Feuille d'exercices n°15 : correction

PTSI B Lycée Eiffel

12 avril 2013

Exercice 1 (* à **)

Pour simplifier la présentation des calculs, on présentera en général les calculs de primitives sous la forme $\displaystyle\int_a^x$ en essaytant de choisir une valeur de a annulant la primitive (histoire de ne pas garder de constantes inutiles dans la primitive). Les calculs seront faits lignes par ligne :

- Ici, mieux vaut directement donner $F(x) = \dfrac{1}{4(1-2x)^2}$, primitive valable sur chacun des deux intervalles de définition de f, à savoir $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.
- $F(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(t)\sin(t)\ dt = \frac{1}{2}\sin^2(x)$.
- On fait une intégration par parties en posant $u(t) = \arctan(t)$ et $v'(t) = 1$, donc $u'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $v(t) = t$, donne $F(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan(t)\ dt = [t\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\ dt = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
- $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\ dt = \int_0^x \frac{2}{e^t + e^{-t}}\ dt = \int_0^x \frac{2e^t}{e^{2t}+1}\ dt$. Effectuons le changement de variable $u = e^t$ (donc $t = \ln(u)$), ce qui donne $du = e^t dt$, et transforme notre intégrale en $F(x) = \displaystyle\int_1^{e^x} \frac{2}{u^2+1}\ du = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$ (qui est bien la primitive s'annulant en 0, et valable sur $\mathbb{R}$ tout entier, de f). Les plus curieux constateront (par exemple en appliquant les règles de Bioche) que d'autres changements de variables sont possibles, qui donnent de façon intéressante d'autres expressions de nos primitives. Par exemple, en posant directement $u = \mathrm{sh}(t)$ dans l'intégrale initiale, $du = \mathrm{ch}(t)dt$, et $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{ch}^2(t)}\ dt = \int_0^{\mathrm{Argsh}\,x} \frac{1}{1+u^2}\ du$ puisque $\mathrm{ch}^2(t) = 1 + \mathrm{sh}^2(t)$. On trouve alors $F(x) = \arctan(\mathrm{Argsh}(x))$, qui est donc toujours égal à $2\arctan(e^x) - \dfrac{\pi}{2}$ (avouez que ça n'a rien d'évident). Les plus courageux essaieront le changement $u = \mathrm{th}\left(\dfrac{t}{2}\right)$ pour une troisième expression de cette même fonction.
- $F(x) = \displaystyle\int_0^x t\sin(t)\sin^2(t)\ dt = \int_0^x t\sin(t)(1-\cos^2(t))\ dt = \int_0^x t\sin(t)\ dt - \int_0^x t\sin(t)\cos^2(t)\ dt$. Coupons l'intégrale en deux pour alléger un peu la rédaction : $F_1(x) = \displaystyle\int_0^x t\sin(t)\ dt = [-t\cos(t)]_0^x + \int_0^x \cos(t)\ dt = -x\cos(x) + \sin(x)$ par intégration par parties. Passons au deuxième morceau, où on va aussi pouvoir faire une IPP en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = -\sin(t)\cos^2(t)$, soit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \dfrac{1}{3}\cos^3(t)$ (coup de pot, cette primitive !), ce qui donne $F_2(x) = \displaystyle\int_0^x -t\sin(t)\cos^2(t) = \left[\frac{t}{3}\cos^3(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{3}\cos^3(t)\ dt = \frac{x}{3}\cos^3(x) - \frac{1}{3}\int_0^x \cos(t)(1-\sin^2(t))\ dt =$

$\frac{x}{3}\cos^3(x) - \frac{1}{3}\sin(x) + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\sin^3(x)$. Finalement, on trouve brillamment $F(x) = \frac{x}{3}\cos^3(x) - x\cos(x) + \frac{1}{9}\sin^3(x) + \frac{2}{3}\sin(x)$.

- On ne se fatigue surtout pas, f est à peu près de la forme $u'\sqrt{u}$, qui a une primitive proportionnelle à $u^{\frac{3}{2}}$. Ici, on trouve donc directement $F(x) = \frac{1}{6}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}$ (définie sur $\mathbb{R}$ tout comme f).
- On a vraiment très envie d'effectuer le changement de variables $u = \ln(t)$, ce qui donne $du = \frac{1}{t}dt$ (ça tombe bien, $\frac{1}{t}$ se met facilement en facteur dans l'intégrale) pour trouver $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t(1+\ln^2(t))}\,dt = \int_0^{\ln(x)} \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan(\ln(x))$, valable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (on pouvait bien sûr remarquer directement que la fonction f est la dérivée de la fonction obtenue).
- Effectons deux IPP successives en dérivant à chaque fois la fonction hyperbolique et en primitivant la fonction trigonométrique (on peut bien sûr faire le contraire, ça marche pareil) : $F(x) = \int_0^x \mathrm{ch}(t)\cos(t)\,dt = [\mathrm{ch}(t)\sin(t)]_0^x - \int_0^x \mathrm{sh}(t)\sin(t)\,dt = \mathrm{ch}(x)\sin(x) + [\mathrm{sh}(t)\cos(t)]_0^x - \int_0^x \mathrm{ch}(t)\cos(t)\,dt = \mathrm{ch}(x)\sin(x) + \mathrm{sh}(x)\cos(x) - F(x)$. Du coup, $2F(x) = \mathrm{ch}(x)\sin(x) + \mathrm{sh}(x)\cos(x)$ et $F(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(x)\sin(x) + \mathrm{sh}(x)\cos(x))$.
- Une toute petite astuce suffit : $F(x) = \int_0^x \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \arctan(x)$.
- Ici, on peut au choix utiliser la même astuce que dans le calcul précédent (ce qui est sous l'intégrale s'écrit $\sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, et tout s'intègre directement), ou bien, pour mieux voir ce qui se passe, effectuer le petit changement de variable $u = t+1$: $\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt = \int_1^{x+1} \frac{u-1}{\sqrt{u}}\,du = \int_1^{u-1} \sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{u}}{2}\right]_1^{x-1} = \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\sqrt{x-1} - \frac{1}{6} = \left(\frac{2}{3}x - \frac{7}{6}\right)\sqrt{x-1} - \frac{1}{6}$. Cette primitive est valable sur tout l'intervalle $]-1,+\infty[$, et on peut bien sûr enlever la constante $-\frac{1}{6}$.
- Il est urgent de faire une IPP pour se débarasser du Argsh : posons $u(t) = \mathrm{Argsh}(3t)$ et $v'(t) = 1$, soit $u'(t) = \frac{3}{\sqrt{1+9t^2}}$ et $v(t) = 1$, on trouve alors $F(x) = [t\,\mathrm{Argsh}(3t)]_0^x - \int_0^x \frac{3t}{\sqrt{1+9t^2}}\,dt = x\,\mathrm{Argsh}(3x) - \frac{1}{3}\sqrt{1+9x^2}$, primitive valable sur $\mathbb{R}$.
- Encore un bon exemple d'IPP, en posant $u(t) = \ln(1+t^2)$, soit $u'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$, et $v'(t) = 1$, soit $v(t) = t$. On trouve $F(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\,dt = [t\ln(1+t^2)]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt = x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}\,dt = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x)$ (même astuce que la neuvième intégrale de ce même exercice pour la fin du calcul).
- À part une IPP, on ne voit pas bien quoi faire : posons $u(t) = \ln(t+\sqrt{t^2-1})$, soit $u'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}}{t+\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ (tiens, c'est curieux, on est en train de chercher une primitive de Argch, en fait) ; et $v'(t) = 1$, soit $v(t) = t$. On trouve alors $F(x) = \int_2^x \ln(t+\sqrt{t^2-1}\,dt = [t\ln(t+\sqrt{t^2-1})]_2^x - \int_2^x \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = x\ln(x+\sqrt{x^2-1}) - 2\ln(2+\sqrt{3}) - \sqrt{x^2-1} + \sqrt{3}$, primitive valable sur $[1,+\infty[$.

- C'est immédiat : ce qui est sous l'intégrale est de la forme $-\frac{u'}{u^2}$, donc $F(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ (définie seulement sur les intervalles où cos ne s'annule pas).
- Du facile pour finir : $F(x) = \int_0^x \frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(t)}\ dt = \ln(\text{ch}(t))$.

Exercice 2 (* à **)

- Un simple changement de variables $t = x+1$ simplifie énormément le calcul : $I = \int_0^1 (x-2)(x+1)^5\ dx = \int_1^2 (t-3)t^5\ dt = \int_1^2 t^6 - 3t^5\ dt = \left[\frac{t^7}{7} - \frac{t^6}{2}\right]_1^2 = \frac{127}{7} - \frac{63}{2} = -\frac{187}{14}$.
- Une simple enchainement d'IPP suffit, en posant $u(x) = (\ln(x))^3$, soit $u'(x) = \frac{3(\ln(x))^2}{x}$; et $v'(x) = x^2$, soit $v(x) = \frac{x^3}{3}$, ce qui donne $I = \int_1^e x^2(\ln(x))^3\ dx = \left[\frac{x^3}{3}(\ln(x))^3\right] - \int_1^e x^2(\ln(x))^2\ dx = \frac{e^3}{3} - \int_1^e x^2(\ln(x))^2\ dx$. On effectue une deuxième IPP en posant $u(x) = (\ln(x))^2$, soit $u'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$; et $v'(x) = x^2$, soit $v(x) = \frac{x^3}{3}$, pour trouver $I = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)^2\right] + \int_1^e \frac{2x^2}{3}\ln(x) = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{3} + \frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln(x)\ dx$. Allez, une dernière IPP pour finir, en posant $u(x) = \ln(x)$, soit $u'(x) = \frac{1}{x}$; et $v'(x) = x^2$, donc $v(x) = \frac{x^3}{3}$. On finit par obtenir $I = \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right] - \frac{2}{3}\int_1^e \frac{x^2}{3}\ dx = \frac{2e^3}{9} - \frac{2}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{2e^3}{9} - \frac{2e^3-2}{27} = \frac{4e^3+2}{27}$.
- On reconnait ici à très peu de choses près une forme $\frac{u'}{u}$ qui s'intègre directement (si vraiment on n'est pas réveillés, un petit changement de variables $t = e^{2x}$ permet aussi de se tirer d'affaire) : $I = \int_0^{\frac{\ln(2)}{2}} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}\ dx = \left[\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+2)\right]_0^{\frac{\ln(2)}{2}} = \frac{1}{2}(\ln(4) - \ln(3)) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.
- On peut s'en sortir rapidement en se souvenant que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, donc $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x)+1)$, d'où $I = \frac{1}{2}\int 0^{2\pi}\cos(2x) + 1\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2x) + x\right]_0^{2\pi} = \pi$. Allez, une technique hyper astucieuse pour ceux qui aiment : on peut constater que $I = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\ dx$ (intégrer le carré du cosinus ou du sinus sur une période donne la même chose), puis faire la somme des deux pour trouver $\int_0^{2\pi} \cos^2(x) + \sin^2(x)\ dx = \int_0^{2\pi} 1\ dx = 2\pi$. Chacune des deux intégrales vaut donc π.
- On reconnait immédiatement $\frac{u'}{u^2}$ (ce n'est pas parce que le x est au dénominateur qu'il faut se laisser avoir), du coup $I = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_e^{e^2} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ (au pire, le changement de variable $t = \ln(u)$ ramène au même calcul).
- On peut intégrer directement si on est un tout petit peu malin : $I = \int_0^1 \frac{x}{1+(x^2)^2}\ dx = \left[\frac{1}{2}\arctan(x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$.
- Parfois, la méthode bêtement bourrine est efficace, remplacer joyeusement tout par des exponentielles fonctionne. Commençons par calculer $\text{sh}^2(x)\,\text{ch}^2(x) = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \times \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} =$

$\dfrac{e^{4x}-2+e^{-4x}}{16}$, puis intégrons : $I=\dfrac{1}{16}\displaystyle\int_0^{\ln(2)} e^{4x}+e^{-4x}-2\;dx=\dfrac{1}{16}\left[\dfrac{e^{4x}}{4}-\dfrac{e^{-4x}}{4}-2x\right]_0^{\ln(2)}=\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{16}{4}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{16\times 4}+\dfrac{1}{4}-2\ln(2)\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{1\ 024}-\dfrac{\ln(2)}{8}=\dfrac{255}{1\ 024}-\dfrac{\ln(2)}{8}$.

- Un exemple surprenant de double intégration par parties : on commence par poser $u(x)=\cos(x)$, donc $u'(x)=-\sin(x)$; et $v'(x)=v(x)=e^x$, pour trouver $I=[e^x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin(x)\;dx$, et on recommence, toujours avec $v'(x)=v(x)=e^x$, et $u(x)=\sin(x)$, donc $u'(x)=\cos(x)$. On a cette fois $I=-1+[e^x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)\;dx=-1+e^{\frac{\pi}{2}}-I$. Autrement dit, $2I=e^{\frac{\pi}{2}}-1$, et $I=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$.
- De qui se moque-t-on dans cet exercice ? On a déjà fait la même en plus facile à la deuxième intégrale ! Au moins, ici, deux IPP suffiront, je ne détaille pas autant que la première fois, on dérive bien sûr toujours les puissances de ln pour intégrer les x : $I=\left[\dfrac{x^2}{2}\ln(x)^2\right]_1^e-\displaystyle\int_1^e x\ln(x)\;dx=\dfrac{e^2}{2}-\left[\dfrac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e+\displaystyle\int_1^e\dfrac{x}{2}\;dx=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{e^2}{2}+\left[\dfrac{x^2}{4}\right]_1^e=\dfrac{e^2-1}{4}$.
- On aimerait bien faire une IPP mais une primitive de $\sin^2$, ce n'est pas forcément trivial à trouver. Soit on en trouve une quand même en pensant qu'il y a un lien entre $\sin^2(x)$ et $\cos(2x)$ (petit truc déjà exploité un peu plus haut), soit on utilise une astuce en posant $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2(x)\;dx$, et en calculant la somme et la différence de I et de J. Allez, faisons comme ça : $I+J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\sin^2(x)+\cos^2(x))\;dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\;dx=\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi^3}{24}$. La différence demande plus de boulot : $I-J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\sin^2(x)-\cos^2(x))\;dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-x^2\cos(2x)\;dx$. Il va falloir faire une double IPP, en dérivant à chaque fois les x et en primitivant les fonctions trigonométriques : $u(x)=x^2$ donc $u'(x)=2x$; $v'(x)=\cos(2x)$, donc $v(x)=\dfrac{\sin(2x)}{2}$, pour trouver $I-J=\left[-\dfrac{x^2}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\;dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\;dx$. Il va évidemment falloir une deuxième IPP : $I-J=\left[-x\dfrac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos(2x)}{2}\;dx=\dfrac{\pi}{4}+\left[\dfrac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{\pi}{4}$. Ne reste plus qu'à écrire que $I=\dfrac{I+J}{2}+\dfrac{I-J}{2}=\dfrac{\pi^3}{48}+\dfrac{\pi}{8}$.
- Il est plus simple pour la rédaction de calculer par IPP $J=\displaystyle\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}\;dx$: on pose $u(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, soit $u'(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$; et $v'(x)=1$, donc $v(x)=x$. On trouve alors $J=\left[\dfrac{x}{1+x^2}\right]_0^1+\displaystyle\int_0^1\dfrac{2x^2}{(1+x^2)2}\;dx=\dfrac{1}{2}+2\int_0^1\dfrac{1+x^2-1}{(1+x^2)^2}\;dx=\dfrac{1}{2}+2J-I$. Autrement dit, $I=J+\dfrac{1}{2}$. Or, on sait calculer directement $J=[\arctan(x)]_0^1=\dfrac{\pi}{4}$, dont on déduit $I=\dfrac{\pi+2}{4}$.
- Dans ce genre de cas, le changement de variable $t=1-x$ est le bienvenu (attention au changement de signe : $dt=-dx$) : $I=\displaystyle\int_1^0-(1-t)^2\sqrt{t}\;dt=\int_0^1(1-2t+t^2)\sqrt{t}\;dt=\int_0^1\sqrt{t}-2t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{5}{2}}\;dt=\left[\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\dfrac{4}{5}t^{\frac{5}{2}}+\dfrac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}\right]_0^1=\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{5}+\dfrac{2}{7}=\dfrac{16}{105}$.
- On a sous l'intégrale une forme $u'u$, qui est à un facteur près la dérivée de u^2, on fait donc une

intégration directe : $I = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^e = \frac{1}{2}$.

- C'est la même que la précédente ! Ah non, zut, la racine carrée complique tout. Pas tant que ça en fait : $I = \int_1^e \frac{2\ln(\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx$. effectuons un changement de variable en posant $t = \sqrt{x}$, donc $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, pour trouver $I = \int_1^{\sqrt{e}} 4\ln(t)\ dt = 4[t\ln(t) - t]_1^{\sqrt{e}} = 4(\sqrt{e}\ln(\sqrt{e}) - \sqrt{e} + 1) = 4 - 2\sqrt{e}$.
- Empressons-nous de poser $t = x + 1$ pour trouver $I = \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{\sqrt{t}}\ dt = \int_1^2 t^{\frac{5}{2}} - 3t^{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt = \left[\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5}t^{\frac{5}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{t}\right]_1^2 = \frac{2(8\sqrt{2}-1)}{7} - \frac{6(4\sqrt{2}-1)}{5} + 2(2\sqrt{2}-1) - 2\sqrt{2} + 2 = \left(\frac{16}{7} - \frac{24}{5} + 2\right)\sqrt{2} - \frac{2}{7} + \frac{6}{5} = \frac{32 - 18\sqrt{2}}{35}$
- Non, ne fuyez pas, c'est tout simple, on reconnait du $u'\sqrt{u}$, donc $I = \left[\frac{2}{3}(\arcsin(x))^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{9\sqrt{6}}$.
- Vive la relation de Chasles, après découpage, on peut remplacer la partie entière par sa valeur constante : $I = \int_0^1 x \times 0\ dx + \int_1^2 x \times 1\ dx + \int_2^3 x \times 2\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + [x^2]_2^3 = 2 - \frac{1}{2} + 9 - 4 = \frac{13}{2}$.
- Le mieux est d'écrire ce qui se trouve sous l'intégrale sans valeur absolue en distinguant suivant son signe (et en utilisant la relation de Chasles) : $x^2 - 5x + 6$ a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$ et s'annule donc pour $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$. Le trinôme est négatif entre les deux racines, on découpe l'intégrale en trois morceaux : $I = \int_1^2 x^2 - 5x + 6\ dx - \int_2^3 x^2 - 5x + 6\ dx + \int_3^5 x^2 - 5x + 6\ dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_2^3 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_3^5 = \frac{8}{3} - 10 + 12 - \frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 6 - 9 + \frac{45}{2} - 18 + \frac{8}{3} - 10 + 12 + \frac{125}{3} - \frac{125}{2} + 30 - 9 + \frac{45}{2} - 18 = \frac{140}{3} - 41 = \frac{17}{3}$.

Exercice 3 (** à ***)

- Ici, les plus malins feront la décomposition en éléments simples à vue (même pas besoin d'identification) : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, donc $I = \int_2^3 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\ dx = [\ln(x) - \ln(x+1)]_2^3 = \ln(3) - \ln(4) - \ln(2) + \ln(3) = 2\ln(3) - 3\ln(2) = \ln\left(\frac{9}{8}\right)$.
- Le dénominateur se factorise en $(x+1)(x-4)$ (il y a -1 comme racine évidente), on peut donc décomposer sous la forme $\frac{2x+1}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4}$. En multipliant par $x+1$ et en évaluant en $x = -1$, on trouve $\frac{-1}{-5} = a$, soit $a = \frac{1}{5}$. De même, en multipliant par $x-4$ et en prenant $x = 4$, on a $\frac{9}{5} = b$, donc $I = \int_0^2 \frac{1}{5(x+1)} + \frac{9}{5(x-4)}\ dx = \left[\frac{\ln(x+1)}{5} + \frac{9\ln(4-x)}{5}\right]_0^2 = \frac{\ln(3)}{5} + \frac{9\ln(2)}{5} - \frac{9\ln(4)}{5} = \frac{\ln(3) - 9\ln(2)}{5}$.
- La décomposition en éléments simples va donner $\frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-2}$. En multipliant par $x-2$ en en prenant $x = 2$, on trouve $\frac{3}{5} = c$. En multipliant tout par x et en prenant

un équivalent en $+\infty$, $0 = a + c$, donc $a = -\dfrac{3}{5}$. Pour achever le calcul, on regarde pour $x = 0$: $-\dfrac{1}{2} = b - \dfrac{c}{2}$, donc $b = \dfrac{c-1}{2} = -\dfrac{1}{5}$. Finalement, $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{5} \times \frac{1}{x-2} - \frac{3}{5}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{5(x^2+1)}\,dx = \left[\frac{3\ln(2-x)}{5} - \frac{3\ln(x^2+1)}{10}\ln(x^2+1) - \frac{\arctan(x)}{5}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln(2)\right) - \frac{3}{10}\ln\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{10}(2\ln(3) - 2\ln(2) - \ln(5)) - \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{10}\ln\left(\frac{9}{20}\right) - \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$. On ne peut pas vraiment simplifier plus, notamment l'arctangente qui ne correspond pas le moins du monde à un angle remarquable.

- Même technique que la précédente (le dénominateur ne peut pas se factoriser plus), mais avec des calculs plus pénibles (heureusement qu'il ne s'agit que d'une primitive à calculer, on donnera celle valable sur $]-1, +\infty[$ qui s'annule en 0). Commençons par décomposer sous la forme $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+x+1)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$. En multipliant par $x+1$ en en posant $x = -1$, on obtient $-1 = a$. En multipliant par x et en prenant un équivalent en $+\infty$, on a ensuite $0 = a+b$, soit $b = -a = 1$. Enfin, on peut choisir $x = 0$ pour trouver $0 = a + c$, donc $c = 1$ également. Finalement, $F(t) = \displaystyle\int_0^t -\frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = G(t) - \ln(t+1)$, où $G(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int_0^t \frac{x+1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\,dx$. Posons $u = x + \dfrac{1}{2}$ pour trouver $G(t) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \frac{u+\frac{1}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}\,du = \int_{\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,du = \left[\frac{1}{2}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}u)^2+1}\,du = \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \frac{2}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. Il ne reste plus quà conclure ce brillant calcul : $F(t) = -\ln(t+1) + \dfrac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) - \dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$.
- On revient à du plus facile : $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, on peut décomposer sous la forme $\dfrac{1}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-3}$. En mulitpliant par $x-1$ puis par $x-3$, on trouve facilement $-\dfrac{1}{2} = b$ et $\dfrac{1}{2} = b$, donc $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}\,dx = \frac{1}{2}[\ln(3-x) - \ln(1-x)]_{-1}^0 = \frac{1}{2}(\ln(4) - \ln(3) - \ln(2)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$.
- Comme on a déjà vu quasiment le même calcul un peu plus haut, je passe les détails : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt = \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}t)^2+1}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
- Beaucoup plus astucieux, le changement de variable $t = \pi - x$ va nous simplifier la vie : $I = \displaystyle\int_\pi^0 -\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}\,dt = \int_0^\pi \frac{(\pi-t)\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dt = \pi\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dt - I$, donc $2I = \pi\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dt = \pi[-\arctan(\cos(t))]_0^\pi = \pi(-\arctan(-1) + \arctan(1)) = \frac{\pi^2}{2}$. Donc $I = \dfrac{\pi^2}{4}$.
- Si on commençait pas poser $t = x^2$, ça simplifierait sûrement les choses, d'autant plus que $dt = 2xdx$, ce qui donne $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2(t^2+t+1)^2}\,dt$. Essayons de ramener cette intégrale au cas plus classique (et traité plus haut) où il n'y a pas de carré au dénominateur, en intégrant

par partie ce dernier en posant $u(t) = \dfrac{1}{t^2+t+1}$, donc $u'(t) = \dfrac{-2t-1}{(t^2+t+1)^2}$; et $v'(t) = 1$, donc $v(t) = t$. On trouve alors $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}\,dt = \left[\frac{t}{t^2+t+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2t^2+t}{(t^2+t+1)^2}\,dt = \frac{1}{3} + \int_0^1 \frac{2t^2+2t+2}{(t^2+t+1)^2} - \frac{t+\frac{1}{2}}{(t^2+t+1)^2} - \frac{3}{2(t^2+t+1)^2}\,dt = \frac{1}{3} + 2J + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{t^2+t+1}\right]_0^1 - 3I = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + 2J - 3I = 2J - 3I$. En découle que $I = \dfrac{J}{3} = \dfrac{\pi}{9\sqrt{3}}$ en reprenant le résultat vu plus haut pour J.

- Essayons d'appliquer les règles de Bioche : le dénominateur est laissé stable par les trois changements de variables possibles, seule la moitié du numérateur change de signe avec $-x$ et $\pi - x$, donc ça ne va pas, et $\pi + x$ change tout le numérateur de signe mais pas le dx, ce qui ne convient pas non plus. Va-t-on passer par le $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$? Bien sûr que non, nous sommes plus malins que ça, et un simple découpage de l'intégrale en 2 fait apparaitre des formules plus faciles : $F(x) = J(x) + K(x)$, avec $K(x) = \displaystyle\int_0^x -\frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dx = \arctan(\cos(x))$, et $J(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\cos(t)}{1+\cos^2(t)}\,dx = \int_0^x \frac{\cos(t)}{2-\sin^2(t)}\,dx$. Les règles de Bioche proposent de tenter $u = \sin(t)$, soit $du = \cos(t)dt$ pour trasformer l'intégrale en $J(x) = \displaystyle\int_0^{\sin(x)} \frac{1}{2-u^2}\,du$. Une décomposition en éléments simples relativement élémentaire donne $\dfrac{1}{2-u^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4(\sqrt{2}-u)} + \dfrac{\sqrt{2}}{4(\sqrt{2}+u)}$, d'où $J(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\displaystyle\int_0^{\sin(x)} \frac{1}{\sqrt{2}-u} + \frac{1}{\sqrt{2}+u}\,du = \frac{\sqrt{2}}{4}(\ln(\sin(x)+\sqrt{2}) - \ln(\sqrt{2}-\sin(x))$. Finalement, $F(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\ln(\sin(x)+\sqrt{2}) - \ln(\sqrt{2}-\sin(x))) + \arctan(\cos(x)$.
- On s'empresse de poser $t = x^{\frac{1}{3}}$, soit $x = t^3$, et $dx = 3t^2dt$, pour trouver $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^{\frac{1}{3}}} 3t^2\arctan(t)\,dt$. On effectue ensuite une IPP en dérivant l'arctangente et en primitivant la puissance : $F(x) = [t^3\arctan(t)]_0^{x^{\frac{1}{3}}} - \displaystyle\int_0^{x^{\frac{1}{3}}} \frac{t^3}{1+t^2}\,dt = x\arctan(\sqrt[3]{x}) - \int_0^{x^{\frac{1}{3}}} \frac{t^3+t}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2}\,dt = x\arctan(\sqrt[3]{x}) - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+x^{\frac{2}{3}})$.
- Posons donc $t = x^{\frac{1}{4}}$, soit $x = t^4$ et $dx = 4t^3dt$, pour trouver $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^{\frac{1}{4}}} \frac{4t^3}{t^2+t}\,dt = \int_0^{x^{\frac{1}{4}}} \frac{4t^2}{1+t}\,dt = 4\int_0^{x^{\frac{1}{4}}} \frac{t^2+t}{1+t} - \frac{t+1}{1+t} + \frac{1}{1+t}\,dt = 4\left[\frac{t^2}{2} - t + \ln(1+t)\right]_0^{x^{\frac{1}{4}}} = 2\sqrt{x} - 4\sqrt{\sqrt{x}} + 4\ln(1+x^{\frac{1}{4}})$.
- Le dénominateur ne s'annulant jamais, on peut déterminer une primitive valable sur $\mathbb{R}$. L'application des règles de Bioche ne donne rien de bon, allons-y pour le changement de variable violent $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$. On sait alors (c'est du cours !) que $\sin(x) = \dfrac{2u}{1+u^2}$, et $dx = \dfrac{2}{1+u^2}dt$. En posant $v = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ pour alléger les notations, $F(x) = \displaystyle\int_0^v \frac{1}{5+\frac{8u}{1+u^2}} \times \frac{2}{1+u^2}\,du = \int_0^v \frac{2}{5+8u+5u^2}\,du = \frac{2}{5}\int_0^v \frac{1}{(u+\frac{4}{5})^2+\frac{9}{25}}\,du = \frac{10}{9}\int_0^v \frac{1}{(\frac{5}{3}u+\frac{4}{3})^2+1}\,du$
$= \dfrac{2}{3}\left(\arctan\left(\dfrac{5}{3}u+\dfrac{4}{3}\right) - \arctan\left(\dfrac{4}{3}\right)\right) = \dfrac{2}{3}\arctan\left(\dfrac{5}{3}\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)+\dfrac{4}{3}\right) + K$.
- Il est urgent de poser $t = \sqrt{x-1}$, donc $x = t^2+1$ et $dx = 2tdt$, pour trouver $I =$

$\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t}{t^2+t+1}\,dt = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t+1}{t^2+t+1} - \frac{1}{t^2+t+1}\,dt = \left[\ln(t^2+t+1) - \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)\right]_1^{\sqrt{2}} =$ $\displaystyle\ln(3+\sqrt{2}) - \ln(3) - \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)$ (cf plus haut pour la primitive de la deuxième moitié, ce résultat ne se simplifie pas vraiment).

- Les primitives trouvées seront valables sur les intervalles de définition de la fonction tangente. Les règles de Bioche suggèrent le changement de variable $t = \cos(x)$, qui change le signe du numérateur et de l'élément différentiel mais pas du dénominateur, soit $dt = -\sin(x)dx$. Comme $\displaystyle\frac{\tan(x)}{1+\sin^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)(2-\cos^2(x))}$, on trouve $\displaystyle F(x) = \int_0^{\cos(x)} -\frac{1}{t(2-t^2)}\,dt$. Il ne reste plus qu'à décomposer en éléments simples : $\displaystyle\frac{1}{t(t^2-2)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-\sqrt{2}} + \frac{c}{t+\sqrt{2}}$. les trois constantes s'obtiennent ici en multipliant par chacun des dénominateurs et en évaluant pour $t=0$, $t=\sqrt{2}$ et $t=-\sqrt{2}$. On obtient $\displaystyle -\frac{1}{2} = a$, $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)} = b = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, et $\displaystyle\frac{1}{-\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)} = c = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ (il est normal que les coefficients b et c soient opposés, la fonction est impaire), soit $\displaystyle F(x) = \int_0^{\cos(x)} -\frac{1}{2t} + \frac{\sqrt{2}-1}{2(t-\sqrt{2})} - \frac{\sqrt{2}-1}{2(t+\sqrt{2})} = -\frac{1}{2}\ln(\cos(x)) + \frac{(\sqrt{2}-1)}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-\cos(x)}{\sqrt{2}+\cos(x)}\right)$.
- On pose brutalement $\displaystyle t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, soit $\displaystyle t^2 = \frac{x-1}{x+1}$, donc $t^2x + t^2 = x-1$ et $\displaystyle x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$. La dérivée de $\displaystyle t \mapsto \frac{1+t^2}{1-t^2}$ est $\displaystyle\frac{2t(1-t^2)+2t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} = \frac{4t}{(1-t^2)^2}$, donc $\displaystyle dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2}dt$, et $\displaystyle I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \times \frac{4t}{(1-t^2)^2}\,dt = 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t^2}{1-t^4}\,dt$. Il ne reste plus qu'à décomposer en éléments simples : $\displaystyle\frac{t^2}{1-t^4} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{ct+d}{1+t^2}$. En multipliant par t et en prenant la limite en $+\infty$, on trouve $c = 0$. les valeurs de a et b s'obtiennent par la technique habituelle, produit par $1 \pm t$ et évaluation en ± 1, on a $\displaystyle\frac{1}{4} = a$ et $\displaystyle\frac{1}{4} = b$. enfin, en posant $t = 0$, $a+b+d = 0$, donc $\displaystyle d = -\frac{1}{2}$. On trouve alors $\displaystyle I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} - \frac{2}{1+t^2}\,dt = [-\ln(1-t) + \ln(1+t) - 2\arctan(t)]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right) - \frac{\pi}{3}$.
- Les primitives seront définies sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$, on va déterminer la primitive définie sur le premier intervalle s'annulant en 0. On commence par une IPP en dérivant l'arctangente et en primitivant le facteur 1 : comme $\displaystyle x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$ a pour dérivée $\displaystyle\frac{-1}{(x-2)^2}$, celle de $\displaystyle t \mapsto \arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ vaut $\displaystyle\frac{-1}{(x-2)^2}\frac{1}{1+(\frac{x-1}{x-2})^2} = -\frac{1}{2x^2-6x+5}$. On trouve alors $\displaystyle F(x) = x\arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \int_0^x \frac{t}{2t^2-6t+5}\,dt$. Le dénominateur de la nouvelle intégrale ne s'annule jamais, mais on peut écrire $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{2t^2-6t+5}\,dt = \int_0^t \frac{1}{4}\frac{4t-6}{2t^2-6t+5} + \frac{3}{2}\frac{1}{2t^2-6t+5}\,dt = \frac{1}{4}[\ln(2t^2-6t+5)]_0^x + \int_0^x \frac{3}{4}\frac{1}{(t-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}}\,dt = \frac{1}{4}\ln(2x^2-6x+5) - \frac{1}{4}\ln(5) + \int_0^x + \int_0^x \frac{3}{(2t-3)^2+1}\,dt = \frac{1}{4}\ln(2x^2-6x+5) - \frac{1}{4}\ln(5) + \frac{3}{2}\arctan(2x-3) - \frac{3}{2}\arctan(-3)$. Finalement, $\displaystyle F(x) = x\arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \frac{1}{4}\ln(2x^2-6x+5) + \frac{3}{2}\arctan(2x-3) - \frac{1}{4}\ln(5) + \frac{3}{2}\arctan(3)$.
- La primitive sera définie sans problème sur $\mathbb{R}$. En appliquant les règles de Bioche, on peut poser

$t = \text{th}(x)$, soit $dt = (1 - \text{th}^2(x))dx = (1-t^2)dx$, donc $I = \displaystyle\int_0^{\text{th}(x)} \frac{1}{(1-t)(1-t^2)}\, dt$. On fait une décomposition en éléments simples : $\dfrac{1}{(1-t)(1-t^2)} = \dfrac{a}{1+t} + \dfrac{b}{1-t} + \dfrac{c}{(1-t)^2}$. En multipliant par $1+t$ et en évaluant en -1, $\dfrac{1}{4} = a$. En multipliant par $(1-t)^2$ et en prenant $t = 1$, $\dfrac{1}{2} = c$. enfin, pour $t = 0$, $1 = a + b + c$, donc $b = \dfrac{1}{4}$. Finalement, $F(x) = \displaystyle\int_0^{\text{th}(x)} \frac{1}{4(1-t)} + \frac{1}{4(1+t)} + \frac{1}{4(1-t)^2}\, dt = \left[\frac{1}{4}\ln(1+t) - \frac{1}{4}\ln(1-t) + \frac{1}{2(1-t)}\right]_0^{\text{th}(x)} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\text{th}(x)}{1-\text{th}(x)}\right) + \frac{1}{2(1-\text{th}(x))} - \frac{1}{2}$.

- Bidouillons un peu : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+2x}{(x^2+2)^2} + \frac{1-x}{(x^2+2)^2}\, dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+2} - \frac{x}{(x^2+2)^2} + \frac{1}{(x^2+2)^2}\, dx$. Le premier morceau s'intègre directement en $\left[\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2)\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}(\ln(3) - \ln(2)) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$, le deuxième morceau donne $\left[\dfrac{1}{2(x^2+2)}\right]_0^1 = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{12}$. Pour le troisième, c'est un classique, on l'obtient en intégrant par parties $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+2} = \left[\frac{x}{x^2+2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2x^2}{(x^2+2)^2}\, dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 \frac{2(x^2+2)}{(x^2+2)^2} - \frac{4}{(x^2+2)^2}\, dx$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x^2+2)^2}\, dx = \frac{1}{12} + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x^2+2}\, dx$. Le $\dfrac{1}{12}$ va se simplifier, reste à calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Finalement, $I = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{8}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Exercice 4 (**)

1. On effectue une intégration par parties en posant $v'(x) = x^2$ et $u(x) = \ln x$, donc $v(x) = \dfrac{x^3}{3}$ et $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, pour obtenir $I_1 = \displaystyle\int_1^e x^2 \ln x\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$.
2. Sur $[1;e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant (\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$. En découle $0 \leqslant x^2(\ln x)^{n+1} \leqslant x^2(\ln x)^n$, puis par intégration $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est décroissante.
3. La suite est décroissante minorée par 0, elle converge.
4. Le plus simple est d'étudier la fonction $f : x \mapsto \ln x - \dfrac{x}{e}$ (les plus malins noteront toufois que $y = \dfrac{x}{e}$ est l'équation de la tangente en e de la fonction ln, et invoqueront la concavité de cette dernière). On a $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e}$, qui est positif sur l'intervalle $[1;e]$. La fonction f est donc croissante sur $[1;e]$, et $f(e) = 0$, donc f est négative sur $[1;e]$. On en déduit que $I_n \leqslant \displaystyle\int_1^e x^2\left(\frac{x}{e}\right)^n = \frac{1}{e^n}\int_1^e x^{n+2}\, dx = \frac{1}{e^n(n+3)}$. La majoration calculée tendant vers 0, le théorème des gendarmes s'applique, et (I_n) converge vers 0.
5. Il s'agit bien sûr d'une intégration par parties, avec $u'(x) = x^2$ et $v(x) = (\ln x)^{n+1}$: $I_{n+1} = \left[\dfrac{x^3}{3}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \displaystyle\int_1^e \frac{x^2}{3}(n+1)(\ln x)^n = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n$. En faisant tendre n vers $+\infty$,

on a donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{3} I_n = \frac{e^3}{3}$, donc $I_n \sim \frac{e^3}{n+1} \sim \frac{e^3}{n}$.

Exercice 5 (**)

1. Calculons donc : $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t}\ dt = [\ln(2+t)]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ ($\simeq$ 0.4) ; $u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+2t}\ dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+2t)\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2}$($\simeq$ 0.55) ; enfin, $u_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2}\ dt = \int_0^1 \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\ dt = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{(\frac{2}{\sqrt{3}}(t+\frac{1}{2}))^2+1}\ dt = \frac{4}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$($\simeq$ 0.6).
2. Pour tout t dans $[0;1]$, on a $t^{n+1} \leqslant t^n$, donc $1+t+t^{n+1} \leqslant 1+t+t^n$ puis (tout étant positif) $\frac{1}{1+t+t^{n+1}} \geqslant \frac{1}{1+t+t^n}$. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on obtient $u_{n+1} \geqslant u_n$, la suite (u_n) est donc croissante.
3. Il faut réussir à majorer intelligemment ce qui se trouve sous l'intégrale, en l'occurence en constatant que $\forall t \in [0;1]$, $1+t+t^n \geqslant 1+t$, donc $\frac{1}{1+t+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t}$. En intégrant l'inegalité, on obtient $u_n \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t}\ dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$ (la majoration doit être guidée par le fait qu'on veut obtenir $\ln(2)$ à la fin).
4. La suite (u_n) est donc croissante et majorée, elle converge.
5. En utilisant le calcul fait un peu plus haut, on a $\ln 2 - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n}\ dt$.
6. Il suffit d'arriver à majorer ce qui se trouve sous l'intégrale : $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} = \frac{1+t+t^n-(1+t)}{(1+t)(1+t+t^n)} = \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}$. Or, ce magnifique dénominateur est certainement plus grand que 1 quand $t \in [0;1]$, donc $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} \leqslant t^n$, et en intégrant cette inégalité on a $\ln 2 - u_n \leqslant \int_0^1 t^n\ dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
7. On a vu plus haut que $u_n \leqslant \ln 2$, donc $\ln 2 - u_n \geqslant 0$. Comme on vient de majorer par ailleurs cette même expression par quelque chose qui tend vers 0, un coup de théorème des gendarmes nous donne $\lim_{n\to+\infty}(\ln 2 - u_n) = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 6 (*)

1. Allons-y : $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\ dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$, puis $I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t}\ dt = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t}\ dt = 1 - I_0 = 1 - \ln(2)$, et enfin $I_2 = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\ dt = \int_0^1 \frac{t^2+t}{1+t} - \frac{t}{1+t}\ dt = \int_0^1 t\ dt - I_2 = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - (1-\ln(2)) = \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) = \ln(2) - \frac{1}{2}$.

2. Même pas besoin de s'embêter à déterminer la monotonie de la suite (qui est en l'occurence décroissante) : comme $\dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ sur $[0,1]$, on peut encadrer I_n en écrivant $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n\, dt = \left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème des gendarmes pour conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
3. Pour une fois, inutile de faire une intégration par parties, il vaut mieux procéder astucieusement en généralisant les calculs de la première question : $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\, dt = \int_0^1 \frac{t^{n+1}+t^n}{1+t}\, dt - I_n = \int_0^1 t^n\, dt - I_n = \frac{1}{n+1} - I_n$.
4. Méthode « avec les mains » : $I_0 = 1 - I_1 = 1 - \dfrac{1}{2} + I_2 = \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + (-1)^n I_n$. Autrement dit, $\ln(2) = S_n + (-1)^n I_n$, ou encore $S_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n$.
5. Il n'y a plus rien à faire d'autre que de constater : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)$.

Exercice 7 (***)

Je vous sens tous venir avec votre récurrence, oubliez-là, ça ne sert à rien. Observer ce qui se passe pour les petites valeurs de n peut être utile. Ainsi, pour $n = 0$, le résultat est une conséquence du fait qu'une fonction (non nulle) de signe constant sur un intervalle ne peut pas avoir une intégrale nulle. Pour $n = 1$, raisonnons par l'absurde en supposant que f ne s'annule qu'une seule fois, disons en c. Alors la fonction est (par exemple) strictement positive sur $[0, c]$ et strictement négative sur $[c, 1]$ (si c'est le contraire, on prend $-f$ qui vérifie également les hypothèses de l'énoncé). L'astuce est alors de constater que la fonction $g : t \mapsto (c-t)f(t)$ est de signe constant sur $[0,1]$, en l'occurence positive (puisque les deux facteurs sont positifs si $t \leqslant c$ et les deux sont positifs si $t \geqslant c$). Pourtant, $\displaystyle\int_0^1 (t-c)f(t)\, dt = \int_0^1 tf(t)\, dt - c\int_0^1 f(t)\, fdt = 0 - c \times 0 = 0$. la fonction n'étant pas tout le temps nulle sur $[0,1]$, on tient une absurdité.

Généralisons ce résultat, en raisonnant par l'absurde dans le cas général. Supposons que f s'annule exactement n fois (si elle s'annule moins, c'est encore plus facile) en $c_1 < c_2 < \dots c_n$ en changeant de signe à chaque fois (si f ne change pas de signe, on enlève purement et simplement la valeur correspondante). Notons alors $P = (t-c_1)(t-c_2)\dots(t-c_n)$. Ce polynôme change lui aussi de signe en c_1, c_2, …, c_n, dont le produit $Pf(t)$ est de signe constant sur $[0,1]$. Pourtant, son intégrale est nulle. En effet, quel que soit le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_i X^i$ de degré n (ou moins), par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 P(t)f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n} a_i \int_0^1 t^i f(t)\, dt = 0$. Là encore, on a une contradiction, la fonction f ne peut donc pas s'annuler moins de $n+1$ fois.

Exercice 8 (*)

1. La fonction f est la primitive de $\dfrac{e^x}{x}$ s'annulant en 1. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{e^x}{x}$. Cette dérivée étant positive sur $\mathbb{R}_+^*$, f y est croissante.
2. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{e^x - 1}{x}$. Cette dérivée est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc g y est croissante. Comme $g(1) = f(1) - \ln 1 = 0$, la fonction g est

donc négative sur $]0;1]$ et positive sur $[1;+\infty[$ ($f(1)=0$ car on effectue alors une intégrale sur l'intervalle $[1;1]$).

3. D'après la question précédente, on a $f(x) \leqslant \ln x$ sur $]0;1[$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$; de même, $f(x) \geqslant \ln x$ si $x \geqslant 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 9 (**)

C'est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \times \int_a^b \frac{1}{f(x)}\ dx \geqslant \left(\int_a^b \sqrt{f(x)} \times \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\ dx\right)^2 = \left(\int_a^b 1\ dx\right)^2 = (b-a)^2$. Pour avoir égalité, il faut que les fonctions f et $\dfrac{1}{f}$ soient proportionnelles, donc qu'il existe une constante k telle que $f(x) = \dfrac{k}{f(x)}$, pour tout $x \in [a,b]$. Ceci implique $f(x)^2 = k$, donc $f(x) = \sqrt{k}$ (la fonction étant positive), la fonction f est donc constante. Réciproquement, toute fonction constante vérifie l'égalité.

Exercice 10 (**)

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à f et à f^2 assure que $\displaystyle\left(\int_0^1 f(x)^3\ dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 f(x)^2\ dx \times \int_0^1 f(x)^4\ dx$. Mais ici, l'hypothèse de l'exercice assure que cette inégalité est une égalité. Les fonctions f et f^2 sont donc proportionnelles sur $[0,1]$. Il existe une constante k telle que, $\forall x \in [0,1]$, $f(x)^2 = kf(x)$, soit $f(x) = k$ (sauf si f s'annule en x). La fonction est donc constante égale à k partout où elle ne s'annule pas. Mais comme la fonction f est continue (au moins par morceaux) pour que son intégrale existe), elle est donc constate sur $[0,1]$ (si elle prenait uniquement la valeur k et la valeur 0, le théorème des valeurs intermédiaires serait mis en défaut). Continuons à noter k cette constante (qui peut très bien être nulle), et revenons à nos hypothèses de départ : $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\ dx = k^2$; $\displaystyle\int_0^1 f(x)^3\ dx = k^3$ et $\displaystyle\int_0^1 f(x)^4\ dx = k^4$, donc on doit avoir $k^2 = k^3 = k^4$, ce qui ne peut se produire que si $k=0$ ou $k=1$ (la seule équation $k^2 = k^3$ admet uniquement 0 et 1 comme solutions). Deux fonctions sont donc convenables : les fonctions constantes égales à 0 et à 1. Si on autorise les fonctions constantes par morceaux, ça complique énormément les choses car les trois intégrales ne se calculent pas facilement.

Exercice 11 (***)

Intuitivement, $x^n f(x)$ va se rapprocher de la fonction nulle quand n tend vers $+\infty$, avec toutefois un petit souci pour $x = 1$, où on conservera une valeur égale à $f(1)$, mais qui ne devrait pas influencer énormément l'intégrale. Toutefois, démontrer que la limite est nulle est délicat. Le plus « simple » est de revenir à la définition technique de la limite. Fixons un $\varepsilon > 0$, et commençons par nous débarasser du morceau du côté de 1 : il existe sûrement un entier M tel que $|f(x)| \leqslant M$ sur $[0,1]$ (cela découle de la continuité de f), choisissons une valeur de $a \in [0,1[$ telle que $(1-a) \times M \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ (un tel a existe nécessairement puisque $\lim\limits_{a\to 1} M(1-a) = 0$). On peut alors affirmer que $\displaystyle\left|\int_a^1 x^n f(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^1 |f(x)|\ dx \leqslant \int_a^1 M\ dx \leqslant (1-a) \times M \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Occupon-nous maintenant du reste de l'intégrale, à savoir le morceau entre 0 et a. Puisque a est fixé strictement inférieur à 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$. En particulier, il existe un entier n_0 à partir duquel $a^{n+1} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2M}$. On peut alors majorer : $\left|\displaystyle\int_0^a x^n f(x)\ dx\right| \leqslant \displaystyle\int_0^a Ma^n\ dx$ (car la puissance n-ème est croissante sur $[0,a]$) $\leqslant Ma^{n+1} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Il ne reste plus qu'un petit coup d'inégalité triangulaire pour finir : $\left|\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\ dx\right| \leqslant \left|\displaystyle\int_0^a x^n f(x)\ dx\right| + \left|\displaystyle\int_a^1 x^n f(x)\ dx\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant n_0$. C'est exactement la définition du fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\ dx = 0$.

Ah mince, on me signale dans l'oreille que le calcul de cette limite est en fait complètement trivial et que je me suis beaucoup compliqué la vie pour rien : $\left|\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\ dx\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n \times M\ dx \leqslant \dfrac{M}{n+1}$, qui tend vers 0 en appliquant le théorème des gendarmes.

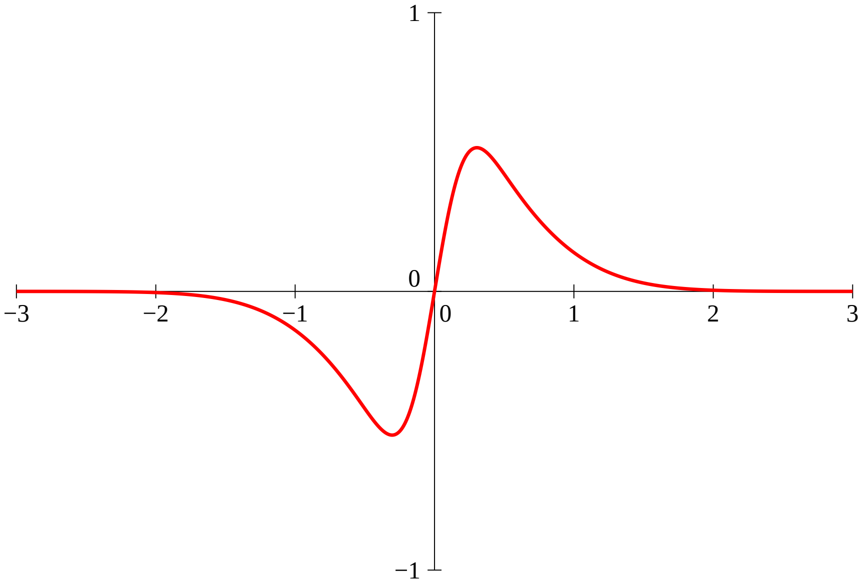
Bon, pour l'équivalent, il va tout de même falloir se fatiguer un peu plus. On peut deviner la valeur en se disant que l'intégrale de x^n devient quand n tend vers $+\infty$ quasiment entièrement portée par les valeurs de x très proches de 1, du coup $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\ dx \simeq \int_0^1 x^n f(1)\ dx = \dfrac{f(1)}{n+1} \sim \dfrac{f(1)}{n}$. En admettant que c'est effectivement l'équivalent cherché, tentons de déterminer la limite de $n \times \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\ dx$. Cette expression peut se décomposer en $n\displaystyle\int_0^1 x^n f(1)\ dx + n\int_0^1 x^n(f(1) - f(x))\ dx$. Le premier morceau vaut $nf(1)\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{nf(1)}{n+1}$, qui a pour limite $f(1)$. Essayons maintenant de majorer le deuxième morceau. On notera comme précédemment M le maximum de $|f|$ sur $[0,1]$. Fixons un $\varepsilon > 0$, par continuité de f, il existe un voisinage de 1 sur lequel $|f(x) - f(1)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. Notons donc c un réel pour lequel cette inégalité est vraie sur $[c,1]$, et découpons l'intervalle d'intégration en 2 (en majorant $|f(1) - f(x)|$ par $|f(1)| + |f(x)| \leqslant 2M$ sur le premier morceau) : $n\left|\displaystyle\int_0^1 x^n(f(1) - f(x))\ dx\right| \leqslant n\displaystyle\int_0^c x^n \times 2M\ dx + n\int_x^1 x^n \times \dfrac{\varepsilon}{2}\ dx \leqslant 2Mn\dfrac{c^{n+1}}{n+1} + \dfrac{n(1-c^{n+1})}{n+1}\dfrac{\varepsilon}{2}$. Le deuxième terme est tout simplement majoré par $\dfrac{\varepsilon}{2}$, le premier a sûrement pour limite 0 car $c < 1$. Il existe donc un entier n_0 à partir duquel le premier morceau est majoré par $\dfrac{\varepsilon}{2}$, et le tout par ε. Nous venons de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 x^n(f(1) - f(x))\ dx = 0$, donc $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\ dx \sim \dfrac{f(1)}{n}$.

Exercice 12 (***)

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction qu'on intègre est définie partout. Par ailleurs, la fonction intégrée est paire, ce qui permet de prouver que f est impaire : en faisant le changement de variables $u = -t$, $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-4x} e^{-t^2}\ dt = \int_x^{4x} -e^{-u^2}\ du = -f(x)$. En notant $g(t) = e^{-t^2}$ et G une primitive de g, on peut écrire $f(x) = G(4x) - G(x)$, donc $f'(x) = 4g(4x) - g(x) = 4e^{-16x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}(4e^{-15x^2} - 1)$. La dérivée s'annule lorsque $e^{-15x^2} = \dfrac{1}{4}$, soit $-15x^2 = -2\ln(2)$, donc $x = \pm\sqrt{\dfrac{2\ln(2)}{15}}$. La seule limite à calculer est en $+\infty$, si $x \geqslant 0$ on peut majorer e^{-t^2} par e^{-x^2} sur $[x, 4x]$, donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{4x} e^{-x^2}\ dt = 3xe^{-x^2}$, qui a une limite nulle en $+\infty$ par croissance comparée. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On peut résumer ces information dans le tableau de variations suivant (inutile d'essayer de calculer les valeurs des extrema, on note x_1 et $-x_1$ leurs abscisses pour simplifier) :

x	$-\infty$		$-x_1$		0		x_1		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-f(x_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	0

Et voici une allure de la courbe :

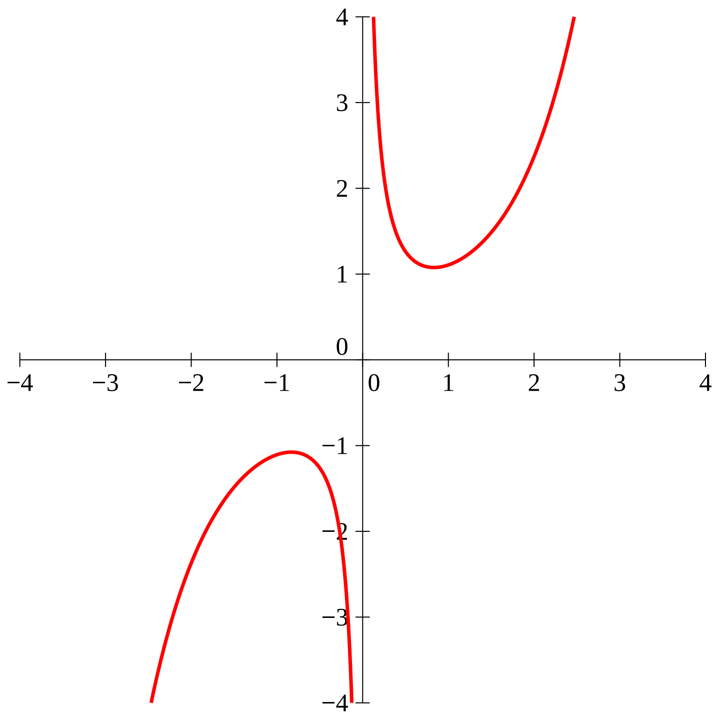


- Les techniques seront toujours les mêmes. Ici, la fonction à intégrer est définie sur $\mathbb{R}^*$ (et n'est pas prolongeable par continuité en 0), donc g sera définie également sur $\mathbb{R}^*$ (si $x \neq 0$, $0 \notin [x, 2x]$). La fonction g est par ailleurs impaire comme intégrale d'une fonction paire, comme on vient de le prouver pour la fonction précédente. On se contentera donc d'étudier la fonction g sur $\mathbb{R}^{+*}$. On dérive comme d'habitude : en posant $f(t) = \dfrac{\operatorname{ch}(t)}{t^2}$ et F une primitive de f, alors $g(x) = F(2x) - F(x)$, donc $g'(x) = 2f(2x) - f(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(2x) - 2\operatorname{ch}(x)}{2x^2}$. Or, $\operatorname{ch}(2x) = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2 - 2}{2} = 2\operatorname{ch}^2(x) - 1$, donc $g'(x)$ est du signe de $2\operatorname{ch}^2(x) - 2\operatorname{ch}(x) - 1$. En posant $X = \operatorname{ch}(x)$, on est ramenés à la résolution de l'équation $2X^2 - 2X - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 12$, et admet pour racines $X_1 = \dfrac{2 + \sqrt{12}}{4} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$, et $X_2 = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$. On ne garde que la première racine, la seconde étant plus petite que 1 et ne pouvant convenir comme valeur de $\operatorname{ch}(x)$. On est maintenant ramenés à résoudre l'équation $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$, soit $e^x + e^{-x} = 1 + \sqrt{3}$. En posant cette fois-ci $X = e^x$, on se retrouve à devoir résoudre $X^2 - (1 + \sqrt{3})X + 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = (1 + \sqrt{3})^2 - 4 = 2\sqrt{3}$, et pour racines $X_3 = \dfrac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$, et $X_4 = \dfrac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$. La deuxième valeur est inférieure à 1 car $2\sqrt{3} > 3$, donc mènera à une valeur de x négative qui ne nous intéresse pas (qui est en fait l'opposé de celle qu'on va garder). On se contentera de garder comme valeur d'annulation de g' le nombre $x_0 = \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\right)$. Ouf ! Évidemment, voilà encore une valeur pour laquelle on sera incapable de déterminer ne serait-ce qu'une valeur approchée du maximum.
  On peut par contre déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$: $\forall t \in [x, 2x]$, $\operatorname{ch}(x) \leqslant \operatorname{ch}(t) \leqslant \operatorname{ch}(2x)$, et $\dfrac{1}{4x^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, donc $\dfrac{\operatorname{ch}(x)}{4x^2} \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{\operatorname{ch}(2x)}{x^2}$, puis par intégration sur le segment

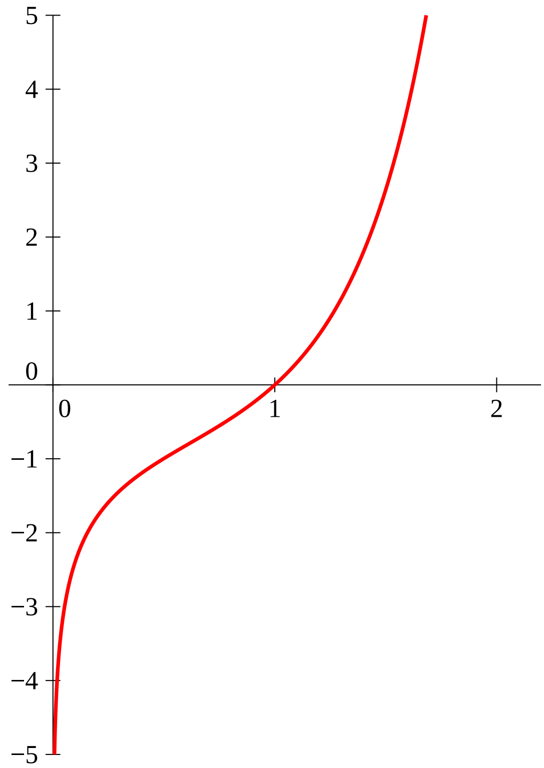
$[x, 2x]$, $\dfrac{\text{ch}(x)}{4x} \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{\text{ch}(2x)}{x}$. Par croissance comparée, le membre de gauche tend vers $+\infty$ en $+\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (il y aura même une branche parabolique de direction (Oy). En 0, chacun des deux membres tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. On en déduit évidemment les limites en 0^- et en $-\infty$ par imparité de la fonction, et on peut dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-x_0$		0		x_0		$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	$-f(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Et une allure de la courbe :



- Et une dernière pour la route, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ (et n'est pas prolongeable par continuité en 0), donc $h(x)$ existe si $0 \notin [x, x^2]$, ce qui est le cas si $x > 0$. Autrement dit, $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}^{+*}$. Comme d'habitude, $h(x) = F(x^2) - F(x)$, donc $h'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \dfrac{2xe^{x^2}}{x^2} - \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{2e^{x^2} - e^x}{x}$. Cette dérivée est du signe de $2e^{x^2} - e^x = e^x(2e^{x^2 - x} - 1)$. Elle est positive lorsque $x^2 - x \geqslant -\ln(2)$, or $x^2 - x$ admet son minimum en $\dfrac{1}{2}$, de valeur $-\dfrac{1}{4} \geqslant -\ln(2)$. La fonction h est donc croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. On peut ajouter facilement que $h(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 1$, mais $h(x) \leqslant 0$ sur $]0, 1]$ puisque les bornes de l'intégrale sont alors « dans le mauvais sens ». Les limites sont assez faciles à calculer : $\forall x \geqslant 1$, $h(x) \geqslant \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^x}{x^2}\, dt = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^x$, ce qui suffit à prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. Par ailleurs, $\forall x \in]0, 1]$, $h(x) \leqslant \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t}\, dt$ (n'oubliez pas que les bornes sont dans le mauvais sens), donc $h(x) \leqslant \ln(x^2) - \ln(x) = \ln(x)$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = -\infty$. Pas de tableau de variations cette fois-ci (il n'y aurait pas grand chose à mettre dedans), on se contentera d'une dernière allure de courbe :



Exercice 13 (***)

1. (a) Prenons deux réels x et y dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$. On a alors $e^{-tx} > e^{-ty}$ pour tout $t \in [0;1]$. De même $t^k e^{-tx} > t^k e^{-ty}$ et on peut intégrer cette inégalité, ce qui donne exactement $f_k(x) > f_k(y)$, donc f_k est bien décroissante.

   (b) On a $f_k(0) = \displaystyle\int_0^1 t^k \, dt = \frac{1}{k+1}$. La suite $(f_k(0))$ est donc décroissante et tend vers 0. Or, f_k étant positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $\forall x > 0$, $0 \leqslant f_k(x) \leqslant \dfrac{1}{k+1}$, ce qui suffit à assurer via le théorème des gendarmes que $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

2. (a) Il s'agit de faire une IPP en posant $u(t) = t^{k+1}$ et $v'(t) = e^{-tx}$, donc $u'(t) = (k+1)t^k$ et $v(t) = -\dfrac{e^{-tx}}{x}$ (faites bien gaffe que la variable ici est t et x est donc une constante). On obtient $f_{k+1}(x) = \left[-t^{k+1}\dfrac{e^{-tx}}{x}\right]_0^1 + (k+1)\displaystyle\int_0^1 t^k \frac{e^{-tx}}{x} \, dx = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{k+1}{x} f_k(x)$.

   (b) On a $f_0(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-tx} \, dt = \left[-\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^1 = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1 - e^{-x}}{x}$. On peut utiliser la question précédente pour calculer les fonctions suivantes : $f_1(x) = \dfrac{1}{x} f_0(x) - \dfrac{e^{-x}}{x} = \dfrac{1}{x^2}(1 - e^{-x} - xe^{-x})$, puis $f_2(x) = \dfrac{2}{x} f_1(x) - \dfrac{e^{-x}}{x} = \dfrac{1}{x^3}(2 - 2e^{-x} - 2xe^{-x} - x^2 e^{-x})$.

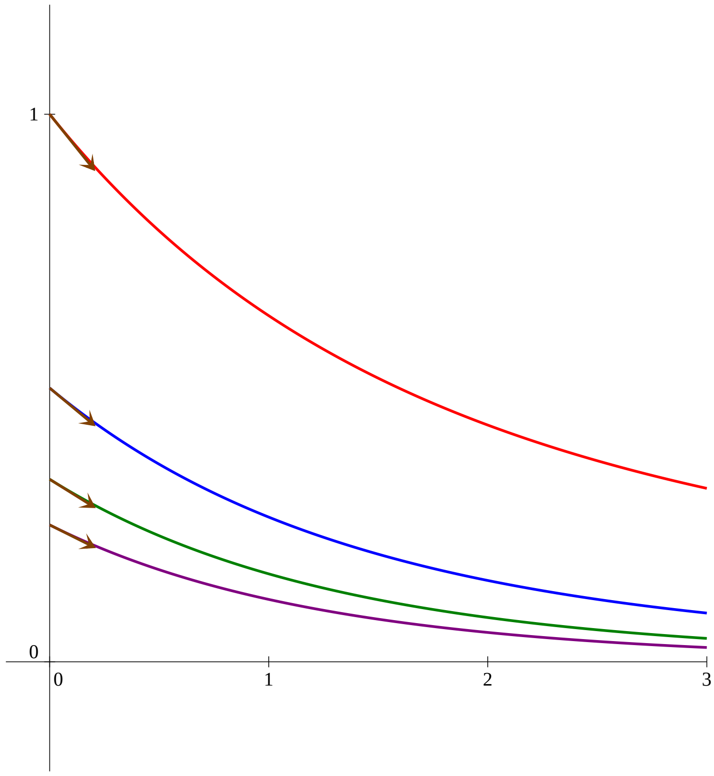
   (c) Il suffit de reprendre l'expression trouvée : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 1 - e^{-x} = 1$, donc $f_0 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

   (d) Il faut faire une récurrence : on vient de montrer le résultat pour $k = 0$. Supposons le vrai pour f_k, on a alors $f_{k+1}(x) = \dfrac{f_k(x)}{x}\left(k + 1 - \dfrac{e^{-x}}{f_k(x)}\right)$. La parenthèse tend vers $k+1$ car l'exponentielle négative, par croissance comparée, l'emporte sur f_k qui est par hypothèse de récurrence équivalente à une fonction puissance. On a donc $f_{k+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k+1}{x} f_k \sim \dfrac{k+1}{x} \dfrac{k!}{x^{k+1}} \sim \dfrac{(k+1)!}{x^{k+2}}$, ce qui achève la récurrence.

3. (a) Le changement de variable est $u = tx$, qui donne $du = x\ dt$, et change les bornes de l'intégrale en 0 et x, ce qui donne donc $f_k(x) = \displaystyle\int_0^1 t^k e^{-tx}\ dt = \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^k e^{-u}\ \frac{du}{x} = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u}\ du.$

   (b) On vient d'écrire $f_k(x)$ sous la forme d'un produit $g(x)h(x)$, où $g(x) = \dfrac{1}{x^{k+1}}$, et donc $g'(x) = -\dfrac{k+1}{x^{k+2}}$, et $h(x) = \displaystyle\int_0^x u^k e^{-u}\ du$, donc $h'(x) = x^k e^{-x}$. On en déduit que $f_k'(x) = -\dfrac{k+1}{x^{k+2}} h(x) + \dfrac{1}{x^{k+1}} x^k e^{-x} = -\dfrac{k+1}{x} f_k(x) + \dfrac{e^{-x}}{x}$. On vient donc de montrer, en reprenant le résultat de la question 2.a, que $f_k' = -f_{k+1}$.

   (c) On étudie la fonction $y \mapsto 1 - e^{-y} - y$ sur $\mathbb{R}^+$. sa dérivée vaut $e^{-y} - 1$, qui est négative sur l'intervalle d'étude. Or, pour $y = 0$, la fonction est nulle. Elle est donc bien négative sur $\mathbb{R}^+$ (comme souvent, on peut alternativement invoquer un argument de convexité).
   On a donc $f_k(x) - f_k(0) = \displaystyle\int_0^1 t^k e^{-tx}\ dt - \int_0^1 t^k\ dt = \int_0^1 t^k(e^{-tx} - 1)\ dt \geqslant \int_0^1 t^{k+1} x\ dt = \frac{x}{k+2}$. Quand x tend vers 0, ceci tend vers 0. Comme par ailleurs $f_k(x) - f_k(0)$ est négatif puisque f_k est décroissante, la fonction f_k est bien continue en 0.
   Pour la dérivée, on utilise ce bon vieux théorème du prolongement C^1 ! La fonction f_k est dérivable et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f_k' = -f_{k+1}$. On vient de voir que f_{k+1} était continue en 0, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f_{k+1}(x) = f_{k+1}(0) = \frac{1}{k+2}$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f_k'(x) = -\frac{1}{k+2}$ puis que f_k est dérivable en 0, de dérivée $f_k'(0) = -\dfrac{1}{k+2}$. Les courbes des fonctions f_k sont assez décevantes, mais voici l'allure des quatre premières (f_0 à f_3, de haut en bas), les valeurs et tangentes en 0 correspondant évidemment aux valeurs calculées) :



Exercice 14 (**)

- Le but est donc de faire apparaitre une somme de Riemann, ce qui consiste en gros à sortir un $\dfrac{1}{n}$ de la somme et à exprimer ce qui reste dans la somme en fonction de $\dfrac{k}{n}$ uniquement : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2(1+(\frac{k}{n})^2)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\frac{k}{n}}{1+(\frac{k}{n})^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Le théorème de convergence des sommes de Riemann permet alors d'affirmer que (u_n) converge et que sa limite vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.
- Même méthode : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$, donc (v_n) converge vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\,dx = \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 = \sqrt{3}-1$.
- Pour w_n, c'est un peu plus subtil, il vaut mieux étudier $\ln(w_n)$ et surtout se rendre compte que $\ln(n!) = \ln(1\times 2\times\cdots\times n) = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n$. On a alors : $\ln w_n = \dfrac{1}{n}(\ln((2n)!) - n\ln n - \ln(n!)) = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{k=2n} \ln k - n\ln n - \sum_{k=1}^{k=n} \ln k\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=2n} (\ln k - \ln n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{k=2n} \ln\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln\frac{n+k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$, donc $(\ln w_n)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \int_1^2 \ln u\,du = [x\ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 1$, et (w_n) converge vers $e^{2\ln 2-1} = \dfrac{4}{e}$.

Exercice 15 (****)

1. Erreur d'énoncé : il faut remplacer le $X - \pi$ par $\pi - X$. En n'oubliant pas l'hypothèse $\pi = \frac{p}{q}$, $P_n(X - \pi) = \frac{1}{n!}\left(\frac{p}{q} - X\right)^n (p - p + qX)^n = \frac{1}{n!}\frac{p - qX)^n}{q^n} \times q^n X^n = P_n(X)$.
2. Si $\pi = \frac{p}{q}$, $p - qt$ est positif sur $[0, \pi]$, donc l'intégrale est celle d'une fonction positive, elle est positive.
3. Prouvons-le pour 0 : comme il est racine de multiplicité n de P_n, il annule déjà toutes les dérivées k-èmes lorsque $k < n$. Supposons désormais $k > n$, en appliquant la formule de Leibniz au produit $X^n(p - qX)^n$, la seule dérivée de X^n ne s'annulant pas en 0 est la dérivée n-ème, qui vaut $n!$, donc $P_n^{(k)}(0) = \frac{1}{n!}\binom{n}{k} n!((p - qX)^n)^{(k-n)}(0)$. Les $n!$ se simplifient, le coefficient binômial est un entier, il suffit de prouver que la dérivée restante est aussi entière. Elle sera nulle si $k-n > n$, soit $k < 2n$, sinon $((p-qX)^n)^{(k-n)} = n(n-1)\dots(2n-k+1)(p-qX)^{2n-k}$, qui prend pour valeur en 0 le nombre $\frac{n!}{(2n-k)!}p^{2n-k}$, qui est certainement un entier. On a bien prouvé que $P_n^{(k)}(0)$ était toujours un entier. Comme $P_n(\pi - X) = P_n(X)$, $P_n^{(k)}(\pi) = (-1)^k P_n^{(k)}(0)$ est également un entier.
4. Pour $n = 0$, $I_0 = \int_0^\pi \sin(t)\ dt = [-\cos(t)]_0^\pi = 2 \in \mathbb{N}$. Prenons maintenant un entier supérieur ou égal à 1, et effectuons deux intégrations par partie successives (en dérivant P_n à chaque fois), en exploitant le fait que P_n s'annule en 0 et en π (c'est le cas de tous les polynômes P_n à partir de $n = 1$) et, comme on vient de le voir, que les dérivés P'_n prennent des valeurs entières en 0 et en π. On calcule donc $I_n = [-P_n(t)\cos(t)]_0^\pi + \int_0^\pi P'_n(t)\cos(t)\ dt = \int_0^\pi O'_n(t)\cos(t)\ dt$ (le crochet s'annule) $= [P'_n(t)\sin(t)]_0^\pi - \int_0^\pi P''_n(t)\sin(t)\ dt = -\int_0^\pi P''(t)\sin(t)\ dt$. Bon, ben il ne reste plus qu'à recommencer, en faisant attention au fait que les crochets ne vont pas continuer à tous s'annuler : à l'étape suivante $P''(t)\cos(t)$ ne s'annule plus en 0 et en π. Par contre ce qui est certain, c'est qu'il prend une valeur entière en 0 et en π, donc on peut écrire $I_n = a_3 - \int_0^\pi P^{(3)}(t)\cos(t)\ dt = a_3 + \int_0^\pi P^{(4)}(t)\sin(t)\ dt$, avec $a_3 \in \mathbb{Z}$. Et on continue. À chaque étape, le premier crocher donnera un nombre entier, et le second s'annulera, pour donner $I_n = a_{2k-1} + (-1)^k \int_0^\pi P^{(2k)}(t)\sin(t)\ dt$, avec $a_{2k-1} \in \mathbb{Z}$. Pour être rigoureux, ça se démontre bien sûr par récurrence : on a vu plus haut que c'était vrai pour $k = 1$ et $k = 2$ et en le supposant au rang k, avec deux IPP de plus, $I_n = a_{2k-1} + \int_0^\pi P^{(2k)}(t)\sin(t)\ dt = a_{2k-1} + [(-1)^{k+1}P^{(2k)}(t)\cos(t)] + (-1)^k \int_0^\pi P^{(2k+1)}(t)\cos(t)\ dt = a_{2k+1} + [(-1)^k P^{(2k+1)}(t)\sin(t)]_0^\pi + (-1)^{k+1}\int_0^\pi P^{(2k+2)}(t)\sin(t)\ dt$, où a_{2k+1} est égal à a_{2k-1} plus la valeur du crochet avec le cosinus, ce qui donne bien à nouveau un nombre entier. Par principe de récurrence, la formule est vraie pour tout entier k, et en particulier pour $k = n$, valeur pour laquelle $\int_0^\pi P^{(2k)}(t)\sin(t)\ dt = 0$, puisque $P^{(2n)} = 0$. Il ne reste plus alors que $I_n = a_{2n-2} \in \mathbb{Z}$. Comme par ailleurs $I_n \geqslant 0$, $I_n \in \mathbb{N}$.
5. La fonction $x \mapsto x(p - qx)$ étant continue sur $[0, \pi]$, elle y atteint un maximum M (qu'on peut d'ailleurs calculer explicitement si on le souhaite), donc $P_n(t) \leqslant \frac{1}{n!}M^n$ sur $[0, \pi]$, et $I_n \leqslant \int_0^\pi \frac{M^n}{n!}\sin(t)\ dt = \frac{2M^n}{n!}$, qui a une limite nulle quand n tend vers $+\infty$. Puisque la suite est constituée de nombres entiers, elle est forcément nulle à partir d'un certain rang n_0 (par

application de la définition de la limite avec par exemple $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on doit avoir $-\frac{1}{2} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2}$ à partir d'un certain rang, donc $I_n = 0$). Mais comme on a vu que la fonction sous l'intégrale était toujours positive sur $[0, \pi]$, avoir une intégrale nulle signifie que $P_n(t)\sin(t)$ vaut toujours 0 entre 0 et π. En particulier, le polynôme P_n doit s'annuler une grosse infinité de fois (puisque sin ne s'annule qu'une seule fois sur l'intervalle), ce qui implique que P_n est le polynôme nul. Voilà une grosse absurdité, P_n n'est manifestement pas égal à 0, donc notre hypothèse de départ est fausse et π ne peut pas être rationnel.

Problème : Intégrales de Wallis et formule de Stirling.

Calcul des intégrales de Wallis.

1. Allons-y : $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\ dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
2. Il suffit de penser à effectuer le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ (donc $du = -dt$), qui se contente d'échanger les bornes de l'intégrale et surtout de transormer le sin en $\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos(u)$. On obtient alors immédiatement $I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\cos^n(u)\ du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u)\ du$.
3. Il faut penser pour l'IPP à poser $u(t) = \sin^{n+1}(t)$ et $v'(t) = \sin(t)$, donc $u'(t) = (n+1)\cos(t)\sin^(t)$ et $v(t) = -\cos(t)$, pour obtenir $I_n = [-\cos(t)\sin^n(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^n(t)\ dt = 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t))\sin^n(t)\ dt = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) - \sin^{n+2}(t)\ dt = (n+1)(I_n - I_{n+2})$.
   On en déduit que $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, soit $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$.
4. D'après la question précédente, $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p}I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)}I_{2p-4} = \dots$
   $= \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2}I_0 = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\dots 2\times 1}{(2p^2)(2p-2)^2\dots 2^2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p^2(p-1)^2\dots 1^2}\times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2}$. De même, $I_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 3}\times I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.
5. Puisque le sinus est positif entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ (et évidemment plus petit que 1), on a $\sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$ sur cet intervalle, donc par intégration $I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite est donc décroissante. Elle est positive donc minorée, donc convergente.
6. Il suffit d'appliquer la décroissance de la suite (I_n) pour obtenir $\frac{I_n}{I_n} \leqslant \frac{I_n}{I_{n+1}} \leqslant \frac{I_n}{I_{n+2}}$, soit $1 \leqslant \frac{I_n}{I_{n+1}} \leqslant \frac{n+1}{n+2}$ en reprenant le résultat de la question 3. Puisque le membre de droite a pour limite 1, une simple application du théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$.
7. Plusieurs possibilités ici. Soit on reprend les formules obtenues à la question 4 et on constate de grosses simplifications : $I_{2n+1}I_{2n} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\times\frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} = \frac{\pi}{2\times(2n+1)}$, et de même $I_{2n}I_{2n-1} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}\times\frac{2^{2n-2}(n-1!)^2}{(2n-1)!} = \frac{2n\pi}{2^3n^2} = \frac{\pi}{2\times 2n}$. Dans les deux cas, que n soit pair ou impair, $I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$.
   Autre possibilité, constater que $(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n$ en reprenant la relation de la question 3, donc la suite $((n+1)I_{n+1}I_n)$ est constante égale à son premier terme $I_1I_0 = \frac{\pi}{2}$.

8. En exploitant les deux questions précédentes, $I_{n+1} \sim I_n$, et $I_{n+1}I_n \sim I_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$, donc $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Un résultat technique.

1. La fonction f étant concave, elle est située au-dessus de ses cordes, donc f est toujours supérieure à g sur l'intervalle $[a, b]$ et l'inégalité sur les intégrales en découle.
2. Si $t = a$ ou $t = b$, par construction, $f(t) - g(t) = 0$ donc l'inégalité est toujours vérifiée. Fixons donc $t \in]a, b[$, et posons $K = \dfrac{f(t) - g(t)}{(t-a)(t-b)}$, de façon à avoir $h(t) = 0$. La fonction h s'annule par ailleurs en a et en b, puisque $f(x) - g(x)$ et $K(x-a)(x-b)$ s'annulent tous les deux en a comme en b. En appliquant le théorème de Rolle sur chacun des deux intervalles $[a, t]$ et $[t, b]$, la dérivée h' s'annule une première fois en $t_1 \in]a, t[$, et une deuxième fois en $t_2 \in]t, b[$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle à h' sur $[t_1, t_2]$ (la fonction h est $\mathcal{C}^2$ puisque f est supposée $\mathcal{C}^2$) pour prouver l'existence d'un réel $t_3 \in]t_1, t_2[$ tel que $h''(t_3) = 0$. Or, $h''(x) = f''(x) - 2K$ (la fonction g étant affine, sa dérivée seconde est nulle), donc $2K = f''(x)$ et $|2K| \leqslant M$ par définition de M. Comme $h(t) = 0$, on trouve alors $|f(t) - g(t)| = |K(t-a)(t-b)| \leqslant \dfrac{M(t-a)(b-t)}{2}$, ce qui est l'inégalité demandée.
3. Il suffit d'intégrer l'inégalité précédente entre a et b : $\displaystyle\int_a^b f(t) - g(t)\ dt \leqslant \frac{M}{2}\int_a^b (t-a)(b-t)\ dt$. Or, $\displaystyle\int_a^b (t-a)(b-t)\ dt = \int_a^b -t^2 + (a+b)t - ab\ dt = \left[-\frac{t^3}{3} + (a+b)\frac{t^2}{2} - abt\right]_a^b = \frac{a^3 - b^3}{3} + \frac{(a+b)(b^2 - a^2)}{2} + ab(a-b) = \frac{2a^3 - 2b^3 + 3ab^2 - 3a^3 + 3b^3 - 3ba^2 + 6a^2b - 6ab^2}{6} = \frac{b^3 - 3ab^2 + 3a^2b - a^3}{6} = \frac{(b-a)^3}{6}$, donc $\displaystyle\int_a^b f(t) - g(t)\ dt \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12}$.
4. La fonction ln est concave, de dérivée seconde $-\dfrac{1}{x^2}$. Sur l'intervalle $[n, n+1]$, sur lequel on va tenter d'appliquer le résultat précédent, cette dérivée seconde est majorée en valeur absolue par $M = \dfrac{1}{n^2}$. La fonction g est la fonction affine vérifient $f(n) = \ln(n)$ et $f(n+1) = \ln(n+1)$. Pour calculer son intégrale, plutôt que de s'embêter à l'expliciter, on constate qu'il s'agit de l'aire d'un trapèze de largeur 1 et de hauteurs $\ln(n)$ et $\ln(n+1)$, donc $\displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\ dt = \frac{\ln(n) + \ln(n+1)}{2}$. De plus, $\displaystyle\int_n^{n+1} \ln(t)\ dt = [t\ln(t) - t]_n^{n+1} = (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - n\ln(n) + n = (n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) - 1$, donc $\displaystyle\int_n^{n+1} \ln(t) - g(t)\ dt = (n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) - 1 - \frac{1}{2}\ln(n+1) - \frac{1}{2}\ln(n) = \left(n + 1\frac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \leqslant \frac{M(n+1-n)^3}{12} = \frac{1}{12n^2}$.

Formule de Stirling.

1. Les deux suites sont bien sûr définies à partir de $n = 2$. Déjà $v_n - u_n = \dfrac{1}{12(n-1)}$ tend clairement vers 0. De plus, $u_{n+1} - u_n = \ln((n+1)^{n+\frac{3}{2}}e^{-n-1}) - \ln((n+1)!) - \ln(n^{n+1\frac{1}{2}}e^{-n}) + \ln(n!) = \left(n + \dfrac{3}{2}\right)\ln(n+1) - n - 1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln(n) + n - \ln(n+1) = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \geqslant 0$ d'après les résultats de la deuxième partie (quel hasard tout de même qu'on tombe pile poil sur cette expression !). De même, $v_{n+1} - v_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 + \dfrac{1}{12n} - \dfrac{1}{12(n-1)} = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 - \dfrac{1}{12n(n-1)} \leqslant \dfrac{1}{12n^2} - \dfrac{1}{12(n^2 - n)} \leqslant 0$

(on a exploité la deuxième inégalité obtenue dans la deuxième partie). Les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante, elle sont donc bien adjacentes.

2. Notons l la limite commune des deux suites, alors $\lim_{n\to+\infty} 2u_n - u_{2n} = 2l - l = l$. Par ailleurs, $2u_n - u_{2n} = \ln(n^{2n+1}e^{-2n}) - \ln((n!)^2) - \ln((2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}) + \ln((2n)!)$ (multiplier le ln par 2 revient à élever au carré tout ce qui se trouve à l'intérieur), donc $2u_n - u_{2n} = \ln\left(\frac{\sqrt{n}(2n)!}{2^{2n+\frac{1}{2}}(n!)^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n((2n)!)^2}{2^{4n+1}(n!)^4}\right)$. Il est temps de faire le lien avec la première partie : $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \times \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n)!\pi} = \frac{2^{4n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^2\pi}$. Voilà qui ressemble à ce qu'on avait juste avant : $e^{2(2u_n - u_{2n})} = \frac{n}{(2n+1)\pi}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \sim \frac{1}{2\pi}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \sim \frac{1}{2\pi}$, puisqu'on a vu dans la première partie que $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$. Conclusion : $e^{2l} = \frac{1}{2\pi}$, soit $l = -\frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

3. Reprenons l'expression de u_n : $e^{-2u_n} \sim 2\pi$ (c'est ce qu'on vient de démontrer à la question précédente), soit $\frac{(n!)^2}{n^{2n+1}e^{-2n}} \sim 2\pi$, soit $n! \sim n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi} \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$, ce qui constitue la fameuse formule de Stirling.