Feuille d'exercices n°19 : Étude métrique des courbes planes

PTSI B Lycée Eiffel

11 juin 2013

Exercice 1 (*)

Pour chacune des courbes paramétrées suivantes, déterminer la longueur de la courbe, le repère de Frénet en chaque point, et le centre de courbure :

1. $\begin{cases} x(t) &= 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) &= 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$
2. $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \\ y(t) &= \dfrac{2t}{(1+t^2)^2} \end{cases}$

Exercice 2 (**)

Calculer la longueur et la courbure de chacune des courbes polaires suivantes (on pourra évidemment donner une allure de chacune de ces courbes) :

1. $\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$ (en éliminant le point singulier situé à l'origine du repère)
2. $\rho = 3\theta$
3. $\rho = \cos^3\left(\dfrac{\theta}{3}\right)$
4. $\rho = \text{th}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

Exercice 3 (**)

On considère un hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ (d'équation $xy = 1$) et M un point de l'hyperbole. La normale à $\mathcal{H}$ au point M recoupe $\mathcal{H}$ en un second point N. Montrer, en notant I le centre de courbure au point M, que $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{MI}$.

Exercice 4 (***)

La courbe développée d'un arc paramétré est la courbe obtenue en prenant le lieu de ses centres de courbure. Déterminer la développée des courbes suivante :

- cardioïde d'équation polaire $\rho = 1 + \cos(\theta)$
- ellipse d'équation cartésienne $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$