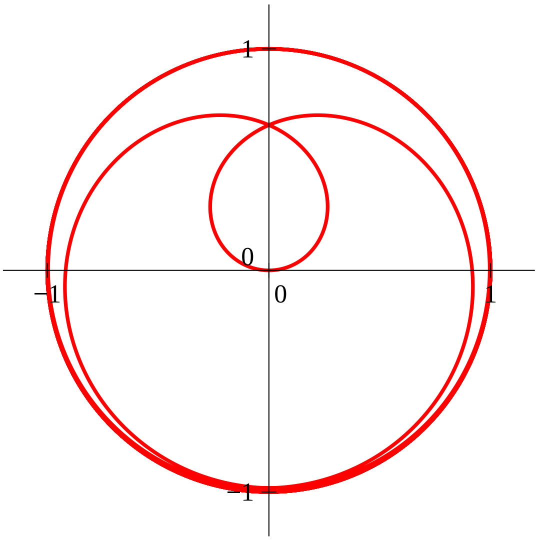
On peut ajouter pour la courbe les valeurs de $\rho\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$; $\rho(\pi) = \dfrac{1}{8}$; $\rho(2\pi) = -\dfrac{1}{8}$ et $\rho\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. En fait, on peut constater que $\rho(3\pi - \theta) = -\rho(\theta)$, ce qui prouve une symétrie par rapport à l'axe des abscisses et permet de ne s'intéresser qu'à la première moitié de l'intervalle (et oublier la seconde symétrie évoquée plus haut). Accessoirement, on a un point double pour les valeurs π et 2π du paramètre, la courbe ressemble à ceci (son petit nom est sextique de Cayley) :



L'abscisse curviligne a pour dérivée $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{\cos^6\left(\dfrac{\theta}{3}\right) + \cos^4\left(\dfrac{\theta}{3}\right)\sin^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)}$ $= \cos^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)\sqrt{\cos^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right) + \sin^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)} = \cos^2\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$. Pour calculer la longueur totale de la courbe, on va intégrer entre 0 et 3π directement, en utilisant la formule de duplication pour transformer le cosinus carré : $L = \displaystyle\int_0^{3\pi} \cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\, d\theta = \int_0^{3\pi} \frac{1+\cos(\frac{2\theta}{3})}{2}\, d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)\right]_0^{3\pi} = \frac{3\pi}{2}$.

Passons au calcul de courbure. On peut écrire $\alpha = \theta + V$, avec $\tan(V) = \dfrac{\cos^3(\frac{\theta}{3})}{-\cos^2(\frac{\theta}{3})\sin(\frac{\theta}{3})} = -\dfrac{1}{\tan(\frac{\theta}{3})}$, donc $\alpha = \theta + \dfrac{\theta}{3} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{4\theta}{3} + \dfrac{\pi}{2}$ convient. En particulier, $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = \dfrac{4}{3}$, et $c = \dfrac{4}{3\cos^2(\frac{\theta}{3})}$.

4. La fonction n'est pas périodique, par contre elle est impaire, il y aura donc une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées permettant de restreindre l'étude à $\mathbb{R}^+$. On sait déjà que la fonction ρ est strictement croissante, mais calculons quand même la dérivée, ça servira pour la suite : $\rho'(\theta) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \text{th}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$. Rien de spécial à signaler si ce n'est un cercle asymptote de rayon 1 en $\pm\infty$ puisque $\displaystyle\lim_{\theta\to\pm\infty} \rho(\theta) = 1$. Une allure de la courbe :



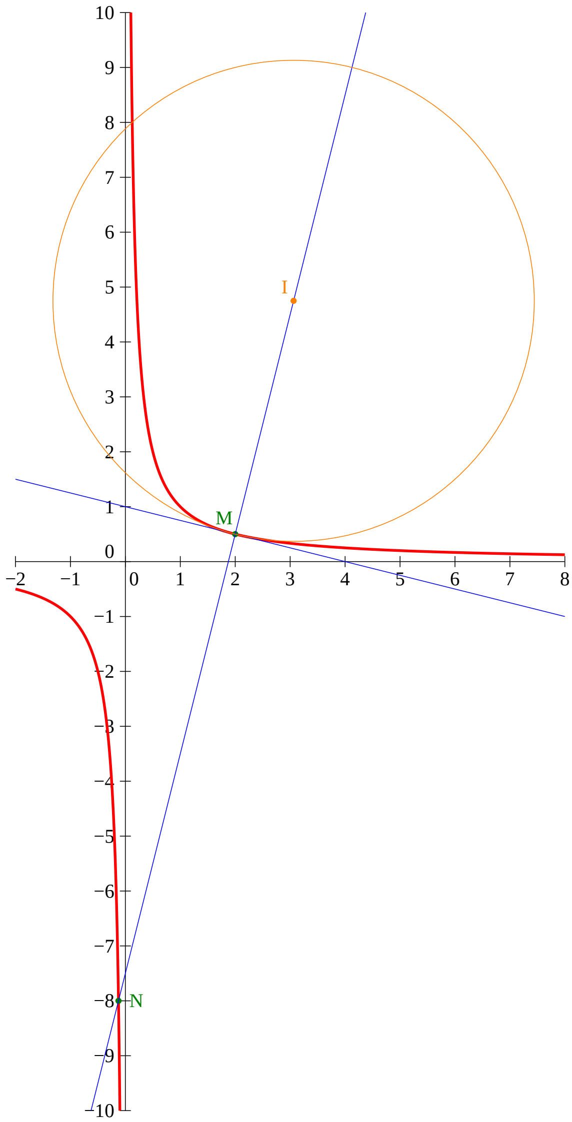
Commençons comme d'habitude par calculer $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{\operatorname{th}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \dfrac{1}{4}\left(1 - 2\operatorname{th}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \operatorname{th}^4\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)} = \sqrt{\dfrac{1}{4}\left(1 + 2\operatorname{th}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) + \operatorname{th}^4\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \operatorname{th}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$. La courbe n'est pas fermée (contrairement à ce que la figure peut laisser croire, en fait, la courbe se rapproche très rapidement de son cercle asymptote), mais on peut calculer facilement (pour une fois) des longueurs de portion de courbe : $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^A 1 + \operatorname{th}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\ d\theta = \dfrac{1}{2}\left[\theta + \theta - 2\operatorname{th}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right]_0^A = A - \operatorname{th}\left(\dfrac{A}{2}\right)$.

On enchaîne avec le calcul de la courbure. On écrit $\alpha = \theta + V$, avec $\tan(V) = \dfrac{2\operatorname{th}(\frac{\theta}{2})}{1 - \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2})}$, soit $(1 + \tan^2(V))\dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{(1 - \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))^2 + 2\operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2})(1 - \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))}{(1 - \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))^2} = \dfrac{(1 - \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))(1 + \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))}{(1 - \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))^2}$. Comme $1 + \tan^2(V) = 1 + \dfrac{4\operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2})}{(1 - \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))^2}$, on obtient après simplification $\dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{(1 - \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))(1 + \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))}{(1 + \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))^2} = \dfrac{(1 - \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))}{(1 + \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))}$, puis $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{2}{1 + \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2})}$. Enfin, on conclut que $c = \dfrac{4}{(1 + \operatorname{th}^2(\frac{\theta}{2}))^2}$.

Exercice 3 (**)

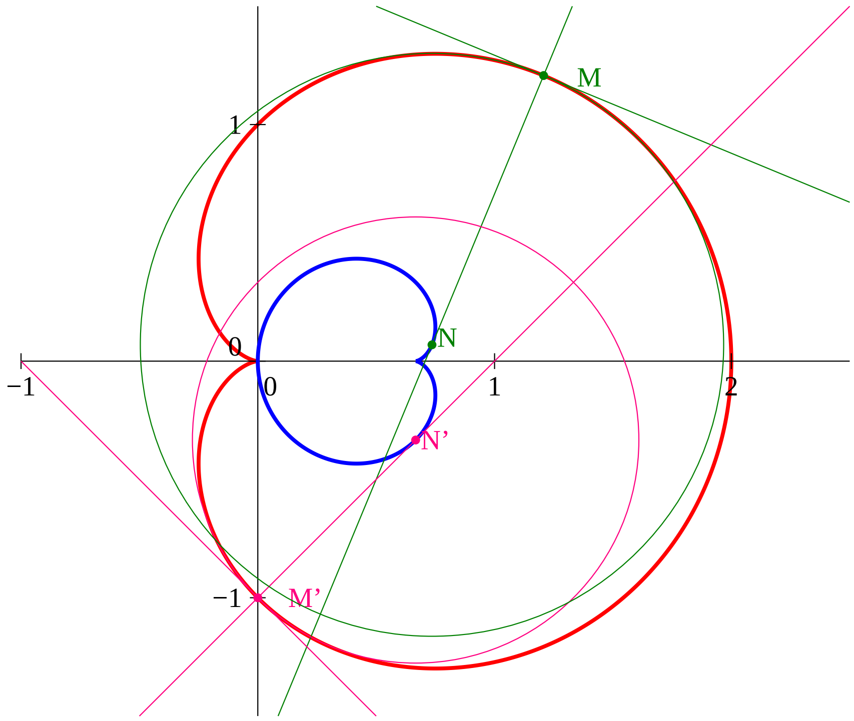
Considérons donc un point $M\left(x_M, \dfrac{1}{x_M}\right)$ appartenant à l'hyperbole (qui sera simplement paramétrée par son abscisse). Le vecteur tangent à $\mathcal{H}$ en M a pour coordonnées $\left(1, -\dfrac{1}{x_M^2}\right)$. On peut donc calculer $\|\overrightarrow{f'(x)}\| = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^4}} = \dfrac{\sqrt{1 + x^4}}{x^2}$. si on préfère, les vecteurs du repère de Frénet seront donnée par $\overrightarrow{T} = \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x^4}}, -\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^4}}\right)$ et $\overrightarrow{N} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^4}}, \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x^4}}\right)$. Tant qu'on y est, calculons la courbure et les coordonnées du point I (ou au moins du vecteur $\overrightarrow{MI}$) : on peut écrire $\tan(\alpha) = \dfrac{y'}{x'} = -\dfrac{1}{x^2}$, soit en dérivant $(1 + \tan^2(\alpha))\dfrac{d\alpha}{dx} = \dfrac{2}{x^3}$, donc $\dfrac{x^4 + 1}{x^4}\dfrac{d\alpha}{dx} = \dfrac{2}{x^3}$ et $\dfrac{d\alpha}{dx} = \dfrac{2x}{1 + x^4}$. On peut en déduire la courbure $c = \dfrac{\frac{d\alpha}{dx}}{\|\overrightarrow{f'(x)}\|} = \dfrac{2x^3}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}$, puis le rayon de courbure $R = \dfrac{1}{c} = \dfrac{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}{2x^3}$. En particulier, $\overrightarrow{MI} = R\overrightarrow{N} = \left(\dfrac{1+x^4}{2x^3}, \dfrac{1+x^4}{2x}\right)$.

Reste maintenant à déterminer les coordonnées du point N. Puisque $\overrightarrow{T}$ est un vecteur normal à la normale, la normale au point M a une équation de la forme $x_M^2(x - x_M) - (y - y_M) = 0$, soit $x_M^2(x - x_M) - y + \dfrac{1}{x_M} = 0$, ou encore $x_M^3(x - x_M) - x_M y + 1 = 0$. Si on souhaite ajouter la condition que le point N appartient à l'hyperbole, il faut avoir $y = \dfrac{1}{x}$, d'où $x_M^3(x - x_M) - \dfrac{x_M}{x} + 1 = 0$, soit $x_M^3 x^2 - x_M^4 x - x_M + x = 0$. On reconnait une équation du second degré, de discriminant $\Delta = (1 - x_M^4)^2 + 4x_M^4 = (1 + x_M^4)^2$, et admet donc pour racines $x_1 = \dfrac{-1 + x_M^4 + 1 + x_M^4}{2x_M^3} = x_M$ (solution peu intéressante mais normale, le point M lui-même appartenant certainement à l'hyperbole et à la normale), et $x_2 = \dfrac{-1 + x_M^4 - 1 + x_M^4}{2x_M^3} = -\dfrac{1}{x_M^3}$. Autrement dit, on prendra $N\left(-\dfrac{1}{x_M^3}, -x_M^3\right)$. On calcule alors facilement $\overrightarrow{NM} = \left(x_M + \dfrac{1}{x_M^3}, \dfrac{1}{x_M} + x_M^3\right) = \left(\dfrac{1+x_M^4}{x_M^3}, \dfrac{1+x_M^4}{x_M}\right) = 2\overrightarrow{MI}$. Une petit figure pour illustrer cette superbe propriété (le cercle osculateur est indiqué en orange) :

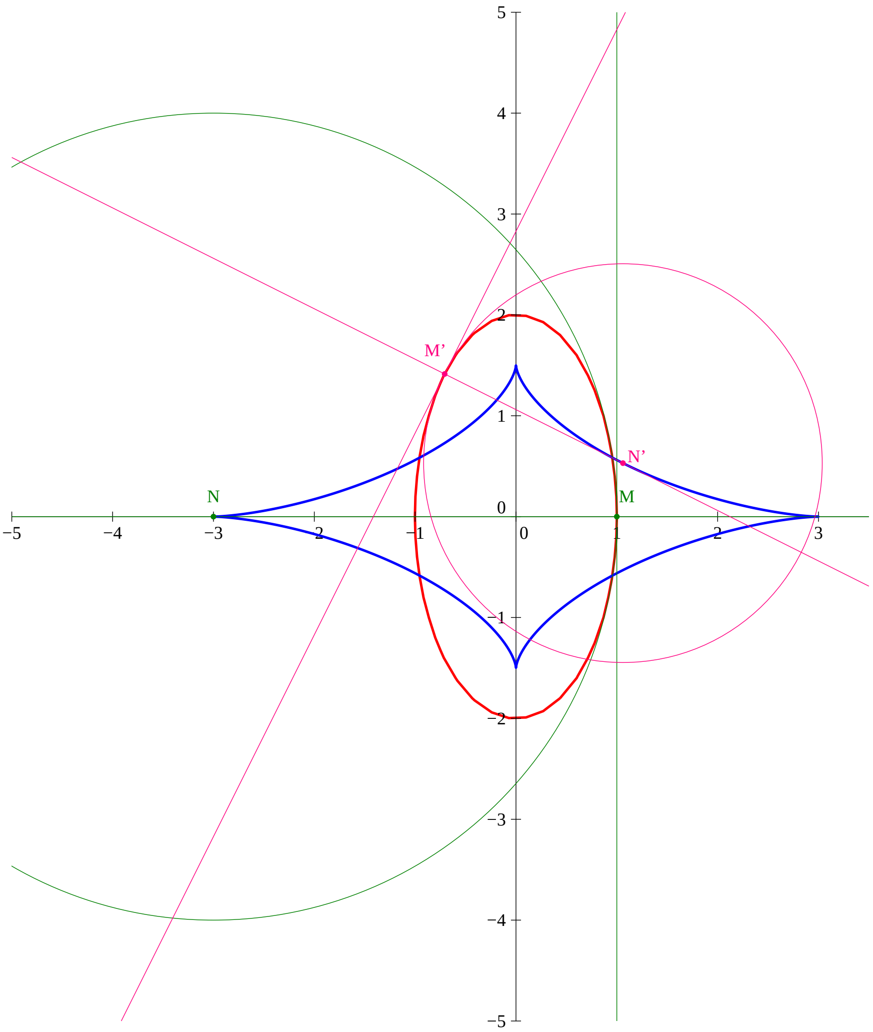


Exercice 4 (***)

- On commence encore une fois par étudier rapidement la courbe avant de faire le calcul des coordonnées du centre de courbure. La fonction ρ est 2π-périodique et paire, on peut donc étudier sur $[0, \pi]$ et compléter par symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Comme $\rho'(\theta) = -\sin(\theta) \geqslant 0$, la fonction ρ est simplement décroissante sur $[0, \pi]$, partant de la valeur 2 en 0 (avec une tangente orthoradiale) et arrivant en l'origine pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Bref, c'est une cardioïde tout ce qu'il y a de plus ordinaire.
  Allons-y pour les calculs : $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} = \sqrt{1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}$ $= \sqrt{2(1 + \cos(\theta))} = \sqrt{4\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ en utilisant la formule de duplication $\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) - 1$. On peut ensuite écrire $\alpha = \theta + V$, avec $\tan(V) = \dfrac{\rho}{\rho'} = \dfrac{1 + \cos(\theta)}{-\sin(\theta)}$. Allez, soyons astucieux pour éviter de dériver : $\tan(V) = \dfrac{2\cos^2(\frac{\theta}{2})}{-2\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})} = -\dfrac{1}{\tan(\frac{\theta}{2})} = \tan\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)$. On peut donc poser $\alpha = \dfrac{3\theta + \pi}{2}$, et $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = \dfrac{3}{2}$. On en déduit la courbure $c = \dfrac{\frac{d\alpha}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}} = \dfrac{3}{4\cos(\frac{\theta}{2})}$, puis le rayon de courbure $R = \dfrac{4}{3}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$. Restent à déterminer les vecteurs du repère de Frénet : $\overrightarrow{T} = -\dfrac{\sin(\theta)}{2\cos(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{u_\theta} + \dfrac{1 + \cos(\theta)}{2\cos(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{v_\theta}$, et $\overrightarrow{N} = -\dfrac{1 + \cos(\theta)}{2\cos(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{u_\theta} - \dfrac{\sin(\theta)}{2\cos(\frac{\theta}{2})}\overrightarrow{v_\theta}$. On en déduit que I a pour coordonnées dans le repère $(\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{v_\theta})$: $\left(1 + \cos(\theta) - \dfrac{2}{3}(1 + \cos(\theta)), -\dfrac{2}{3}\sin(\theta)\right)$. Revenons dans le repère cartésien usuel : $\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{3}(1 + \cos(\theta))\cos(\theta)\overrightarrow{i} + \dfrac{1}{3}(1 + \cos(\theta))\sin(\theta)\overrightarrow{j} + \dfrac{2}{3}\sin^2(\theta)\overrightarrow{i} - \dfrac{2}{3}\sin(\theta)\cos(\theta)\overrightarrow{j}$, soit $I = \left(\dfrac{1}{3}\cos(\theta) + \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}\cos^2(\theta), \dfrac{1}{3}\sin(\theta)(1 + \cos(\theta) - 2\cos(\theta)\right)$ $= \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}(1 - \cos(\theta))\cos(\theta); \dfrac{1}{3}(1 - \cos(\theta))\sin(\theta)\right)$. On peut constater que dans le repère d'origine $A\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$ (pour se débarasser de la constante dans la première coordonnée), I a pour coordonnées $\dfrac{1}{3}((1 - \cos(\theta))\cos(\theta), (1 - \cos(\theta)\sin(\theta))$. Autrement dit, $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}(1 - \cos(\theta))\overrightarrow{u_\theta} = \dfrac{1}{3}(1 + \cos(\pi - \theta))\overrightarrow{u_\theta}$. On reconnait, à un facteur $\dfrac{1}{3}$ près, l'équation dont on est partis. Autrement dit, la développée de notre cardioïde est également une cardioïde homothétisée d'un rapport $\dfrac{1}{3}$, symétrisée par rapport à l'axe des ordonnées (car l'angle est passé de θ à $\pi - \theta$) et translatée pour avoir sa « pointe » située en A). On voir nettement mieux sur une figure (en rouge la cardioïde initiale, en bleu la cardioïde développée, en vert et en rose deux points de la courbe avec les tangentes, normales, centres de courbures et cercles osculateurs correspondants) :



- Pour les calculs, paramétrons notre ellipse par le paramétrage classique $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos(t) \\ y(t) & = & 2\sin(t) \end{array}\right.$. On ne va pas s'embêter à étudier quoi que ce soit pour une ellipse, passons directement aux calculs. Signalons quand même que $x'(t) = -\sin(t)$ et $y'(t) = 2\cos(t)$, ce qui permet de calculer $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{\sin^2(t) + 4\cos^2(t)}$. On en déduit les vecteurs du repère de Frénet : $\overrightarrow{T} = \left(-\dfrac{\sin(t)}{\sqrt{\sin^2(t)+4\cos^2(t)}}, \dfrac{2\cos(t)}{\sqrt{\sin^2(t)+4\cos^2(t)}}\right)$ et $\overrightarrow{N} = \left(-\dfrac{2\cos(t)}{\sqrt{\sin^2(t)+4\cos^2(t)}}, -\dfrac{\sin(t)}{\sqrt{\sin^2(t)+4\cos^2(t)}}\right)$. On peut maintenant passer au calcul de la courbure : $\tan(\alpha) = \dfrac{y'}{x'} = -\dfrac{2\cos(t)}{\sin(t)} = -\dfrac{2}{\tan(t)} = 2\tan\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right)$. On en déduit en dérivant que $(1 + \tan^2(\alpha))\dfrac{d\alpha}{dt} = 2\left(1 + \tan^2\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$. Comme $1 + \tan^2(\alpha) = 1 + 4\tan^2\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right)$, alors $\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{2 + 2\frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)}}{1 + 4\frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)}} = \dfrac{2}{\sin^2(t) + 4\cos^2(t)}$. On peut alors enchaîner sur le calcul de la courbure $c = \dfrac{2}{(\sin^2(t) + 4\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}}$, puis le rayon de courbure $R = \dfrac{1}{2}(\sin^2(t) + 4\cos^2(t))^{\frac{3}{2}}$. On peut alors déterminer les coordonnées du centre de courbure I : $\left(\cos(t) - (\sin^2(t) + 4\cos^2(t))\cos(t), 2\sin(t) - \dfrac{1}{2}(\sin^2(t) + 4\cos^2(t))\sin(t)\right)$. Comme $\sin^2(t) + 4\cos^2(t) = 1 + 3\cos^2(t) = 4 - 3\sin^2(t)$, on peut simplifier tout ça en $I = \left(-3\cos^3(t), \dfrac{3}{2}\sin^3(t)\right)$, et on peut reconnaitre dans la courbe parcourue par les centres de courbure l'image d'une astroïde par une affinité de rapport $\dfrac{1}{2}$ dans la direction de l'axe des ordonnées (puisqu'au facteur $\dfrac{1}{2}$ près et à une symétrie près par rapport à l'axe des abscisses qui ne change rien, on a du $3\cos^3(t)$ et du $3\sin^3(t)$, ce qui est le paramétrage d'une astroïde). Allez, un beau schéma pour conclure :



M'
N'
N
M