Feuille d'exercices n°15 : Intégration

PTSI B Lycée Eiffel

12 avril 2013

Exercice 1 (* à **)

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes (aucun des calculs de cet exercice ne nécessite de technique spéciale sur les fractions rationnelles ou autres) :

- $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)^3}$
- $f(x) = \cos(x)\sin(x)$
- $f(x) = \arctan(x)$
- $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)}$
- $f(x) = x\sin^3(x)$
- $f(x) = x\sqrt{1+2x^2}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x + x\ln^2(x)}$
- $f(x) = \mathrm{ch}(x)\cos(x)$
- $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$
- $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$
- $f(x) = \mathrm{Argsh}(3x)$
- $f(x) = \ln(1+x^2)$
- $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$
- $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$
- $f(x) = \mathrm{th}(x)$

Exercice 2 (* à **)

Calculer les intégrales suivantes (aucun des calculs de cet exercice ne nécessite de technique spéciale sur les fractions rationnelles ou autres) :

- $\displaystyle\int_0^1 (x-2)(x+1)^5\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e x^2(\ln x)^3\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \mathrm{ch}^2(x)\,\mathrm{sh}^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e x\ln^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\ dx$
- $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin(x)}{1-x^2}}\ dx$
- $\displaystyle\int_0^3 x\,Ent(x)\ dx$
- $\displaystyle\int_1^5 |x^2-5x+6|\ dx$

Exercice 3 (** à ***)

Calculer les intégrales et primitives suivantes (**beaucoup** des calculs de cet exercice nécessitent des techniques spéciales sur les fractions rationnelles ou autres) :

- $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x(x+1)}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{x^2-3x-4}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{(x^2+1)(x-2)}\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx$
- $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^4+x^2+1)^2}\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{\cos(x)-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$
- $\displaystyle\int \arctan(\sqrt[3]{x})\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{\sqrt{x}}}\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{1}{5+4\sin(x)}\,dx$
- $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x+\sqrt{x-1}}\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{\tan(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx$
- $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x}$
- $\displaystyle\int \arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\,dx$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1-\operatorname{th}(x)}\,dx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+2)^2}\,dx$

Exercice 4 (**)

On définit, pour tout entier n, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^e x^2(\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_1.
2. Montrer que sur $[1;e]$, on a $(\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$, et en déduire le sens de variation de I_n.
3. Montrer que (I_n) est convergente.
4. Montrer que sur $[1;e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant \dfrac{x}{e}$. En déduire la limite de I_n.
5. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3}I_n$. En déduire un équivalent de I_n.

Exercice 5 (**)

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln 2$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln 2 - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln 2 - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
7. Donner la limite de la suite (u_n).

Exercice 6 (*)

On considère la suite définie par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.

2. Déterminer la limite de la suite (I_n).
3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. On note désormais $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, exprimer S_n en fonction de I_n.
5. Déduire des questions précédentes la convergence et la limite de la suite (S_n).

Exercice 7 (***)

Soit f une fonction telle que $\forall k \leqslant n$, $\int_0^1 t^k f(t)\, dt = 0$, montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[0;1]$.

Exercice 8 (*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

1. Montrer que f est dérivable et déterminer sa dérivée. En déduire le tableau de variations de f.
2. On pose désormais $g(x) = f(x) - \ln x$. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire son signe.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 9 (**)

On considère une fonction f strictement positive sur le segment $[a;b]$. Montrer que $\int_a^b f(x)\, dx \times \int_a^b \frac{1}{f(x)}\, dx \geqslant (b-a)^2$. Quand a-t-on égalité ?

Exercice 10 (**)

Déterminer toutes les fonctions f vérifiant $\int_0^1 f(x)^2\, dx = \int_0^1 f(x)^3\, dx = \int_0^1 f(x)^4\, dx$.

Exercice 11 (***)

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$. Déterminer la limite puis un équivalent simple de $\int_0^1 x^n f(x)\, dx$.

Exercice 12 (***)

Étudier les fonctions suivantes :

- $f(x) = \int_x^{4x} e^{-t^2}\, dt$
- $g(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{ch}(t)}{t^2}\, dt$
- $h(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\, dt$

Exercice 13 (***)

Pour tout entier naturel k on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}^+$ par la relation

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt$$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Etudier la suite $(f_k(0))_{k\geqslant 0}$. En déduire, pour tout réel positif x, la limite de la suite $(f_k(x))_{k\geqslant 0}$.
2. (a) Soit $x > 0$. Etablir que $f_{k+1}(x) = \dfrac{k+1}{x} f_k(x) - \dfrac{e^{-x}}{x}$ pour tout $k \geqslant 0$.
   (b) Expliciter les fonctions f_0, f_1 et f_2.
   (c) Montrer que, $f_0(x) \underset{+\infty}{\sim} 1/x$.
   (d) A l'aide de la relation établie au $c)$, montrer que pour tout k, $f_k(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k!}{x^{k+1}}$.
3. (a) En effectuant un changement de variable, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0$, $f_k(x) = \dfrac{1}{x^{k+1}} \displaystyle\int_0^x u^k e^{-u}\, du$.
   En déduire que f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
   (b) Trouver une relation simple entre f'_k et f_{k+1}.
   (c) Montrer que pour tout réel $\forall y \geqslant 0$, $1 - e^{-y} \leqslant y$. En déduire que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est continue en 0. Est-elle dérivable à droite en ce point ?

Exercice 14 (**)

Déterminer les limites de chacune des suites suivantes en utilisant des sommes de Riemann.

- $u_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{k}{n^2 + k^2}$
- $v_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$
- $w_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 15 (****)

Le but de cet exercice est de montrer par l'absurde que π est un nombre irrationnel. Supposons donc que $\pi = \dfrac{p}{q}$ (n'oubliez pas cette hypothèse dans la suite de l'exercice), et posons $P_n(X) = \dfrac{1}{n!} X^n (p - qX)^n$, et $I_n = \displaystyle\int_0^\pi P_n(t)\sin(t)\, dt$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(X - \pi) = P_n(X)$.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, et $P_n^{(n)}(\pi) \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \in \mathbb{N}$ (on pourra procéder à des intégrations par parties successives).
5. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. En déduire que l'hypothèse initiale est absurde.

Problème : Intégrales de Wallis et formule de Stirling.

Calcul des intégrales de Wallis.

Pour tout entier n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\ dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ dt$.
3. À l'aide d'une intégration par partie, déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n.
4. En déduire les valeurs de I_{2p} et I_{2p+1} (on les exprimera à l'aide de factorielles).
5. Déterminer la monotonie de la suite (I_n) puis prouver sa convergence.
6. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}}$.
7. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.
8. Déterminer un équivalent simple de I_n.

Un résultat technique.

Soit f une fonction concave sur un segment $[a;b]$ et $M = \sup_{x\in[a;b]} |f''(x)|$. On note g la fonction affine vérifiant $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$.

1. Expliquer (sans calcul !) pourquoi $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \geqslant \int_a^b g(t)\ dt$.
2. Montrer que, $\forall t \in [a;b]$, $f(t) - g(t) \leqslant M\dfrac{(t-a)(b-t)}{2}$ (on pourra introduire la fonction $h(x) = f(x) - g(x) - K(x-a)(x-b)$, où K est une constante choisie pour assurer $h(t) = 0$).
3. En déduire que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt - \int_a^b g(t)\ dt \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12}$.
4. Appliquer ce résultat à la fonction ln pour prouver que
$0 \leqslant \left(n + \dfrac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \leqslant \dfrac{1}{12n^2}$.

Formule de Stirling.

On introduit les deux suites $u_n = \ln(n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}) - \ln(n!)$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{12(n-1)}$.

1. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes (on pourra bien sûr exploiter les résultats des deux premières parties de l'exercice).
2. Montrer que leur limite commune est égale à $-\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$ (on pourra s'intéresser à la limite de $2u_n - u_{2n}$).
3. En déduire un équivalent de $n!$.