# Feuille d'exercices n°12 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

22 février 2013

## Exercice 1 (*)

1. Soit donc une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a alors $AB = \begin{pmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ d & e & f \end{pmatrix}$.
   Pour que la matrice $AB$ soit nulle, il faut donc avoir $d = e = f = 0$, puis $a = b = c = 0$. Autrement dit, les deux premières lignes de $B$ doivent être nulles, et la troisième est quelconque.
2. D'après la question précédente, $C$ doit être de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Si on effectue le produit $CA$ pour une telle matrice, on obtient $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g+2h & 2g+h+i & 0 \end{pmatrix}$. Pour que ce produit soit nul, il faut donc avoir $g = -2h$ et $i = -2g - h = 3h$, soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2h & h & 3h \end{pmatrix}$, le réel $h$ étant quelconque.

## Exercice 2 (* à **)

- Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on calcule $AM = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3t & 2z+4t \end{pmatrix}$. Pour que les deux matrices soient égales, il faut que leurs coefficients soient égaux deux à deux, ce qui nous amène à résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2z & = & x & + & 3y \\ y & + & 2t & = & 2x & + & 4y \\ 3x & + & 4z & = & z & + & 3t \\ 3y & + & 4t & = & 2z & + & 4t \end{array}\right.$$

  Les deux équations extrêmes sont équivalentes à $z = \dfrac{3}{2}y$, et les deux du milieu se ramènent alors à la même équation $x + z = t$. Les solutions sont donc tous les quadruplets de la forme $\left\{x, y, \dfrac{3}{2}y, x + \dfrac{3}{2}y\right\}$, où $x$ et $y$ sont deux réels quelconques. Autrement, la matrice $M$ est de la forme $M = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{3}{2}y & x + \frac{3}{2}y \end{pmatrix}$.
- Posons donc $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On calcule $MB = \begin{pmatrix} a+3b-2c & -b+c & a+2b-c \\ d+3e-2f & -e+f & d+2e-f \\ g+3h-2i & -h+i & g+2h-i \end{pmatrix}$ et

$BM = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ 3a-d+2g & 3b-e+2g & 3c-f+2i \\ -2a+d-g & -2b+e-h & -2c+f-i \end{pmatrix}$, ce qui donne le sublimissime système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a & + & 3b & - & 2c & = & a & & & + & g \\ & - & b & + & c & = & b & & & + & h \\ a & + & 2b & - & c & = & c & & & + & i \\ d & + & 3e & - & 2f & = & 3a & - & d & + & 2g \\ & - & e & + & f & = & 3b & - & e & + & 2h \\ d & + & 2e & - & f & = & 3c & - & f & + & 2i \\ g & + & 3h & - & 2i & = & -2a & + & d & - & g \\ & - & h & + & i & = & -2b & + & e & - & h \\ g & + & 2h & - & i & = & -2c & + & f & - & i \end{array}\right.$$

Pour résoudre ce genre de système a priori immonde, il vaut mieux commencer par tout exprimer en fonction des coefficients de la première ligne $a$, $b$ et $c$. Les trois premières équations donnent ainsi $g = 3b - 2c$ ; $h = c - 2b$ et $i = a + 2b - 2c$. Ensuite, la huitième équation donne $e = 2b + i = a + 4b - 2c$, la dernière équation donne $f = g + 2h + 2c = -b + 2c$ ; et la sixième $d = 2a + 2g + 3h - 2i = -4b + 3c$. Il reste trois équations à traiter, en remplaçant chaque variable par l'expression obtenue : la quatrième devient $-4b + 3c + 3a + 12b - 6c + 2b - 4c = 3a+4b-3c+6b-4c$, soit $3a+10b-7c = 3a+10b-7c$, qui est toujours vérifiée ; la cinquième donne $-a-4b+2c-b+2c = 3b-a-4b+2c+2c-4b$, soit $-a-5b+4c = -a-5b+4c$ qui est également toujours vrai ; et enfin la septième donne $3b-2c+3c-6b-2a-4b+4c = -2a-4b+3c-3b+2c$, soit $-2a - 7b + 5c = -2a - 7b + 5c$, qui est encore une fois toujours vraie. Les réels $a$, $b$ et $c$ peuvent donc être choisis quelconques, et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -4b+3c & a+4b-2c & -b+2c \\ 3b-2c & c-2b & a+2b-2c \end{pmatrix}$.

- C'est évidemment le gag de la liste : toutes les matrices (carrées d'ordre $n$) commutent avec $I_n$.
- En notant $M$ une matrice carrée quelconque d'ordre 3 (mêmes notations que pour la matrice $B$), on trouve $MC = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}$ et $CM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On obeitnt donc les conditions $b = h = d = f = 0$, soit $M = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & i \end{pmatrix}$.

Si une matrice $M$ commute avec toutes les matrices diagonales, elle commute en particulier avec la matrice ayant un unique coefficient non nul $a_{ii} = 1$. Or, la multiplication à gauche par cette matrice ne conserve que la colonne numéro $i$ de la matrice $M$, et la multiplication ne conserve que la ligne numéro $i$. Si on veut que les deux soient égales, tous les coefficients de la ligne et de colonne numéro $i$ doivent être nuls, à l'exception du coefficient diagonal $m_{ii}$ qui est commun aux deux matrices. En faisant ce calcul avec toutes les valeurs possibles de $i$, on se rend donc compte que la matrice $M$ est nécessairement diagonale. Réciproquement, une matrice diagonale commute avec toutes les autres matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour le cas des matrices symétriques, ce n'est en fait pas vraiment plus dur. Toutes les matrices diagonales étant symétriques, la matrice $M$ doit d'après ce qui précède être diagonale. Mais cette fois-ci, ça ne suffit pas. Prenons donc comme matrice diagonale particulière la matrice vérifiant $a_{ij} = a_{ji} = 1$ (pour des valeurs distinctes de $i$ et de $j$), et ayant tous ses autres coefficients nuls. Quand on multiplie cette matrice à gauche par une matrice diagonale ayant pour coefficients diagonaux $\lambda_1$, …, $\lambda_n$, il ne reste comme coefficients non nuls que $\lambda_i$ en position $(i, j)$ et $\lambda_j$ en position $(j, i)$. Au contraire, quand on fait le produit à droite, $\lambda_i$ se trouve en position $(j, i)$ et $\lambda_j$ en position $(i, j)$. Si on veut que les deux matrices soient égales, on doit avoir $\lambda_i = \lambda_j$. Comme cela doit être vraipour toutes les valeurs de $i$ et de $j$, tous les coefficients diagonaux de $M$ sont en fait égaux, ce qui signifie qu'il existe un réel $\lambda$ tel que $M = \lambda I$. Réciproquement, une telle matrice commute certainement avec toutes les matrices symétriques puisqu'elle commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

## Exercice 3 (*)

C'est en fait très simple, le produit est symétrique si $AB = {}^t(AB)$, soit $AB = {}^tB\,{}^tA$. Comme les deux matrices sont supposées symétriques, cela revient à dire que $AB = BA$, autrement dit que les matrices commutent.

## Exercice 4 (**)

Prouvons la formule donnée par récurrence : pour $k = 0$, c'est évident : $AI - IA = 0$. Supposons-là vérifiée au rang $k$, alors $AB^{k+1} - B^{k+1}A = AB^kB - B^{k+1}A = (AB^k - B^kA)B + B^kAB - B^kBA = kB^kB + B^k(AB - BA) = kB^{k+1} + b^kB = (k+1)B^{k+1}$, ce qui prouve la formule au rang $k+1$. Par principe de récurrence, la formule est donc vrai pour tout entier $k$. Par linéarité de la trace, on a alors $\mathrm{Tr}(kB^k) = \mathrm{Tr}(AB^k) - \mathrm{Tr}(B^kA) = 0$ puisque le calcul de la trace d'un produit ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue ce produit. On en déduit que $\mathrm{Tr}(B^k) = 0$.

## Exercice 5 (**)

Commençons par prendre la trace des deux côtés de l'équation : $\mathrm{Tr}(X) + \mathrm{Tr}(X)\,\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$, une condition nécessaire est donc $\mathrm{Tr}(X)(1 + \mathrm{Tr}(A)) = \mathrm{Tr}(B)$. Si $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$, on en déduit que $\mathrm{Tr}(X) = \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}$. Par ailleurs, on doit avoir $X = B - \lambda A$, avec en l'occurence $\lambda = \mathrm{Tr}(X)$. Considérons donc une matrice de la forme $X = B - \lambda A$, elle vérifie $\mathrm{Tr}(X) = \mathrm{Tr}(B) - \lambda\,\mathrm{Tr}(A)$. On doit donc avoir, pour qu'une telle matrice soit solution, $\mathrm{Tr}(B) - \lambda\,\mathrm{Tr}(A) = \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}$, soit $\lambda\,\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)\left(1 - \dfrac{1}{1 + \mathrm{Tr}(A)}\right) = \mathrm{Tr}(B) \times \dfrac{\mathrm{Tr}(A)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}$, donc $\lambda = \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}$ (sauf si $\mathrm{Tr}(A) = 0$). La seule solution possible est donc $X = B - \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}A$. On vérifie sans problème qu'une telle matrice est effectivement solution (unique, donc) du problème. Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, on doit simplement avoir $\mathrm{Tr}(X) = 0$, ce qui sera toujours le cas lorsque $X = B - \lambda A$. L'équation de départ s'écrit alors $B - \lambda A = B$, donc on doit tout de même avoir $\lambda = 0$ et la solution unique est $X = B$. Enfin, si $\mathrm{Tr}(A) = -1$, la condition donnée initialement ne peut être vérifiée que si $\mathrm{Tr}(B) = 0$. Dans le cas contraire, il ne peut pas y avoir de solution à l'équation. Si $\mathrm{Tr}(A) = -1$ et $\mathrm{Tr}(B) = 0$, en posant $X = B - \lambda A$, on aura $\mathrm{Tr}(X) = \lambda$, donc l'équation s'écrit $B - \lambda A + \lambda A = B$. Cette condition est manifestement vérifiée quelle que soit la valeur de $\lambda$, c'est donc le seul cas où on a une infinité de solutions, en l'occurence toutes les matrices de la forme $B - \lambda A$, pour $\lambda$ parcourant $\mathbb{R}$.

## Exercice 6 (***)

1. On calcule facilement $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$. Rappelons la méthode la plus simple pour trouver ensuite le polynôme annulateur. On peut toujours le prendre unitaire et chercher deux constantes telles que $A^2 = \alpha A + \beta I$. Le coefficient $\beta$ est simplement le coefficient de proportionnalité entre les coefficients non diagonaux de $A$ et de $A^2$, ici 5. Il ne reste alors plus qu'à constater que $A^2 - 5A = -4I$, soit $A^2 - 5A + 4I = 0$. Le polynôme recherché est donc $P = X^2 - 5X + 4$.
2. En reprenant l'égalité obtenue à la question précédente, $A(A - 5I) = -4I$ ou encore $A\left(-\dfrac{1}{4}A + \dfrac{5}{4}I\right) = I$. La matrice $A$ est donc inversible, d'inverse $A^{-1} = \dfrac{5}{4}I - \dfrac{1}{4}A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3. Le polynôme se factorise immédiatement sous la forme $(X-1)(X-4)$ puisque 1 est racine évidente (mais si vous préférez perdre votre temps à calculer un discriminant, naturemment, personne ne vous en empêchera). La division euclidienne sera de la forme $X^n = PQ + R$, où $d^\circ(R) < 2$, soit $R = a_nX + b_n$. Évaluons cette égalité pour les racines du polynôme, qui ont l'avantage de vérifier $P(x) = 0$ et donc d'annuler le terme en $PQ$ : $1 = R(1) = a_n + b_n$ ; et $4^n = 4a_n + b_n$. La différence des deux équations donne $3a_n = 4^n - 1$, soit $a_n = \dfrac{4^n-1}{3}$, dont on déduit que $b_n = 1 - a_n = \dfrac{4-4^n}{3}$.
4. D'après la question précédent, $A^n = P(A)Q(A) + R(A)$. Comme $P(A) = 0$, il ne reste que $A^n = a_nA + b_nI = \dfrac{4^n-1}{3}A + \dfrac{4-4^n}{3}I$ (on vérifie aisément que la formule donne une valeur correcte de $A^2$, inutile de préciser les coefficients de $A^n$, ça n'a pas grand intérêt).

## Exercice 7 (**)

On calcule aisément $J^2 = nJ$ (la matrice ne contient que des $n$), puis $J^3 = n^2J$, et on conjecture que $J^k = n^{k-1}J$, ce qui se prouve sans problème par récurrence : c'est vrai au rang 1, et si on le suppose vrai au rang $k$, alors $J^{k+1} = J \times J^k = J \times n^{k-1}J = n^{k-1}J^2 = n^kJ$. On constate que la matrice $A$ dont on cherche les puissances peut s'écrire sous la forme $A = 2I - J$ (où $J$ désigne évidemment ici une matrice carrée d'ordre 3, on aura donc $J^k = 3^{k-1}J$). Les matrices $I$ et $J$ commutant certainement, on peut appliquer la formule du binôme de Newton : $A^n = (2I-J)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} 2^k I^k (-J)^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k (-1)^k 3^{n-k-1}\right) J + 2^nI$ (on est obligés d'isoler le terme numéro $n$ de la somme car la formule pour les puissances de $J$ ne fonctionne pas pour $J^0$). Dans la parenthèse, on reconnait presque une formule du binôme (sur les réels cette fois-ci) à deux détails près : il faudrait sortir un facteur $\dfrac{1}{3}$ pour avoir un $(-2)^k3^{n-k}$, et surtout il manque le fameux terme numéro $n$, qui serait ici égal à $(-2)^n$. On peut donc écrire $A^n = \dfrac{1}{3}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k(-3)^{n-k} - (-2)^n\right) J + 2^nI = 2^nI + \dfrac{(-1)^n - (-2)^n}{3}J$. On vérifie que, pour $n = 1$, on retrouve $A = 2I - J$ ; pour $n = 2$, on devrait avoir $A^2 = 4I - J$, ce qui est effectivement le cas.

## Exercice 8 (**)

Première méthode, qui fonctionnera toujours pour une matrice d'ordre 2 : chercher un polynôme annulateur de degré 2. On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} = 2A - I$. La matrice est donc annulée par le polynôme $P = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, cherchons à écrire la division euclidienne de $X^n$ par $P$, on sait qu'elle sera de la forme $X^n = PQ + a_nX + b_n$. On ne dispose ici que d'une seule racine, qui nous donne la condition $1 = a_n + b_n$. pour en obtenir une deuxième, il faut penser à dériver : $nX^{n-1} = P'Q + pQ' + a_n$, avec $P(1) = P'(1) = 0$, donc $n = a_n$. On trouve donc $a_n = n$ et $b_n = 1 - n$, soit $A^n = nA + (1-n)I$.

Autre possibilité : écrire $A = I + B$, où $B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$. On constate que $B^2 = 0$ (quelle chance !), les matrices $I$ et $B$ commutent évidemment donc, par la formule du binôme de Newton, $A^n = (B+I)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^kI^{n-k} = I + nB$ (tous les termes suivants sont nuls). Comme $B = A - I$, on retrouver $A^n = I + n(A-I) = nA + (1-n)I$.

Allez, une troisième méthode pour la route, on calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = \begin{pmatrix} 13 & -12 \\ 12 & -11 \end{pmatrix}$ et on conjecture pour $A^n$ une matrice de la forme $A^n = \begin{pmatrix} a_n+1 & -a_n \\ a_n & -a_n+1 \end{pmatrix}$. Prouvons cette formule par récurrence : c'est vrai au rang 1 en posant $a_1 = 4$, et en le supposant vérifié au rang $n$, alors $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_n+1 & -a_n \\ a_n & -a_n+1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n+5 & -a_n-4 \\ a_n+4 & -a_n+3 \end{pmatrix}$, ce qui est bien de la forme souhaitée avec $a_{n+1} = a_n + 4$. La suite $(a_n)$ est par ailleurs arithmétique de raison 4, donc $a_n = a_1 + 4(n-1) = 4n$. On en déduit directement que $A^n = \begin{pmatrix} 4n+1 & -4n \\ 4n & -4n+1 \end{pmatrix}$.

## Exercice 9 (***)

1. On commence par un peu de calcul : $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -8 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -18 & 9 & 9 \\ 44 & -18 & -26 \\ -26 & 9 & 17 \end{pmatrix}$.
   Il est désormais facile de vérifier l'égalité demandée.
2. On va bien sûr procéder par récurrence. Notons $P_k$ la propriété « Il existe deux réels $a_k$ et $b_k$ tels que $A^k = a_kA^2 + b_kA$ ». Pour une fois on initialise la récurrence pour $k = 2$ : $P_2$ est bien vérifiée en posant $a_2 = 1$ et $b_2 = 0$ (on a bien $A^2 = 1 \times A^2 + 0 \times A$). Supposons $P^k$ vérifiée, on a alors $A^{k+1} = A \times A^k = A \times (a_kA^2 + b_kA) = a_kA^3 + b_kA^2 = a_k(6A - A^2) + b_kA^2 = (b_k - a_k)A^2 + 6a_kA$, qui est bien de la forme demandée, ce qui achève la récurrence.
3. D'après la question précédente, on a les relations suivantes : $a_{k+1} = b_k - a_k$ et $b_{k+1} = 6a_k$. On a donc $b_k = 6a_{k-1}$ ce qui donne en remplaçant dans la première relation $a_{k+1} = -a_k + 6a_{k-1}$, récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $x^2 + x - 6 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 24 = 25$, et admet donc deux racines $r = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ et $s = \dfrac{-1-5}{2} = -3$. On a donc $a_k = \alpha 2^k + \beta(-3)^k$, avec $a_2 = 4\alpha + 9\beta = 1$ et $a_3 = 8\alpha - 27\beta = -1$. En multipliant la première équation par 2 et en lui retranchant la deuxième, on obtient $45\beta = 3$, soit $\beta = \dfrac{1}{15}$, puis $\alpha = \dfrac{1-9\beta}{4} = \dfrac{1-\frac{3}{5}}{4} = \dfrac{1}{10}$. On a donc $a_k = \dfrac{2^{k-1} - (-3)^{k-1}}{5}$, et $b_k = 6 \times \dfrac{2^{k-2} - (-3)^{k-2}}{5}$.
4. On se contentera d'écrire $A^k = \begin{pmatrix} 6a_k - 2b_k & -3a_k + b_k & -3a_k + b_k \\ -8a_k + 6b_k & 6a_k - 2b_k & 2a_k - 4b_k \\ 2a_k - 4b_k & -3a_k + b_k & a_k + 3b_k \end{pmatrix}$ sans préciser les valeurs. Pour $k = 1$, on obtient avec les formules de la question précédente $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$, ce qui donne $A = 0 \times A^2 + 1 \times A$, ce qui est indiscutablement vrai. Et pour $k = 0$, on obtient $a_0 = \dfrac{1}{6}$ et $b_0 = \dfrac{1}{6}$, et là ça ne marche plus...

## Exercice 10 (**)

Il y a un piège ici : la loi multiplicative sur l'ensemble en question, qu'on va noter $G$, est bien la même que sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais il ne s'agit pas de montrer que $G$ est un sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et pour cause, puisque ce dernier n'est pas un groupe multiplicatif. ce n'est même pas un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R}), \times)$, puisque les matrices de $G$ ne sont pas le moins du monde inversibles. Il faut donc prouver qu'il s'agit d'un groupe en revenant à la définition. On peut tout de même utiliser le fait que $\times$ est associative sur l'ensemble de toutes les matrices pour en déduire qu'elle l'est également sur $G$. Vérifions qu'il s'agit d'une loi interne : $\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3ab & 3ab & 3ab \\ 3ab & 3ab & 3ab \\ 3ab & 3ab & 3ab \end{pmatrix}$, avec $ab \neq 0$ puisque $a \neq 0$ et $b \neq 0$, donc le produit appartient bien à $G$. Remarquons au passage que le produit est commutatif dans $G$. Existe-t-il un élément neutre pour le produit dans $G$ ? Attention encore une fois, il ne s'agit pas de l'élément neutre pour le produit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui n'appartient pas à $G$. Mais en reprenant le calcul précédent, on constate que, pour $b = \dfrac{1}{3}$, $3ab = 1$, donc la matrice ne contenant que des $\dfrac{1}{3}$ est un élément neutre pour le produit. Cela signifie simplement que n'importe quelle matrice de $G$ (mais pas les autres !) ne varie pas quand elle est multiplitée par cette matrice, comme ce serait le cas par ailleurs avec l'identité (et bien d'autres matrices en l'occurence). Reste à chercher des symétriques à nos éléments de $G$ par rapport à l'élément neutre qu'on vient de trouver. Celà revient à chercher une valeur de $b$ pour lequelle $3ab = \dfrac{1}{3}$, il faut donc prendre $b = \dfrac{1}{9a}$, ce qui ne pose pas de problème puisque $a$ est supposé non nul. $(G, \times)$ est donc un groupe, qui est en fait isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \star)$, en posant $x \star y = 3xy$.

# Exercice 11 (**)

L'application est bien définie, l'image de l'élément neutre additif 0 est bien la matrice, l'image de l'élément neutre multiplicatif 1 est bien la matrice identité. Par ailleurs, en notant $f$ l'application, et $z = a + ib$ et $z' = c + id$ deux nombres complexes, $f(z + z') = aI_2 + bJ + cI_2 + dJ = (a + c)I_2 + (b + d)J = f(z) + f(z')$. De plus, $J^2 = -I_2$ (calcul facile), donc $f(z)f(z') = (aI + bJ)(cI + dJ) = acI + (ad + bc)J - bdI = (ac - bd)I + (ad + bc)J = f(zz')$. L'application $f$ est donc un isomorphisme de corps (inutile de vérifier que $E$ est un corps, ça en découle). Notons dans l'énoncé de cet exercice la deuxième apparition du terme incorrect « isomorpisme », je dois vraiment avoir un problème avec ce mot.

# Exercice 12 (***)

Contrairement à l'exercice 10, on est ici en présence d'un sous-groupe multiplicatif de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$. Commençons par constater que, lorsque $\theta = 0$, $M_\theta = I_3$, qui appartient donc à notre ensemble (qu'on va noter $G$ pour faire original). De plus, en remplaçant les $\sin(2\theta)$ par du $2\sin(\theta)\cos(\theta)$ (et pareil pour $\sin(2\varphi)$), On peut calculer les neuf coefficients de $A = M_\theta \times M_\varphi$ un par un (sinon, la matrice prend trop de place !) :

- $a_{11} = \cos^2(\theta)\cos^2(\varphi) - 2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \sin^2(\theta)\sin^2(\varphi) =$
  $(\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi))^2 = \cos^2(\theta + \varphi)$.
- $a_{12} = -2\cos^2(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) - 2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(2\varphi) + 2\sin^2(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) = \sin(2\varphi)(\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)) - \sin(2\theta)\cos(2\varphi) = -\sin(2\varphi)\cos(2\theta) - \sin(2\theta)\cos(2\varphi) = -\sin(2(\theta + \varphi))$.
- $a_{13} = \cos^2(\theta)\sin^2(\varphi) + 2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)$
  $= (\cos(\theta)\sin(\varphi) + \sin(\theta)\cos(\varphi))^2 = \sin^2(\theta + \varphi)$.
- $a_{21} = \cos(\theta)\sin(\theta)\cos^2(\varphi) + \cos(2\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \cos(\theta)\sin(\theta)\sin^2(\varphi) = \dfrac{1}{2}\sin(2\theta)(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) + \dfrac{1}{2}\cos(2\theta)\sin(2\varphi) = \dfrac{1}{2}(\sin(2\theta)\cos(2\varphi) + \cos(2\theta)\sin(2\varphi)) = \dfrac{1}{2}\sin(2(\theta + \varphi)) = \sin(\theta + \varphi)\cos(\theta + \varphi)$.
- $a_{22} = -2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \cos(2\theta)\cos(2\varphi) - 2\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi)$
  $= \cos(2\theta)\cos(2\varphi) - \sin(2\theta)\sin(2\varphi) = \cos(2(\theta + \varphi))$.
- $a_{23} = -a_{21} = -\sin(\theta + \varphi)\cos(\theta + \varphi)$.
- $a_{31} = a_{13} = \sin^2(\theta + \varphi)$.
- $a_{32} = -a_{12} = \sin(2(\theta + \varphi))$.
- $a_{33} = a_{11} = \cos^2(\theta + \varphi)$ (pour ces quatre derniers calculs, les termes n'apparaissent pas dans le même ordre que pour les quatre premiers, mais on reconnait effectivement les mêmes totaux).

On constate donc que $M\theta + M_\varphi = M_{\theta+\varphi} \in G$. Par ailleurs, on déduit facilement de ce même calcul que $M_\theta M_{-\theta} = I$, donc l'inverse de la matrice $M_\theta$ est la matrice $M_{-\theta}$, qui appartient bien à $G$. Ceci suffit à prouver que $G$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Pour le calcul du déterminant de $M_\theta$, on additionne les colonnes 1 et 3, puis on développe suivant la première colonne : $\begin{vmatrix} \cos^2(\theta) & -\sin(2\theta) & \sin^2(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) & \cos(2\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \sin(2\theta) & \cos^2(\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\sin(2\theta) & \sin^2(\theta) \\ 0 & \cos(2\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 1 & \sin(2\theta) & \cos^2(\theta) \end{vmatrix} =$ $1 \times \begin{vmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos^2(\theta) \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} -\sin(2\theta) & \sin^2(\theta) \\ \cos(2\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos(2\theta)\cos^2(\theta) + \frac{1}{2}\sin^2(2\theta) +$ $\frac{1}{2}\sin^2(2\theta) - \cos(2\theta)\sin^2(\theta) = \cos(2\theta)(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) + \sin^2(2\theta) = \cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta) = 1.$

## Exercice 13 (*)

Un peu de motivation, six pivots de Gauss, ça va prendre quelques pages de calcul, mais ça ne peut pas faire de mal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 + 3L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -8 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow -L_2/2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice $A$ est donc inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 9L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow 3L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 18 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/18 \\ L_2 \leftrightarrow L_2/9 \\ L_3 \leftarrow L_3/9 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

La matrice $B$ est donc inversible, et $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice $C$ n'est pas inversible.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & -8 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -4 & -8 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/4 \\ L_2 \leftarrow L_2/4 \\ L_3 \leftarrow L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} \\ -1 & -2 & \frac{5}{4} \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice $D$ est donc inversible, et $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} \\ -1 & -2 & \frac{5}{4} \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_4 \leftarrow L_3 - L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_4 - L_1 \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $E$ est donc inversible, et $E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut tricher un peu pour la matrice $F$ en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, qui ne bougeront de toute façon pas pendant les calculs (sauf pour la toute dernière étape où on divisera la dernière ligne par 3, ce qui fera apparaitre un $\dfrac{1}{3}$ dans le coin inférieur droit de la matrice inverse).

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 + L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftrightarrow L_2/3 \\ L_3 \leftarrow -L_3/2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice $F$ est donc inversible, et $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

## Exercice 14 (**)

Appliquons donc le pivot de Gauss à la matrice $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/2 \\ L_3 \leftarrow L_3/2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice $P$ est bien inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On calcule sans enthousiasme $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, matrice diagonale que nous noterons $D$. On prouve ensuite par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ : c'est vrai pour $n = 1$, puisque $A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PDP^{-1}$, et supposant la formule vérifiée pour $A^n$, on aura $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui achève la récurrence. Donc $A^n = P \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} P^{-1}$, soit $A^n = \begin{pmatrix} \frac{4^n+6^n}{2} & \frac{8^n-6^n}{2} & \frac{8^n-4^n}{2} \\ \frac{4^n-6^n}{2} & \frac{6^n+8^n}{2} & \frac{8^n-4^n}{2} \\ \frac{6^n-4^n}{2} & \frac{8^n-6^n}{2} & \frac{4^n+8^n}{2} \end{pmatrix}$.

## Exercice 15 (**)

Si $A$ est nilpotente, il existe un entier $k$ tel que $A^{k+1} = 0$. Or, on constate que $(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^k) = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 + \cdots + A^k - A^{k+1} = I - A^{k+1} = I$, donc $I - A$ est inversible, d'inverse $I + A + A^2 + \cdots + A^k$. On a $A = I - M$, avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un rapide calcul donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = 0$. D'après ce qui précède, on a donc $A^{-1} = I + M + M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De même on a $B = I - N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et enfin $N^5 = 0$, donc $B^{-1} = I + N + N^2 + N^3 + N^4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette dernière formule laisse supposer qu'on a peut-être pas utilisé la meilleure méthode pour inverser $B$, je vous laisse chercher d'autres façons d'y parvenir plus rapidement si vous le souhaitez.

## Exercice 16 (**)

Ce n'est en fait pas vraiment plus compliqué que pour une matrice d'ordre 3 ou 4, on applique les différentes étapes du pivot mais on peut difficilement les écrire explicitement. En l'occurence, on va faire successivement les opérations élémentaires $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$ ; $L_{n-2} \leftarrow L_{n-2} - L_{n-1}$ ; $L_{n-3} \leftarrow L_{n-3} - L_{n-2}$ ; ... ; $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$. On obtient ainsi la matrice identité. Quand on effectue les mêmes opérations en parallèle à partir de la matrice $I_n$, on transforme successivement les lignes de la matrice : $L_{n-1}$ devient $0 \dots 1 \ \ -1$ ; $L_{n-2}$ devient $0 \dots 1 \ \ -1 \ 1$ ; etc jusqu'à $L_1$ qui devient $1 \ -1 \ 1 \ -1 \dots (-1)^{n-1}$. Finalement, la matrice est inversible (ce n'est pas une surprise puisqu'elle est triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale), d'inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & & & \dots & & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & & \dots & & (-1)^{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & & & \dots & & 0 & 1 & -1 \\ 0 & & & & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Exercice 17 (**)

Soyons fous et faisons le calcul avec le pivot !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_5 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_6 \\ L_6 \leftarrow L_6 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_5 \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_6 \\ L_6 \leftarrow L_6 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -11 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_6 \leftarrow L_2 - 6L_6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 18 & 18 & 24 & 66 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 12 & 1 & -2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad L_6 \leftarrow L_6 + 3L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 36 & 24 & 66 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 12 & 1 & 1 & -5 & 3 & -6 \end{pmatrix} \quad L_6 \leftarrow L_6 + 6L_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 60 & 66 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 12 & 1 & 1 & 1 & -9 & 0 \end{pmatrix} \quad L_6 \leftarrow L_6 + 10L_5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 126 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 22 & 1 & 1 & 1 & 1 & -20 \end{pmatrix} \quad L_5 \leftarrow 21L_5 - L_6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -126 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 126 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 20 & -22 \\ 22 & 1 & 1 & 1 & 1 & -20 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow 21L_4 + L_5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -126 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 126 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 20 & -22 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 20 & -22 \\ 22 & 1 & 1 & 1 & 1 & -20 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 21L_3 + L_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -126 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -126 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 126 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 20 & -22 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 20 & -22 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 20 & -22 \\ 22 & 1 & 1 & 1 & 1 & -20 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 21L_2 + L_3 \\ L_6 \leftarrow -L_6 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -126 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -126 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -126 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -126 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 20 & -22 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 20 & -22 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 20 & -22 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 20 & -22 \\ 22 & -1 & -1 & -1 & -1 & 20 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 21L_2 + L_3$$

Pour la dernière opération, on va faire $L_1 \leftarrow -126L_1 - 2L_2 - 3L_3 - 4L_4 - 5L_5 - 6L_6$ :

$$\begin{pmatrix} -126 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -126 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -126 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -126 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -126 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -126 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 20 & -22 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 20 & -22 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 20 & -22 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 20 & -22 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 20 & -22 \\ -22 & -1 & -1 & -1 & -1 & 20 \end{pmatrix} \quad L_6 \leftarrow L_6 + 3L_3$$

Il ne reste plus qu'à tout diviser par $-126$ pour obtenir le passionnant résultat :

$$A^{-1} = \frac{1}{126} \begin{pmatrix} -20 & 22 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -20 & 22 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -20 & 22 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -20 & 22 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -20 & 22 \\ 22 & 1 & 1 & 1 & 1 & -20 \end{pmatrix}$$

## Exercice 18 (**)

- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ -x & - & 3y & + & 5z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & -1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & - & y & + & 8z & = & 3 \\ & & y & + & 2z & = & 2 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & - & y & + & 8z & = & 3 \\ & & & & 10z & = & 5 \end{array}\right.$

Il ne reste plus qu'à remonter le système triangulaire obtenu : $z = \dfrac{1}{2}$ ; puis $y = 8z - 3 = 1$ et enfin $x = 1 - 2y - 3z = -\dfrac{5}{2}$, soit $\mathcal{S} = \left\{\left(-\dfrac{5}{2}; 1; \dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & -3 \\ & & 3y & - & 5z & = & -1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 3L_2 - L_3 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & -3 \\ & & & & 8z & = & -8 \end{array}\right.$

On remonte : $z = -1$ puis $y = -3 - z = -2$ et enfin $x = \dfrac{1 + y - 3z}{2} = 1$, donc $\mathcal{S}\{(1; -2; -1)\}$

- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & -1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ & & 3y & + & z & = & 5 \\ & & 5y & - & z & = & 3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 5L_2 - 3L_3 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ & & 3y & + & z & = & 5 \\ & & & & 8z & = & 16 \end{array}\right.$

On remonte : $z = 2$ puis $y = \dfrac{5-2}{3} = 1$ et $x = 2 - 2y - z = -2$, soit $\mathcal{S} = \{(-2;1;2)\}$.

- Il vaut mieux ici commencer par permuter les lignes pour ne pas avoir de pivot dépendant de $m$ (ce qui empêche de faire des opérations sur les lignes en les multipliant par des coefficients susceptibles d'être nuls).

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & + & mz & = & m^2 & \\ mx & + & y & + & z & = & 1 & L_2 \leftarrow mL_1 - L_2 \\ x & + & my & + & z & = & m & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & y & + & mz & = & m^2 & \\ & & (m-1)y & + & (m^2-1)z & = & m^3-1 & \\ & & (1-m)y & + & (m-1)z & = & m^2-m & L_3 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & mz & = & m^2 \\ & & (m-1)y & + & (m^2-1)z & = & m^3-1 \\ & & & & (m^2+m-2)z & = & m^3+m^2-m-1 \end{array}\right.$$

Le système est de Cramer si $m \neq 1$ (à cause du coefficient devant $y$), et si $m^2+m-2 \neq 0$. Comme $m^2+m-2 = (m-1)(m+2)$ (il y a une racine évidente), les seules valeurs problématiques sont 1 et $-2$. Si $m \notin \{-2;1\}$, on remonte le système pour trouver $z = \dfrac{m^3+m^2-m-1}{m^2+m-2} = \dfrac{(m+1)(m^2-1)}{(m-1)(m+2)} = \dfrac{(m+1)^2}{m+2}$ ; puis $y = \dfrac{m^3-1-(m^2-1)z}{m-1} = m^2+m+1-(m+1)z = m^2+m+1-\dfrac{(m+1)^3}{m+2}$ ; et enfin $x = m^2 - mz - y = -m-1-\dfrac{m(m+1)^3}{m+2}$ (valeurs sans aucun intérêt, d'ailleurs).

Regardons plutôt ce qui se passe dans les cas particuliers. D'abord si $m = 1$, le système triangulaire se réduit à l'unique équation $x+y+z = 1$ (effectivement, dans le système initial, les trois équations sont alors identiques), donc $\mathcal{S} = \{(x, y, 1-x-y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Dans le cas où $m = -2$, la dernière équation devient $0 = -3$, le système n'a alors pas de solution.

- Là encore, on va se débrouiller pour utiliser des pivots constants :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcll} ax & + & by & + & z & = & 1 & L_1 \leftarrow L_1 - aL_3 \\ x & + & aby & + & z & = & b & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ x & + & by & + & az & = & 1 & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} & & b(1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 1-a & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 & \\ x & + & by & + & az & = & 1 & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & (2-a-a^2)z & = & b-a \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$$

On va avoir un système qui n'est pas un système de Cramer si $b = 0$, $a = 1$ ou $a = -2$ (cf le système précédent pour ces valeurs, le coefficient devant $z$ est le même). Dans tous les autres cas, on a une solution unique dont l'expression ne présente aucun intérêt : $z = \dfrac{b-a}{2-a-a^2}$ ; $y = \dfrac{b-1}{b(a-1)} + \dfrac{b-a}{b(2-a-a^2)}$ ; et $x = 1 - \dfrac{b-1}{a-1} + \dfrac{b-a}{2+a}$.

Regardons les cas particuliers : si $b = 0$, l'inconnue $y$ disparait tout simplement du système, et la deuxième équation donne $x + z = 0$. Or, en additionnant les deux équation extrêmes, on trouve $(a+1)(x+z) = 2$, ce qui est impossible si $x + z = 0$. Il n'y a donc pas de solution.

Si $a = 1$, les membres de gauche des trois équations sont identiques égaux à $x + by + z$, mais celui de droite vaut $b$ dans la deuxième équation et 1 dans les deux autres. Si $b \neq 1$, il n'y a donc pas de solution, et si $b = 1$, les solutions sont de la forme $(x, y, 1-x-y)$.

Si $a = -2$, la somme des trois équations donne $0 = b+2$, il faut donc avoir $b = -2$ également.

On doit alors résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & 4y & + & z & = & -2 \\ x & - & 2y & - & 2z & = & 1 \end{array}\right.$

La différence des deux premières équations donne alors $-3x - 6y = 3$, soit $x = -1 - 2y$ ; la différence des deux dernières donne $-6y - 3z = 3$, soit $z = x = -1 - 2y$. On ne peut pas faire mieux, donc $\mathcal{S} = \{(-1 - 2y, y, -1 - 2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

- $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ x & + & y & + & 2z & + & 7t & + & 3w & = & 19 \\ -x & + & 4y & - & 5z & + & 12t & - & 4w & = & 33 \\ 2x & - & 4y & + & 5z & + & t & & & = & -12 \\ 4x & - & 3y & + & 4z & + & 11t & + & 9w & = & 15 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_4 \leftarrow 2L_1 - L_4 \\ L_5 \leftarrow 4L_1 - L_5 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ & & 2y & & & + & 4t & + & 2w & = & 16 \\ & & 3y & - & 3z & + & 15t & - & 3w & = & 36 \\ & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\ & - & y & + & 4z & + & t & - & 5w & = & -3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 3L_4 - L_3 \\ \\ L_5 \leftarrow 4L_4 + L_5 \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ & & 2y & & & + & 4t & + & 2w & = & 16 \\ & & 3y & & & & & + & 9w & = & 18 \\ & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\ & & 7y & & & + & 21t & + & 3w & = & 69 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 21L_2 - 4L_5 \\ \\ \\ \\ \end{array}$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ & & 14y & & & & & + & 30w & = & 60 \\ & & 3y & & & & & + & 9w & = & 18 \\ & & 2y & - & z & + & 5t & + & 2w & = & 18 \\ & & 7y & & & + & 21t & + & 3w & = & 69 \end{array}\right.$

Plutôt que de faire un dernier pivot, constatons que la troisième équation donne $3w = 6 - y$, ce qui, reporté dans la deuxième, permet d'obtenir $14y + 10(6 - y) = 60$, soit $4y = 0$. On a donc $y = 0$, puis $3w = 6$ donc $w = 2$ ; $21t = 69 - 3 \times 2 - 7 \times 0 = 63$ donc $t = 3$ ; $z = 2 \times 0 + 5 \times 3 + 2 \times 2 - 18 = 1$ et enfin $x = 3 + 0 - 2 \times 1 - 3 \times 3 - 2 = -10$. Le système admet donc une solution unique : $\mathcal{S} = \{(-10; 0; 1; 3; 2)\}$.

## Exercice 19 (* à **)

- Pour le premier, on peut développer directement suivant la première colonne : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 - 24 + 2 \times 12 = 2$. Encore plus rapide : on fait $L_3 - 2L_1$ pour obtenir 0 0 2 sur la dernière ligne, on développe et on a quasiment directement 2.
- Pour le deuxième, on additionne les deux premières colonnes, puis on développe suivant la première colonne : $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times (-2) = -6$.
- Plein de possiblités ici, mais le plus rapide est encore de développer directement par rapport à la deuxième ligne : $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2(10 - 2) - (-4 - 15) = -16 + 19 = 3$.
- On peut ici remplacer $L_2$ et $L_3$ par leur somme avec $L_1$ puis développer suivant la première colonne : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 7 = -22$.
- Cette fois-ci, différence des deux dernières lignes avec la première puis développement suivant la première colonne, avec entre les deux une petite factorisation sur les deux dernières

lignes : $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c+a-b-a) = (b-a)(c-a)(c-b)$.

- Pour le dernier, curieusement, pas vraiment de truc évident, le plus rapide est de développer suivant la première ligne et surtout de bien connaître ses formules de trigo : $D = \begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix} = \cos(a-b)(\cos(b+c)\sin(c+a) - \cos(c+a)\sin(b+c)) - \cos(b-c)(\cos(a+b)\sin(c+a) - \cos(c+a)\sin(a+b)) + \cos(c-a)(\cos(a+b)\sin(b+c) - \cos(b+c)\sin(a+b))$. On reconnait dans les parenthèses des formules d'addition de sinus pour obtenir $D = \cos(a-b)\sin(a-b) + \cos(b-c)\sin(b-c) + \cos(c-a)\sin(c-a) = \dfrac{1}{2}(\sin(2(a-b)) + \sin(2(b-c)) + \sin(2(c-a)))$. On peut encore simplifier en utilisant les transformations somme-produit : $\sin(2(a-b)) + \sin(2(b-c)) = 2\sin\left(\dfrac{a-b+b-c}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b-b+c}{2}\right) = 2\sin(a-c)\cos(a+c-2b)$. On en déduit (en redéveloppant le troisième sinus) que $D = \sin(a-c)\cos(a+c-2b) + \sin(c-a)\cos(c-a) = \sin(a-c)(\cos(a+c-2b) - \cos(c-a))$. Allez, un dernier coup de somme-produit : $\cos(a+c-2b) - \cos(c-a) = -2\sin\left(\dfrac{a+c-2b+c-a}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a+c-2b-c+a}{2}\right) = -2\sin(c-b)\sin(a-b)$. Finalement, $D = 2\sin(a-b)\sin(a-c)\sin(b-c)$.