Feuille d'exercices n°12 : Calcul matriciel

PTSI B Lycée Eiffel

22 février 2013

Exercice 1 (*)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer toutes les matrices B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.
2. Déterminer toutes les matrices C dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA = 0$.

Exercice 2 (* à **)

Déterminer toutes les matrices qui commutent avec chacune des matrices suivantes :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; I_n ; $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les matrices qui commutent avec toutes les matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer les matrices qui commutent avec toutes les matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (*)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit encore symétrique (très peu de calculs nécessaires).

Exercice 4 (**)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB - BA = B$. Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $AB^k - B^kA = kB^k$, et en déduire la valeur de $\mathrm{Tr}(B^k)$.

Exercice 5 (**)

On fixe A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $X + \mathrm{Tr}(X)A = B$, où X est une matrice inconnue dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6 (***)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer un polynôme de degré 2 annulant la matrice A.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse (sans faire le pivot de Gauss).

3. En utilisant les racines du polynôme trouvé à la question 1, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par ce polynôme, pour un entier $n \geqslant 2$.
4. En déduire la valeur de A^n.

Exercice 7 (**)

On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer J^2 puis déterminer les puissances de matrice J. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 (**)

Déterminer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ (au moins deux méthodes possibles).

Exercice 9 (***)

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^3 = 6A - A^2$.
2. Montrer qu'il existe deux suites a_k et b_k telles que $A^k = a_k A^2 + b_k A$ (pour $k \geqslant 2$).
3. Trouver des relations de récurrence pour a_k et b_k et en déduire leurs valeurs.
4. En déduire l'expression de A^k. Reste-t-elle valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$?

Exercice 10 (**)

Montrer que l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}^*$, est un groupe multiplicatif.

Exercice 11 (**)

En notant $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \{aI_2 + bJ \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, montrer que l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $z = a + ib \mapsto aI_2 + bJ$ est un isomorpisme de corps.

Exercice 12 (***)

Pour tout angle $\theta \in \mathbb{R}$, on note $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & -\sin(2\theta) & \sin^2(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) & \cos(2\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin^2(\theta) & \sin(2\theta) & \cos^2(\theta) \end{pmatrix}$. Montrer que l'ensemble des ces matrices forme un groupe multiplicatif lorsque θ parcourt $\mathbb{R}$, et calculer le déterminer de ces matrices.

Exercice 13 (*)

Inverser (lorsque c'est possible) les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 (**)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire les puissances de la matrice A.

Exercice 15 (**)

Soit A une matrice nilpotente. Montrer que $I - A$ est inversible et que son inverse s'écrit sous la forme $I + A + A^2 + \cdots + A^k$. En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et celui de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 (**)

Déterminer l'inverse de la matrice suivante (matrice carrée à n lignes et n colonnes) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 & 1 \\ 0 & & & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 17 (**)

Déterminer l'inverse de la matrice suivante (on peut perdre énormément de temps à appliquer un pivot bête et (très) méchant, on peut aussi chercher des astuces diaboliques à bases de racines sixièmes de l'unité) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 18 (**)

Résoudre chacun des systèmes suivants, en distinguant éventuellement des cas suivants les valeurs des paramètres :

- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ -x & - & 3y & + & 5z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & -1 \end{array}\right.$
- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & 1 \end{array}\right.$
- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & = & -1 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & -1 \end{array}\right.$
- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & m \\ x & + & y & + & mz & = & m^2 \end{array}\right.$
- $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array}\right.$
- $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3t & + & w & = & 3 \\ x & + & y & + & 2z & + & 7t & + & 3w & = & 19 \\ -x & + & 4y & - & 5z & + & 12t & - & 4w & = & 33 \\ 2x & - & 4y & + & 5z & + & t & & & = & -12 \\ 4x & - & 3y & + & 4z & + & 11t & + & 9w & = & 15 \end{array}\right.$

Exercice 19 (* à **)

Calculer les déterminants suivants (en essayant d'utiliser des développements suivant les lignes ou les colonnes ou des combinaisons pour faire apparaitre des 0 ; vous pouvez toujours vérifier cos résultats ensuite avec Sarrus) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix}$$