Feuille d'exercices n°10 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

25 janvier 2013

Exercice 1 (**)

1. Le maximum est certainement une loi de composition interne sur $\mathbb{N}$. Elle est clairement commutative, et presque aussi clairement associative puisque $\max(\max(x,y),z) = \max(x,\max(y,z)) = \max(x,y,z)$. Par contre, il n'y a pas d'élément neutre pour cette loi pusique pour tout entier n, $\max(n,n+1) = n+1 \neq n$. Il ne peut donc pas y avoir de notion de symétrisabilité non plus.
2. La loi $\star$ est certainement interne, et accessoirement commutative. Vérifions l'associativité : $x\star(y\star z) = x+y\star z - x(y\star z) = x+y+z-yz-xy-xz+xyz$. Par une simple permutation des variables, en utilisant la commutativité, $(x\star y)\star z = z\star(x\star y) = z+x+y-xy-zx-zy+zxy = x\star(y\star z)$, donc la loi est associative. Elle admet pour élément neutre 0 : $0\star y = 0+y-0 = y$. Un réel x admet y pour symétrique si $x\star y = 0$, soit $x = xy-y$, donc $y = \dfrac{x}{x-1}$. Le réel 1 n'est donc pas symétrisable (en fait, c'est un élément absorbant pour la loi $\star$), mais tous les autres réels le son. En fait, $(E\backslash\{1\},\star)$ est un groupe commutatif.
3. La loi $\star$ est interne sur $\mathbb{Z}$, et manifestement commutative. L'associativité est moins claire, elle découle des proriétés des congruences que nous n'étudierons pas vraiment cette année. En tout cas, la loi ne peut pas avoir d'élement neutre puisque $x\star y$ ne peut prendre comme valeurs que 0, 1 et 2. Par exemple, on ne pourra jamais avoir $e\star 4 = 4$. Pas de symétrique non plus du coup.
4. La loi est bien définie (ce qu'on met sous les racines carrées étant positif), interne et commutative. L'associativité est ici particulièrement immonde à vérifier : $x\star(y\star z) = x\sqrt{1+(y\star z)^2} + (y\star z)\sqrt{1+x^2} = x\sqrt{1+(y\sqrt{1+z^2}+z\sqrt{1+y^2})^2} + (y\sqrt{1+z^2}+z\sqrt{1+y^2})\sqrt{1+x^2}$
$= x\sqrt{1+y^2(1+z^2)+z^2(1+y^2)+2yz\sqrt{(1+y^2)(1+z^2)}} + y\sqrt{(1+z^2)(1+x^2)} + z\sqrt{(1+y^2)(1+x^2)}$.
Il suffit maintenant de constater la factorisation presque évidente de ce qui se trouve sous la première racine carrée : $1+y^2+y^2z^2+z^2+y^2z^2+2yz\sqrt{(1+y^2)(1+z^2)} = 1+y^2+z^2+y^2z^2+(yz)^2+2yz\sqrt{(1+y^2)(1+z^2)} = (yz+\sqrt{(1+y^2)(1+z^2)})^2$. Tout ce qui est sous le carré étant positif, on peut simplifier avec la racine carrée pour obtenir $x\star(y\star z) = xyz + x\sqrt{(1+y^2)(1+z^2)} + y\sqrt{(1+x^2)(1+z^2)} + z\sqrt{(1+x^2)(1+z^2)}$. On peut se contenter de constater que cette expression est invariante par permutation des variables pour en déduire, en exploitant la commutativité de $\star$, que la loi est associative. Il y a un élément neutre qui est simplement 0, puisque $0\star y = 0\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1} = y$. Tout élément est par ailleurs symétrisable, le symétrique de x étant $-x$: $x\star(-x) = x\sqrt{1+(-x)^2} - x\sqrt{1+x^2} = 0$. La loi $\star$ est donc une loi de groupe sur $\mathbb{R}$.
En fait, les plus malins d'entre vous peuvent trivialiser les calculs en faisant la constatation certes pas vraiment évidente suivante : $\sinh(x)\star\sinh(y) = \sinh(x)\sqrt{1+\sinh^2(y)}$
$+\sinh(y)\sqrt{1+\sinh^2(x)} = \sinh(x)\cosh(y)+\sinh(y)\cosh(x) = \sinh(x+y)$. L'application sinh, qui est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est donc un morphisme de groupes de $(\mathbb{R},+)$ vers $(\mathbb{R},\star)$.

5. Il faudrait déjà vérifier que la loi $\star$ est une lci, ce qui n'est pas évident. Si $(x,y) \in]-1;1[^2$, $|xy| < 1$, donc $1+xy \neq 0$ et $x \star y$ est bien défini. Reste à vérifier si $x \star y \in]-1;1[$. Fixons y et posons $f(x) = \dfrac{x+y}{1+xy}$, la fonction f est définie et dérivable sur $[-1;1]$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{1+xy-x(x+y)}{(1+xy)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+xy)^2} > 0$ sur $]-1;1[$. La fonction f est donc strictement croissante, comme $f(-1) = \dfrac{-1+y}{1-y} = -1$ et $f(1) = \dfrac{1+y}{1+y} = 1$, elle est bijective de $]-1;1[$ sur lui-même, ce qui prouve que la loi $\star$ est interne. Elle est clairement commutative. Pour l'associativité, c'est un peu moins pénible que le calcul précédent : $x \star (y \star z) = \dfrac{x + y \star z}{1 + x(y \star z)} = \dfrac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x\frac{y+z}{1+yz}} = \dfrac{x + xyz + y + z}{1 + yz + xy + xz}$. Cette expression étant invariante par permutation des variables, et la loi $\star$ commutative, elle est associative. Pour changer, 0 est un élément neutre puisque $0 \star y = \dfrac{0+y}{1+0} = y$, et $-x$ est un symétrique de x : $x \star (-x) = \dfrac{x-x}{1-x^2} = 0$. La loi $\star$ est donc une loi de groupe sur $]-1;1[$. Comme tout à l'heure, on peut le voir via un isomorhisme de groupes : la fonction tanh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$ et $\tanh(x) \star \tanh(y) = \dfrac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)} = \tanh(x+y)$.
6. Ici, on peut se contenter de vérifier que E est un sous-groupe de l'ensemble de toutes les fonctions. En effet, la fonction nulle appartient à E, une somme de deux éléments de E reste un élément de E, et l'opposé d'une fonction de E est aussi une fonction de E (tout celà est essentiellement trivial). La loi $+$ est donc une loi de groupe sur E.
7. La loi $\star$ est interne : si $a \neq 0$ et $c \neq 0$, alors $ac \neq 0$. Elle est commutative puisque $ad+bc = cb+da$ (et $ca = ac$ bien sûr). Vérifions l'associativité : $(a,b) \star ((c,d) \star (e,f)) = (a,b) \star (ce, cf+de) = (ace, acf + ade + bce)$, et $((a,b) \star (c,d)) \star (e,f) = (ac, ad+bd) \star (e,f) = (ace, acf + ade + bde)$. Les deux couples sont égaux, la loi est bien associative. Le couple $(1,0)$ est un élément neutre : $(1,0) \star (a,b) = (a, b+0c) = (a,b)$. Qui plus est, avec l'hypothèse $a \neq 0$, le couple (a,b) est toujours symétrisable : $(a,b) \star (c,d) = (1,0)$ équivaut à $ac = 1$, soit $c = \dfrac{1}{a}$ et $ad + bc = 0$, soit $d = -\dfrac{bc}{a} = -\dfrac{b}{a^2}$. La loi $\star$ est donc une loi de groupe (on peut identifier ce groupe à un sous-groupe de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mais c'est un peu tôt pour vous l'expliquer).

Exercice 2 (*)

L'élément neutre 1 de $(\mathbb{U}, \times)$ est toujours une racine n-ème de l'unité. De plus, le produit de deux racines n-èmes de l'unité est une racine n-ème de l'unité : si $z^n = z'^n = 1$, alors $(zz')^n = z^n z'^n = 1 \times 1 = 1$; et l'inverse d'une racine n-ème de l'unité est aussi une racine n-ème de l'unité : si $z^n = 1$, alors $z \neq 0$ et $\left(\dfrac{1}{z}\right)^n = \dfrac{1}{z^n} = \dfrac{1}{1} = 1$. Il s'agit donc bien d'un sous-groupe.

On peut en fait aussi prouver que l'ensemble de toutes les racines de l'unité (pour des valeurs de n variables) est aussi un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$. L'élément neutre et la stabilité par inverse sont identiques à ce qu'on vient de faire, et si on considère z une racine n-ème de l'unité et z' une racine p-ème de l'unité, alors zz' est une racine np-ème de l'unité : $(zz')^{np} = (z^n)^p \times (z'^p)^n = 1$.

Exercice 3 (*)

Puisque l'énoncé nous le suggère, écrivons donc la table de groupe. On ne va pas détailler tous les calculs, mais par exemple $f_2 \circ f_5(x) = \dfrac{1}{1-(1-x)} = \dfrac{1}{x} = f_4(x)$. On obtient ainsi le tableau suivant (la composition n'étant pas commutative, soyons précis : $f_2 \circ f_5$ apparaitra sur la ligne f_2, colonne f_5.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_6	f_5	f_3	f_4	f_1
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2	f_6	f_5
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_3	f_2	f_6	f_1	f_4
f_6	f_6	f_1	f_4	f_5	f_3	f_2

On sait déjà que l'opération de composition est associative sur l'ensemble de toutes les fonctions, donc a fortiori sur notre ensemble (qu'on va noter très originalement G). Par ailleurs, G contient l'élément neutre pour la composition, qui est l'identité f_1, et il suffit de parcourir le tableau pour trouver les symétriques de chaque fonction : f_1, f_3, f_4 et f_5 sont leurs propres symétriques ; f_2 et f_6 sont symétriques l'une de l'autre. Pour faire la liste des sous-groupes, le plus simple est d'essayer d'en construire avec un nombre d'éléments donné. Le seul sous-groupe à un élément est le sous-groupe cinstitué de l'élément neutre f_1. Les sous-groupes à deux éléments doivent contenir f_1, et une autre fonction qui est son propre symétrique (puisqu'ils doivent contenir le symétrique en question). Il y en a donc trois : $\{f_1; f_3\}$, $\{f_1; f_4\}$ et $\{f_1; f_5\}$. Si on essaye de mettre (au moins) trois éléments, il faut évidemment que f_1 soit dans le sous-groupe. Si on met f_2 et f_3, on récupère $f_2 \circ f_2$ et $f_2 \circ f_3$, soit f_5 et f_6, et $f_3 \circ f_2 = f_4$, donc on a le groupe G tout entier. Avec f_2 et f_4, on a f_6, f_3 et f_5 également. Avec f_2 et f_5 de même. Par contre, le sous-ensemble $\{f_1; f_2; f_6\}$ constitue un sous-groupe à trois éléments de G. Si on met f_3 on ne peut pas mettre f_4 sinon on retrouve f_2 et on retombe dans un cas déjà étudié. Si on met f_5 ou f_6, on récupère automatiquement l'autre, puis f_2 qui est le symétrique de f_6. Si on met f_4 et f_5 on récupère f_2, avec f_6 on récupère f_3, cas déjà étudiés. Enfin, f_5 et f_6 donnent également le groupe G tout entier. Il existe finalement un sous-groupe à un élément, trois à deux éléments, un à trois éléments, et bien sûr le groupe G lui-même à six éléments.

Exercice 4 (**)

L'aplication τ_a est bien définie de G dans lui-même. Vérifions que c'est un morphisme de groupes : $\tau_a(x) \star \tau_a(y) = a \star x \star a^{-1} \star a \star y \star a^{-1} = a \star x \star y \star a^{-1} = \tau_a(x \star y)$. De plus, τ_a est certainement bijectif, car il admet pour réciproque $\tau_{a^{-1}}$: $\tau_a(\tau_{a^{-1}}(x)) = a \star (a^{-1} \star x \star a) \star a^{-1} = e \star x \star e = x$, et de même dans l'autre sens. Il est alors facile de prouver que $\{\tau_a\}$ est un sous-groupe de $Aut(G)$. En effet, $\tau_e = id$, donc l'élément neutre appartient à $\{\tau_a\}$, on vient de voir que la réciproque de τ_a était $\tau_{a^{-1}}$, et on vérifie sans problème que $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{a \star b}$: $\tau_a(\tau_b(x)) = a \star (b \star x \star b^{-1}) \star a^{-1} = (a \star b) \star x \star (a \star b)^{-1}$. Une petite remarque pour terminer : si le groupe G est commutatif, on aura toujours $\tau_a = id$.

Exercice 5 (*)

L'élément neutre appartient sûrement à C_G puisque $e \star x = x \star e = x$ pour tout x appartenant à G. Supposons que x et x' soient deux éléments de G, alors $(x \star x') \star y = x \star (x' \star y) = x \star y \star x' = y \star x \star x'$ en utilisant successivement le fait que x' et x appartiennent à C_G. De plus, si $x \in C_G$, on peut composer l'égalité $x \star y = y \star x$ à gauche et à droite par x^{-1} pour obtenir $x^{-1} \star x \star y \star x^{-1} = x^{-1} \star y \star x \star x^{-1}$, soit $y \star x^{-1} = x^{-1} \star y$, donc $x^{-1} \in C_G$. L'ensemble C_G est donc un sous-groupe de G. Dans le cas où G est un groupe commutatif, C_G est simplement confondu avec G lui-même.

Exercice 6 (**)

Le fait que l'ensemble de toutes les suites réelles soit un anneau est très facile à vérifier, quoiqu'un peu fastidieux. La somme et le produit terme à terme sont des lois de composition internes, qui sont associatives et commutatives car les opérations correspondantes sur les réels le sont. Les éléments neutres sont respectivement la suite constante nulle (pour la somme) et la suite constante égale à 1. Le symétrique d'une suite (u_n) pour la somme est simplement la suite $(-u_n)$, et la distributivité du produit sur la somme découle là encore de la distributivité du produit sur les réels sur la somme. Les éléments inversibles sont les suites qui ne s'annulent jamais, l'inverse de (u_n) étant alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

- Les suites bornées contiennent les deux éléments neutres, une somme ou un produit de deux suites bornées est certainement une suite bornée (je vous laisse écrire le détail si vous le souhaitez). De plus, si (u_n) est bornée, $(-u_n)$ aussi, donc l'ensemble des suites bornées est un sous-groupe de $(G, +)$ (en notant G l'ensemble de toutes les suites). Par contre, l'inverse d'une suite bornée (et inversible) n'est pas du tout borné en général. Par exemple la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ est bornée (par 0 et 1) et inversible puisqu'elle ne s'annule pas, mais son inverse $(n+1)$ n'est pas du tout bornée. Les suites bornées ne forment donc pas un sous-anneau de G.
- Les suites monotones (au sens large) contiennt les deux éléments neutres, mais la somme de deux suites monotones n'est pas nécessairement monotone en effet, une somme de deux suites croissantes (ou décroissantes) est croissante (respectivement décroissante), mais la somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante peut donner n'importe quoi. Ainsi, si $u_0 = 1$, $u_1 = 5$, $u_2 = 6$ (et la suite (u_n) est ensuite croissante), et $v_0 = 1$, $v_1 = -1$ et $v_2 = -12$ (avec une suite décroissante), on aura $u_0 + v_0 = 2$, $u_1 + v_1 = 5$ et $u_2 + v_2 = -6$, ce qui ne correspond pas à une suite monotone. En fait, on peut prouver que toute suite réelle peut s'écrire comme somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante. Les suites monotones ne peuvent donc pas former un sous-groupe de G, et a fortiori pas un sous-anneau. On peut quand même noter les points suivants : le produit de deux suites monotones n'est pas toujours monotones (si (u_n) est monotone mais change de signe, u_n^2 n'est pas monotone) ; l'opposé d'une suite monotone est monotone (de monotonie opposée) ; l'inverse d'une suite monotone n'est monotone que si la suite est de signe constant.
- Les suites convergentes contiennent les deux éléments neutres, une somme ou un produit de suites convergentes est une suite convergente, un opposé ou un inverse aussi (ce sont des conséquences immédiates des règles de calcul sur les limites de suites). Les suites convergentes forment donc un sous-groupe et même un sous-anneau de G.
- Les suites périodiques (de période non précisée) contiennent les deux éléments neutres (les suites constantes sont périodiques de période 1). L'opposé ou l'inverse (quand il existe) d'une suite périodique est manifestement périodique de même période. De plus, la somme ou le produit d'une suite périodique de période p par une suite périodique de période q est périodique de période pq (et même de période $p\hat{q}$ si on veut être précis). En effet, tout multiple de p est aussi une période de la première suite, et tout multiple de q une période de la deuxième. Quand on ajoute ou qu'un multiplie ensuite deux suites de même période, on obtient bien une suite périodique. Les suites périodiques forment donc un sous-groupe et un sous-anneau de G.
- Les suites divergeant vers $+\infty$ ne contiennent aucun des deux éléments neutres, elles ne peuvent donc constituer ni un sous-groupe, ni un sous-anneau de G. Accessoirement, une somme ou un produit de suites divergeant vers $+\infty$ continue à diverger vers $+\infty$, mais sûrement pas un opposé ou un inverse.

Exercice 7 (***)

Puisque nous avons déjà fait dans la feuille d'exercices numéro 8 une étude des propriétés de la différence symétrique, on ne va pas tout recommencer. Les deux lois sont donc des lci, elles sont associatives, accessoirement commutatives, et $\cap$ est distributive par rapport à Δ. De plus, l'ensemble vide est un élément neutre pour la loi Δ : $A\Delta\emptyset = (A \cup \emptyset)\backslash(A \cap \emptyset) = A\backslash\emptyset = A$. On a déjà vu dans l'exercice sur Δ que $A\Delta A = \emptyset$, donc tout sous-ensemble A de E est son propre symétrique pour la loi

Δ. L'élément neutre pour l'intersection est l'ensemble E tout entier : $A \cap E = A$ quel que soit A. Les éléments inversibles pour la loi $\cap$ sont les sous-ensembles A pour lesquels on peut trouver un B tel que $A \cap B = E$. Cela suppose que $E \subset A$, ce qui n'est possible que pour $A = E$. L'élément neutre E est donc le seul élément inversible pour l'intersection (et il est bien sûr son propre inverse). L'anneau $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ n'est sûrement pas intègre puisqu'on peut avoir $A \cap B = \emptyset$ sans avoir $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$. Enfin, $(\mathcal{P}(F), \Delta, E)$ n'est pas un sous-anneau de $\mathcal{P}(E)$. Il est pourtant stable par Δ et par $\cap$, et par passage au symétrique puisque tout élément est son propre symétrique (pour le passage à l'inverse, personne n'étant inversible, ce n'est pas bien compliqué à vérifier). Il contient aussi l'élément neutre pour Δ, mais, et c'est là l'unique petit problème, pas l'élément neutre pour la loi $\cap$, qui est désormais F.

Exercice 8 (**)

1. Appliquons l'hypothèse à $a+1$: $(a+1)^2 = a+1$, soit $a^2+2a+1 = a+1$. Comme $a^2 = a$, on peut simplifier pour obtenir $2a = 0$.
2. Appliquons l'hypothèse à $a+b$: $(a+b)^2 = a^2+ab+ba+b^2 = a+b$. Comme $a^2 = a$ et $b^2 = b$, on peut simplifier pour obtenir $ab+ba = 0$, soit $ab = -ba$. Mais comme $-2ba = 0$ (c'est vrai pour tout élément de l'anneau), $-ba = ba$, donc $ab = ba$, et l'anneau est commutatif.
3. Si l'anneau possède trois éléments distincts, on peut certainement trouver un élément $a \neq 1$ et $a \neq 0$ tel que $a+1 \neq a$ (sinon on aurait $1 = 0$ ce qui n'est pas permis dans un anneau). Alors $a(a+1) = a^2+a = a+a = 2a = 0$, avec $a \neq 0$ et $a+1 \neq 0$ (seul 1 vérifie $1+1 = 0$ dans cet anneau, puisque le symétrique est unique et qu'on sait que $2 \times 1 = 0$). L'anneau A n'est donc pas intègre.

Exercice 9 (*)

L'ensemble A contient tous les entiers, donc en particulier les éléments neutres 0 et 1 (en prenant $b = 0$). Par ailleurs, si $a+b\sqrt{2}$ et $c+d\sqrt{2}$ sont deux éléments de A, leur somme $(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$ aussi, et leur produit $ac+2bd+(ad+bc)\sqrt{2}$ également. L'opposé d'un élément de A est clairement un élément de A, et enfin l'inverse de $a+b\sqrt{2}$ (lorsque a et b ne sont pas nuls tous les deux) vaut $\dfrac{1}{a+b\sqrt{2}} = \dfrac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}$ en multipliant par la quantité conjuguée, avec $a^2-2b^2 \neq 0$ (sinon on aurait $\dfrac{a}{b} = \pm\sqrt{2}$, ce qui n'est possible pour un nombre rationnel), et $\dfrac{a}{a^2-2b^2}$ et $-\dfrac{b}{a^2-b^2}$ qui sont bien des nombres rationnels. L'ensemble A est donc un sous-corps de $\mathbb{R}$. La démonstration serait essentiellement identique avec des $\sqrt{3}$ au lieu des $\sqrt{2}$.

Notons f l'application de l'énoncé, f est certainement bijective, envoie 0 sur 0 et 1 sur 1 et respecte la somme ($f(x+y) = f(x)+f(y)$) mais pas du tout le produit. Par exemple $f(1+\sqrt{2}) = 1+\sqrt{3}$ et $f(\sqrt{2}-1) = \sqrt{3}-1$, mais $f((1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)) = f(1) = 1$, alors que $f(1+\sqrt{2}) \times f(\sqrt{2}-1) = (1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1) = 2$. Ce n'est donc pas un isomorphisme de corps (et pas non plus un isomorpisme, notion non définie dans le cours !).

Exercice 10 (**)

Pour compter le nombre de diviseurs, le plus simple est de commencer par écrire la décomposition en facteurs premiers du nombre : $10! = 2\times3\times2^2\times5\times2\times3\times7\times2^3\times3^2\times2\times5 = 2^8\times3^4\times5^2\times7$. Un diviseur de $10!$ sera nécessairement de la forme $2^a\times3^b\times5^c\times7^d$, avec $a \in \{0;1;\dots;8\}$, $b \in \{0;1;2;3;4\}$, $c \in \{0;1;2\}$ et $d \in \{0;1\}$. Chaque quadruplet d'entiers (a,b,c,d) donne un diviseur différent (par unicité de la décomposition en facteurs premiers), ce qui fait $9\times5\times3\times2 = 270$ diviseurs au total. Si on compte aussi les diviseurs négatifs, il y en a deux fois plus, soit 540. Par exemple, pour $a = 5$, $b = 1$, $c = 2$ et $d = 0$, on trouve le diviseur $32\times3\times25 = 2\ 400$.

Exercice 11 (*)

Pas vraiment de méthode très subtile ici, il suffit de trouver toutes les possibilités en faisant augmenter la valeur de x puis celle de y. Si $x = 1$, on a déjà $\dfrac{1}{x} = 1$, donc on ne peut pas trouver de valeurs de y et de z convenables (en supposant les entiers naturels). Si $x = 2$, on doit avoir $\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}$. Il faut donc avoir au moins $y = 3$ pour que l'égalité puisse être vérifiée. Si $y = 3$, $z = 6$ convient puisque $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$. Si $y = 4$, on peut prendre $z = 4$. Si $y > 4$, on va trouver des valeurs éventuelles de z plus petites que y, donc des couples déjà obtenus (à l'ordre près). Passons donc à $x = 3$, si on ne veut pas retomber sur des solutions déjà trouvées, il faudra prendre $y \geqslant 3$ et $z \geqslant 3$, mais alors la seule possibilité est $x = y = z = 3$. Finalement, les seuls triplets possibles sont $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$ et $(3, 3, 3)$ ainsi que leurs permutations. Si on accepte les entiers relatifs dans les solutions, on trouve plus de possibilité puisque tous les triplets $(1, n, -n)$ seront solution (et leurs permutations, bien entendu). Par ailleurs, $\left|\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p}\right| < \dfrac{1}{2}$ si n et p sont de signe opposés et (en valeur absolue) supérieurs ou égaux à 2. Il est donc impossible de trouver des solutions en entiers relatifs avec trois entiers tous différents de 1.

Exercice 12 (**)

1. Une astuce est d'écrire $xy - 2x - 3y = 0$, soit $(x - 3)(y - 2) = 6$. Comme il n'existe pas trente-six mille façons d'écrire 6 comme produit de deux entiers, on peut faire une liste des possibilités pour $x - 3$ et $y - 2$. Soit $x - 3 = 6$ et $y - 2 = 1$, ce qui donne la solution $(9, 3)$; soit $x - 3 = 3$ et $y - 2 = 2$, ce qui donne $(6, 4)$; soit $x - 3 = 2$ et $y - 2 = 3$, ce qui donne $(5, 5)$; soit $x - 3 = 1$ et $y - 2 = 6$, ce qui donne $(4, 8)$. Et n'oublions pas, bien entendu, les diviseurs négatifs : $x - 3 = -6$ et $y - 2 = -1$ donne $(-3, 1)$; $x - 3 = -3$ et $y - 2 = -2$ donne $(0, 0)$; $x - 3 = -2$ et $y - 2 = -3$ donne $(1, -1)$; et enfin $x - 3 = -1$ et $x - 2 = -6$ donne $(2, -4)$. Finalement, $\mathcal{S} = \{(-3; 1), (0, 0), (1, -1), (2, -4), (4, 8), (5, 5), (6, 4), (9, 3)\}$.
2. Il ne s'agit pas ici d'étudier une conique (même si c'est bien une équation d'ellipse qu'on a sous la main), mais de mettre sous forme canonique : $(x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 - 5 = 0$, soit $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$. Pour écrire 10 comme somme de deux carrées, il faut nécessairement écrire $10 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2$ (si on dépasse 3 on sera largement au-dessus de 10, et pour 2 rien ne marche). Cela laisse encore une fois huit possibilités : par exemple si $x - 1 = 1$ et $y + 2 = 3$, on trouve la solution $(2, 1)$. Je vous passe les détails, on obtient $\mathcal{S} = \{(4, -1); (4, -3); (2, 1); (2, -5); (0, 1); (0, -5); (-2, -1); (-2, -3)\}$.
3. Même technique que ci-dessus, $x^2 - \left(3y - \dfrac{39}{6}\right)^2 + \dfrac{169}{4} = 40$, soit en factorisant $\left(x - 3y + \dfrac{13}{2}\right)\left(x + 3y - \dfrac{13}{2}\right) = -\dfrac{9}{4}$. Quitte à tout multiplier par 4, on trouve donc l'équation $(6y - 2x - 13)(2x + 6y - 13) = 9$. Il y a six possibilités pour écrire 9 comme un produit de deux entiers, qui vont donner à chaque fois un système à résoudre. D'abord $\left\{\begin{array}{ccccccc} 6y & - & 2x & - & 13 & = & 9 \\ 2x & + & 6y & - & 13 & = & 1 \end{array}\right.$. En additionnant les deux équations, $12y - 26 = 10$, soit $12y = 36$ et $y = 3$, ce qui donne $2x = 14 - 6y = -4$, donc $x = -2$. Passons au deuxième système : $\left\{\begin{array}{ccccccc} 6y & - & 2x & - & 13 & = & 3 \\ 2x & + & 6y & - & 13 & = & 3 \end{array}\right.$. La somme des deux équations donne $12y - 26 = 6$, soit $y = \dfrac{32}{12} = \dfrac{8}{3}$, solution qui ne nous intéresse pas. troisioème système : $\left\{\begin{array}{ccccccc} 6y & - & 2x & - & 13 & = & 1 \\ 2x & + & 6y & - & 13 & = & 9 \end{array}\right.$. On somme comme d'habitude : $12y - 26 = 10$, on retrouve $y = 3$, mais cette fois-ci $2x = 22 - 6y = 4$, donc $x = 2$.

Quatrième système : $\begin{cases} 6y - 2x - 13 = -9 \\ 2x + 6y - 13 = -1 \end{cases}$. On additionne : $12y - 26 = -10$, soit $y = \frac{4}{3}$, solution à éliminer ici. On trouvera la même valeur pour y avec -1 et -9 au lieu de -9 et -1. Reste donc le cinquième système : $\begin{cases} 6y - 2x - 13 = -3 \\ 2x + 6y - 13 = -3 \end{cases}$. On trouve $12y - 26 = -6$, soit $y = \frac{5}{3}$. Là encore, pas de solution entière en vue. Finalement, il n'y que deux couples solutions : $\mathcal{S} = \{(2,3); (-2,3)\}$.

Exercice 13 (***)

1. Un récurrence simple suffit ici : $F_2F_0 - F_1^2 = 0 - 1 = -1 = (-1)^1$, donc P_1 est vraie. Supposons P_n vraie, alors $F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 = F_{n+1}F_n + F_n^2 - F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n - F_{n+1}) + F_n^2$. Or, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, donc $F_n - F_{n+1} = -F_{n-1}$, donc l'expression devient $F_n^2 - F_{n+1} - F_{n-1} = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$ en exploitant l'hypothèse de récurrence. On a bien prouvé la propriété au rang $n + 1$.
2. Dans le cas où n est pair, l'égalité précédente est une identité de Bezout $aF_{n+1} + bF_n = 1$, avec $a = F_{n-1}$ et $b = -F_n$ qui sont des coefficients entiers, donc F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux. Si n est impair, il suffit de changer les signes pour aboutir à la même conclusion.
3. On va cette fois-ci effectuer une récurrence double sur l'entier p, n étant fixé. Pour $p = 1$, $F_nF_0 + F_{n+1}F_1 = F_{n+1}$, donc la propriété est vraie au rang 1. Si $p = 2$, $F_nF_1 + F_{n+1}F_2 = F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, donc la propriété est également vraie au rang 2. Supposons l'égalité valable aux rangs p et $p+1$, alors $F_{n+p+2} = F_{n+p+1} + F_{n+p} = F_nF_p + F_{n+1}F_{p+1} + F_nF_{p-1} + F_{n+1}F_p = F_n(F_p + F_{p-1}) + F_{n+1}(F_{p+1} + F_p) = F_nF_{p+1} + F_{n+1}F_{p+1}$, ce qui prouve la propriété au rang $p + 2$ et achève la récurrence.

   Un diviseur commun à F_n et F_p sera donc diviseur de F_{n+p}, et par conséquent diviseur commun à F_n et F_{n+p}. De façon similaire, un diviseur commun à F_n et F_{n+p} sera diviseur de $F_{n+1}F_p$, et F_n et F_{n+1} étant premiers entre eux, le diviseur de F_n divisera nécessairement F_p, et sera par conséquent diviseur commun de F_n et F_p. Les diviseurs communs des deux couples sont donc identiques.
4. D'après la question précédentes, $F_n \wedge F_m = F_n \wedge F_{n-m} = F_n \wedge F_{n-km}$ pour tout entier k (quitte à appliquer plusieurs fois de suite la relation). En appliquant successivement toutes les étapes de l'algorithme d'Euclide de recherche du pgcd aux entiers n et m, les couples (a, b) obtenus à toutes les étapes vérifieront donc $F_n \wedge F_m = F_a \wedge F_b$. Puisque le dernier couple obtenu sera $(n \wedge m, 1)$, on a donc $F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m} \wedge F_1 = F_{n \wedge m}$.
5. Les lecteurs attentifs auront bien évidemment remarqué que l'énoncé était dans le mauvais sens ! Ce qui découle de ce qu'on a fait ci-desus, c'est que, si F_n est premier, alors n est premier. En effet, par contraposée, si n n'est pas premier, on peut choisir un diviseur m de n non trivial, et on a alors $F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m} = F_m$. En particulier, F_n est divisible par F_m et c'est certainement un diviseur distinct de 1 et de F_n. En fait, l'énoncé est pire qu'imprécis, il est carrément faux puisqu'il existe des entiers n premiers pour lesquels F_n n'est pas premier. Calculons donc : $F_3 = 2$ est premier, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$ est premier, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$ est premier, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, $F_{10} = 55$, $F_{11} = 89$ est premier, $F_{12} = 144$, $F_{13} = 233$ est premier, $F_{14} = 377$, $F_{15} = 610$, $F_{16} = 987$, $F_{17} = 1\ 597$ qui est premier, $F_{18} = 2\ 584$, $F_{19} = 4181$. Et là, hop, au moment où plus personne n'y croit, $4\ 181 = 37 \times 113$ alors que 19 est premier !

Exercice 14 (*)

On obtient plus ou moins péniblement :

- $P + Q = 2X^3 - X^2 + 8X - 1$

- $PQ = -2X^5 + 6X^4 - 5X^3 + 16X^2 - 3X$
- $P^2 = (2X^3+5X-1)^2 = 4X^6+25X^2+1+20X^4-4X^3-10X = 4X^6+20X^4-4X^3+25X^2-10X+1$
- $P(X^2) = 2(X^2)^3 + 5(X^2) - 1 = 2X^6 + 5X^2 - 1$
- $P \circ Q = 2(-X^2+3X)^3+5(-X^2+3X)-1 = -2X^6+18X^5-54X^4+54X^3-5X^2+15X-1$
- $Q \circ P = -(2X^3+5X-1)^2+3(2X^3+5X-1) = -(4X^6+20X^4-4X^3+25X^2-10X+1)+6X^3+15X-3 = -4X^6-20X^4+10X^3-25X^2+25X-4$
- $3P^3Q - Q \circ P^2 = 3(2X^3+5X-1)^3(-X^2+3X)+(4X^6+20X^4-4X^3+25X^2-10X+1)^2-3(4X^6+20X^4-4X^3+25X^2-10X+1)$
  $= (8X^9+125X^3-1+60X^7+150X^5-12X^6+6X^3-75X^2+15X-60X^4)(-3X^2+9X)+(16X^{12}+400X^8+16X^6+625X^4+100X^2+1+160X^{10}-32X^9+200X^8-80X^7+8X^6-160X^7+1\,000X^6-400X^5+40X^4-200X^5+80X^4-8X^3-500X^3+50X^2-20X)-12X^6-60X^4+12X^3-75X^2+30X-3$
  $= (8X^9+60X^7-12X^6+150X^5-60X^4+131X^3-75X^2+15X-1)(-3X^2+9X)+16X^{12}+160X^{10}-32X^9+600X^8-240X^7+1\,012X^6-600X^5+685X^4-496X^3+75X^2+10X-2$
  $= (-24X^{11}+72X^{10}-180X^9+540X^8+36X^8-108X^7-450X^7+1\,350X^6+180X^6-540X^5-393X^5+1\,179X^4+225X^4-675X^3-45X^3+135X^2+3X^2-9X)+16X^{12}+160X^{10}-32X^9+600X^8-240X^7+1\,012X^6-600X^5+685X^4-496X^3+75X^2+10X-2$
  $= 16X^{12}-24X^{11}+232X^{10}-212X^9+1\,176X^8-798X^7+2\,542X^6-1\,533X^5+2\,089X^4-1\,216X^3+213X^2+X-2$
  Calcul garanti fait main, et tout de même (j'avoue) vérifié ensuite à la machine, il y avait une toute petite erreur...

Exercice 15 (*)

1. Il y a une racine très évidente qui est 1. On peut aussi constater (par exemple en jetant un oeil à l'énoncé de la question suivante) que -2 est racine de P : $P(-2) = -8-2\times4-5\times(-2)+6 = 0$.
2. On peut donc factoriser P sous la forme $P(X) = (X+2)Q(X) = (X+2)(aX^2+bX+c) = aX^3+(2a+b)X^2+(2b+c)X+2c$. Par identification, on obtient $a=1$; $2a+b=-2$; $2b+c=-5$ et $2c=6$, donc $a=1$; $b=-4$ et $c=3$, soit $P(X) = (X+2)(X^2-4X+3)$.
3. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 16-12 = 4$ et pour racines $x_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1$ (tiens, on a retrouvé notre autre racine évidente) et $x_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3$. On a donc $P(X) = (X+1)(X-1)(X-3)$, d'où le tableau de signes suivant :

x		-2		1		3	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

4. La première inéquation se ramène au tableau de signe précédent en posant $X = \ln x$. On en déduit que $X \in]-2;1[\cup]3;+\infty[$, donc $\mathcal{S} =]e^{-2};e[\cup]e^3;+\infty[$. Pour la deuxième, on peut tout multiplier par e^x (qui est toujours strictement positif) et tout passer à gauche pour obtenir $e^{3x}-2e^{2x}-5e^x+6 \leqslant 0$, ce qui se ramène encore une fois au tableau précédent en posant cette fois-ci $X = e^x$ (ce qui suppose donc $X > 0$). On obtient $X \in [1;3]$ (on peut oublier l'autre intervalle puisque $X \geqslant 0$), soit $\mathcal{S} = [0;\ln 3]$.

Exercice 16 (* à ***)

1. Après avoir modifié l'énoncé pour ne pas prendre exactement le même exemple que dans le cours, on applique nos connaissances sur les racines sixièmes de l'unité pour obtenir dans $\mathbb{C}[X]$, $X^6-1 = (X-1)(X-e^{i\frac{\pi}{3}})(X-e^{i\frac{2\pi}{3}})(X+1)(X-e^{i\frac{4\pi}{3}})(X-e^{i\frac{5\pi}{3}}) = (X-1)\left(X-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\left(X+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(X+1)\left(X+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les racines complexes conjuguées pour obtenir $X^6-1=(X-1)(X+1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)$ (en utilisant directement le double de la partie réelle et le module des racines).

2. Pour chercher la racine double, il est un peu plus simple de chercher directement les racines du polynôme dérivée $P'=4X^3-15X^2+8X+3$. On constate que 1 est racine évidente, mais malheureusement 1 n'est pas racine de P puisque $1-5+4+3+9\neq 0$. On enchaîne avec 2, mais $P'(2)=32-60+16+3\neq 0$; tentons donc $P'(3)=108-135+24+3=0$. Ah, nouvelle chance : $P(3)=81-135+36+9+9=0$. On a trouvé notre racine double, on peut donc factoriser sous la forme $P=(X-3)^2Q$, effectuons une petite division euclidienne pour trouver Q :

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & X^4 & -\ 5X^3 & +\ 4X^2 & +\ 3X & +\ 9 & X^2-6X+9 \\ \cline{7-7}
- & (X^4 & -\ 6X^3 & +\ 9X^2) & & & X^2+X+1 \\
 & & X^3 & -\ 5X^2 & +\ 3X & +\ 9 & \\
 & - & (X^3 & -\ 6X^2 & +\ 9X) & & \\
 & & & X^2 & -\ 6X & +\ 9 & \\
 & & - & (X^2 & -\ 6X & +\ 9) & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

On en déduit que $P=(X-3)^2(X^2+X+1)$. On ne peut pas faire mieux dans $\mathbb{R}[X]$ puisque le dernier facteur a un discriminant négatif. Dans $\mathbb{C}[X]$, $P=(X-3)^2\left(X+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (on reconnait un des facteurs du polynôme de la question précédente !).

3. La méthode normale est ici de poser $Y=X^4$ pour obtenir Y^2+Y+1. On commence à savoir que ce trinôme a pour racines $Y_1=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $Y_2=e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Il ne reste plus qu'à trouver les racines quatrièmes de ces deux nombres pour avoir les huit racines de P. Ouf, c'est assez facile, pour Y_1 on trouve $e^{i\frac{2\pi}{12}}=e^{i\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$; $e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})}=e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $e^{i(\frac{\pi}{6}+\pi)}=-e^{i\frac{\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ et $-e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les racines quatrièmes de Y_2 sont simplement les conjugués des précédentes, à savoir $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$; $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ et $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Conclusion : $P=\left(X-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$ $\left(X-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)\left(X+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)\left(X+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les racines conjuguées pour obtenir $P=(X^2-X+1)(X^2+X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)$.
Mais les plus astucieux auront naturellement évité tous ces affreux calculs en recourrant à l'ignoble astuce suivante : $P(X)=X^8+X^4+1=(X^8+2X^4+1)-X^4=(X^4+1)^2-(X^2)^2$. On reconnait maintenant une différence de deux carrés, qu'on sait factoriser : $P(X)=(X^4+X^2+1)(X^4-X^2+1)$. Chacun des deux facteurs peut à nouveau se factoriser en utilisant la même technique : $X^4+X^2+1=(X^2+1)^2-X^2=(X^2+X+1)(X^2-X+1)$; et $X^4-X^2+1=(X^2+1)^2-3X^2=(X^2+1)^2-(\sqrt{3}X)^2=(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$. Finalement, on obtient la factorisation suivante pour P : $P(X)=(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$ (et on constate que chacun des quatre facteurs a un discriminant négatif, on ne peut donc pas aller plus loin dans $\mathbb{R}[X]$).

4. Méthode normale : on pose $Y=X^3$, on cherche à factoriser Y^3+Y^2+Y+1. Il y a -1 qui est racine évidente, on peut factoriser sous la forme $(Y+1)(Y^2+1)$ (la factorisation étant ici triviale, inutile de détailler le calcul). Il ne reste donc plus qu'à trouver les racines cubiques de -1, i et

$-i$. Les racines cubiques de -1 sont -1 ; $-e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; et $-e^{i\frac{4\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Les racines cubiques de $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ sont $e^{i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$; $e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$; et $e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$. Les racines cubiques de $-i$ sont les opposées de celles de i, à savoir $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$ et enfin i. On trouve donc la factorisation $X^9 + X^6 + X^3 + 1 = (X+1)(X+i)(X-i)\left(X - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right)\left(X - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)\left(X + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right)\left(X + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right)$.
Dans $\mathbb{R}[X]$, on peut factoriser sous la forme $X^9 + X^6 + X^3 + 1 = (X+1)(X^2+1)(X^2 - X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$.

5. Ici, difficile de s'en sortir sans astuce, il n'y a même pas l'ombre d'une racine évidente. Il faut en fait constater que $(X+1)P(X) = X^7 - X^6 + \cdots + X + X^6 - X^5 + \cdots + 1 = X^7 + 1$. Voilà un polynôme qu'on sait factoriser, ses racines sont les racines septièmes de -1, qui sont les opposés des racines septièmes de l'unité (qu'on ne cherchera pas à exprimer autrement que sous forme exponentielle, il ne s'agit pas de valeurs remarquables), donc $(X+1)P(X) = (X+1)(X + e^{i\frac{2\pi}{7}})(X + e^{i\frac{4\pi}{7}})(X + e^{i\frac{6\pi}{7}})(X + e^{i\frac{8\pi}{7}})(X + e^{i\frac{10\pi}{7}})(X + e^{i\frac{12\pi}{7}})$, dont on déduit évidemment que $P = (X+e^{i\frac{2\pi}{7}})(X+e^{i\frac{4\pi}{7}})(X+e^{i\frac{6\pi}{7}})(X+e^{i\frac{8\pi}{7}})(X+e^{i\frac{10\pi}{7}})(X+e^{i\frac{12\pi}{7}})$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on aura $P(X) = \left(X^2 - 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\dfrac{6\pi}{7}\right) + 1\right)$.

Exercice 17 (**)

1. L'énoncé n'était pas forcément limpide mais vu ce qui est demandé à la fin de l'exercice, il vaut mieux trouver ces racines sous forme algébrique. Posons donc $z = a + ib$ et tentons de trouver $z^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$. On doit donc avoir $a^2 - b^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $2ab = \dfrac{1}{2}$, et en passant par le module $a^2+b^2 = \dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4} = 1$. En additionnant les deux équations extrêmes, on trouve $2a^2 = 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, soit $a = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$. De même en soustrayant, et en utilisant le fait que a et b sont de même signe, on obtient $b = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}$. Les deux racines carrées de $\dfrac{i+\sqrt{3}}{2}$ sont donc $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}$ et $-\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}$. Le calcul des racines carrées de $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$ est extrêmement similaire puisqu'on échange en fait les équation concernant a et b (le module est inchange) pour obtenir les deux valeurs $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$ et $-\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$.
2.
$$\begin{array}{rrrrrrrr|c}
 & X^6 & & & & & - & i & X^2 + i \\ \cline{9-9}
- & (X^6 & + & iX^4) & & & & & X^4 - iX^2 - 1 \\
 & & & -iX^4 & & & - & i & \\
 & & - & (-iX^4 & + & X^2) & & & \\
 & & & & & -X^2 & - & i & \\
 & & & & - & (-X^2 & - & i) & \\
 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

On peut donc écrire $X^6 - i = (X^2+i)(X^4 - iX^2 - 1)$. Le premier facteur a pour racines $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ et $\dfrac{i-1}{\sqrt{2}}$ qui sont les racines carrées de $-i$ (on les trouve facilement en passant par la forme exponentielle si besoin), en posant $Y = X^2$ dans le deuxième facteur, on trouve pour discriminant $\Delta = -1+4 = 3$, donc les solutions sont $Y_1 = \dfrac{i+\sqrt{3}}{2}$ et $Y_2 = \dfrac{i-\sqrt{3}}{2}$. Quelle surprise, ce sont les deux nombres dont on a calculé les racines carrées à la première question. Finalement, on obtient la sublimissime expression :

$$X^6 - i = \left(X - \frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(X + \frac{1}{2} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(X - \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)$$
$$\left(X - \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)\left(X - \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right)\left(X - \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right)$$

3. C'est évident nettement plus simple : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc les solutions sont de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{3}$, donc sont égales à $e^{i\frac{\pi}{12}}$; $e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{12}}$; $e^{i\frac{9\pi}{12}} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$; $e^{i\frac{13\pi}{12}}$; $e^{i\frac{17\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Les racines carrées de $-i$ sont celles correspondant aux arguments multiples de $\dfrac{\pi}{4}$. Parmi les quatre qui restent, deux ont une partie réelle et une partie imaginaire positives, ce sont $e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{5\pi}{12}}$, celle qui correspond à $\dfrac{\pi}{12}$ est celle ayant la plus grande partie réelle. On en déduit que $e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}$. En particulier, $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}$

Exercice 18 (**)

- Pour éviter des identifications un peu lourdes, utilisons le fait que 1 est racine double du polynôme P, et 0 racine simple. Comme P est de degré 3, on peut l'écrire sous la forme $P = aX(X-1)^2$. On a donc $P' = a(X-1)^2 + 2aX(X-1)$, d'où $P'(0) = a$. Il faut donc prendre $a = 2$ pour satisfaire la condition $P'(0) = 2$, et la seule solution est alors $P = 2X(X-1)^2$.
  Si on tient absolument à procéder par identifications, on écrit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, d'où $P' = 3aX^2 + 2bX + c$. les quatre conditions de l'énoncé se traduisent alors par $d = 0$; $a+b+c+d = 0$; $3a+2b+c = 0$ et $c = 2$. On a donc $a+b = -2$ et $3a+2b = -2$. Par substition, $b = -2-a$, donc $3a-4-2a = -2$, soit $a = 2$ puis $b = -4$. On trouve donc $P = 2X^3 - 4X^2 + 2X = 2X(X-1)^2$.
- Le plus simple ici est de travailler sur les racines possibles du polynôme P. Si a est racine de P, alors $(a+3)P(a) = aP(a+1) = 0$, et $P(a+1)$ est également racine de P, sauf si $a = 0$. En itérant le procédé, $a+2$ sera aussi racine sauf si $a+1 = 0$, puis $a+3$ sera racine etc. Finalement, tous les nombres de la forme $a+k$ seront racines du polynôme pour $k \in \mathbb{N}$, sauf s'il existe un entier naturel k tel que $a+k = 0$, c'est-à-dire $a = -k$. Comme un polynôme autre que le polynôme nul (qui est une solution triviale du problème que nous allons désormais écarter) ne peut pas avoir une infinité de racines, les seules racines possibles de P sont les entiers négatifs. Or, on peut aussi faire le raisonnement dans l'autre sens : si a est racine alors en posant $X = a-1$ dans l'égalité de départ, $(a-1)P(a) = (a+2)P(a-1)$, et $a-1$ est racine de P sauf si $a+2 = 0$. Comme précédemment, on obtiendra une infinité de racines sauf si $a+2-k = 0$ pour un entier naturel k, c'est-à-dire $a = k-2$. En comparant avec la première condition obtenue, les seules racines possibles de P sont 0, -1 et -2. Autrement dit, $P = \lambda X^\alpha(X+1)^\beta(X+2)^\gamma$ (rien n'interdit a priori d'avoir des racines multiples). Réinjectons cette formule dans l'équation de départ : $\lambda(X+3)X^\alpha(X+1)^\beta(X+2)^\gamma = \lambda X(X+1)^\alpha(X+2)^\beta(X+3)^\gamma$. Par unicité de la factorisation d'un polynôme en produit de polynômes irréductibles, on doit avoir $\alpha = 1$; $\beta = \alpha$; $\gamma = \beta$ et $1 = \gamma$, donc les polynômes solutions sont de la forme $P(X) = \lambda X(X+1)(X+2)$.
- Il est encore une fois ici plus simple de travailler avec le polynôme dérivée : on sait que -1 est racine double de $P+1$ et 1 est racine double de $P-1$, donc -1 et 1 sont racines de P' (les constantes disparaissent en dérivant). Comme P est de degré 3, P' est de degré 2 et s'écrit donc nécessairement $P' = \alpha(X+1)(X-1) = \alpha(X^2-1)$. Par conséquent, $P = \dfrac{\alpha}{3}X^3 - \alpha X + \beta$. Reste à trouver α et β tels que -1 soit racine de $P+1$, c'est-à-dire $P(-1) = -1$; et 1 soit racine de $P-1$, soit $P(1) = 1$. On obtient les conditions $-\dfrac{\alpha}{3} + \alpha + \beta = -1$, et $\dfrac{\alpha}{3} - \alpha + \beta = 1$.

En additionnant les deux équations, on trouve $\beta = 0$, puis $\frac{2}{3}\alpha = -1$, soit $\alpha = -\frac{3}{2}$. Finalement, l'unique polynôme solution est $P = -\frac{1}{2}X^3 + \frac{3}{2}X$.

- Une bonne tactique ici est d'essayer de commencer par obtenir une information sur le degré du polynôme P en étudiant le coefficient dominant de chacun des deux membres de l'égalité. Si P a pour terme dominant a_nX^n, alors le membre de droite a pour terme dominant a_nX^n, et X'' a lui-même pour terme dominant $n(n-1)a_nX^{n-2}$. En multipliant par X^2+4, on retombe sur du $n(n-1)a_nX^n$ (le $+4$ ne va pas influencer le terme dominant), donc on obtient la condition nécessaire $n(n-1) = 6$, soit $n^2-n-6 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 1+24 = 25$ et admet deux solutions $n_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ et $n_2 = \frac{1-5}{2} = -2$. Le degré d'un polynôme étant difficilement négatif, les solutions seront forcément de degré 3 (il faudra tout de même y ajouter la solution triviale constituée par le polynôme nul). Posons donc $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, alors $P'' = 6aX + 2b$, et $(X^2+4)P'' = 6aX^3 + 2bX^2 + 24aX + 8b$. Par identification avec $6P$, on obtient les conditions $6a = 6a$ (toujours vérifiée), $2b = 6b$ qui implique $b = 0$; $24a = 6c$ qui donne $c = 4a$ et enfin $8b = 6d$ qui donne $d = 0$ puisque $b = 0$. Conclusion : les seules polynômes solutions sont ceux de la forme $P = aX^3 + 4aX = aX(X^2+4)$.
- Plusieurs pistes possibles ici, mais le plus simple est sûrement de raisonner sur le degré : $d^\circ(P(X^2)) = 2d^\circ(P)$ et $d^\circ((X^2+1)P) = 2 + d^\circ(P)$. en oubliant la solution nulle, on doit donc avoir $2d^\circ(P) = d^\circ(P) + 2$, soit $d^\circ(P) = 2$. Posons donc $P = aX^2 + bX + c$, alors $P(X^2) = aX^4 + bX^2 + c$ et $(X^2+1)P(X) = aX^4 + bX^3 + (c+a)X^2 + bX + c$. Par identification, on trouve les conditions $a = a$ et $c = c$, $b = 0$ (deux fois) et $b = a + c$. On doit donc avoir $c = -a$, et les solutions sont les polynômes de la forme $P = aX^2 - a = a(X^2-1)$.

Exercice 19 (**)

1.

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & X^3 & + & X^2 & - & 2X & + & 3 & X^2+2X-1 \\ \cline{9-9}
- & (X^3 & + & 2X^2 & - & X) & & & X-1 \\
 & & - & X^2 & - & X & + & 3 & \\
 & & - & (-X^2 & - & 2X & + & 1) & \\
 & & & & & X & + & 2 &
\end{array}$$

Conclusion : $X^3 + X^2 - 2X + 3 = (X^2+2X-1)(X-1) + X + 2$.

2.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & 2X^4 & - & 3X^3 & + & 4X^2 & - & 5X & + & 6 & X^2-3X+1 \\ \cline{11-11}
- & (2X^4 & - & 6X^3 & + & 2X^2) & & & & & 2X^2+3X+11 \\
 & & & 3X^3 & + & 2X^2 & - & 5X & + & 6 & \\
 & & - & (3X^3 & - & 9X^2 & + & 3X) & & & \\
 & & & & & 11X^2 & - & 8X & + & 6 & \\
 & & & & - & (11X^2 & - & 33X & + & 11) & \\
 & & & & & & & 25X & - & 5 &
\end{array}$$

Conclusion : $2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6 = (X^2-3X+1)(2X^2+3X+11) + 25X - 5$.

3.

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & X^4 & & & & - & 2\cos(2\theta)X & + & 1 & X^2-2\cos(\theta)X+1 \\ \cline{10-10}
- & (X^4 & - & 2\cos(\theta)X^3 & + & X^2) & & & & X^2+2\cos(\theta)X \\
 & & & 2\cos(\theta)X^3 & - & X^2 & - & 2\cos(2\theta)X & + \; 1 & \\
 & & - & (2\cos(\theta)X^3 & - & 4\cos^2(\theta)X^2 & + & 2\cos(\theta)X) & & \\
 & & & & & (4\cos^2(\theta)-1)X^2 & - & 2(\cos(\theta)+\cos(2\theta))X & + \; 1 &
\end{array}$$

On va finir les calculs en ligne, ce sera plus lisible, le quotient est égal à $X^2 + 2\cos(\theta)X + 4\cos^2(\theta) - 1$, et le dernier reste vaut $-2(\cos(\theta)+\cos(2\theta))X + 1 + 2\cos(\theta)(4\cos^2(\theta)-1)X -$

$4\cos^2(\theta)+1 = (-2\cos(\theta)-4\cos^2(\theta)+2+8\cos^3(\theta)-2\cos(\theta))X+2(1-2\cos^2(\theta)) = 4\cos(\theta)(2\cos^2(\theta)-\cos(\theta)-1)-2\cos(2\theta) = 4\cos(\theta)(\cos(\theta)-1)(2\cos(\theta)+1)X-2\cos(2\theta)$. Conclusion passionnante : $P(X) = X^4 - 2X\cos(2\theta) + 1 = (X^2 - 2X\cos(\theta) + 1)(X^2 + 2\cos(\theta)X + 4\cos^2(\theta) - 1) + 4\cos(\theta)(\cos(\theta) - 1)(2\cos(\theta) + 1)X - 2\cos(2\theta)$.

Au vu de ce qu'on a obtenu, deux possibilités : soit le prof a encore donné un calcul aléatoire ignoble, soit il y avait une erreur d'énoncé. Refaisons le calcul en remplaçant le X par un X^2 dans l'expression de P :

$$
\begin{array}{cccccccccc|l}
 & X^4 & & & - & 2\cos(2\theta)X^2 & & & + & 1 & X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 \\ \cline{11-11}
- & (X^4 & - & 2\cos(\theta)X^3 & + & X^2) & & & & & X^2 + 2\cos(\theta)X + 1 \\
 & & & 2\cos(\theta)X^3 & - & (4\cos^2(\theta) - 2 + 1)X^2 & & & + & 1 & \\
 & & - & (2\cos(\theta)X^3 & - & 4\cos^2(\theta)X^2 & + & 2\cos(\theta)X) & & & \\
 & & & & & X^2 & - & 2(\cos(\theta))X & + & 1 & \\
 & & & & - & (X^2 & - & 2\cos(\theta)X & + & 1 & \\
 & & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Le résultat est ici nettement plus sympathique : $X^4 - 2\cos(2\theta)X + 1 = (X^2 - 2\cos(\theta)X + 1)(X^2 + 2\cos(\theta)X + 1)$.

4.

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
 & X^3 & - & iX^2 & - & X & & & X - 1 + i \\ \cline{9-9}
- & (X^3 & + & (i-1)X^2) & & & & & X^2 + (1-2i)X - 2 - 3i \\
 & & & (1-2i)X^2 & - & X & & & \\
 & & - & ((1-2i)X^2 & + & (1+3i)X) & & & \\
 & & & & & (-2-3i)X & & & \\
 & & & & - & ((-2-3i)X & + & 5+i) & \\
 & & & & & & & -5-i &
\end{array}
$$

Conclusion : $X^3 - iX^2 - X = (X - 1 + i)(X^2 + (1 - 2i)X - 2 - 3i) - 5 - i$.

5. Il est évidemment hors de question ici de poser la division euclidienne explicitement. En fait, l'énoncé n'aurait du demander que le reste de cette division, car le quotient est en gros impossible à calculer. Écrivons quand même la division de façon théorique : $P = AQ + R$, avec $d^\circ(R) \leqslant 1$, soit $R(X) = \alpha X + \beta$. Comme tout ce qui nous intéresse est de connaitre R, une astuce classique est de prendre comme valeurs particulières de X dans l'égalité précédente les racines du polynôme Q (ce qui fera disparaitre le terme en AQ et notamment ce A bien gênant dont on ne sait rien. Ici, on peut donc écrire $P(i) = A(i)Q(i) + \alpha i + \beta$. Comme $Q(i) = 0$ et $P(i) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = e^{in\theta}$, on obtient la première condition $e^{in\theta} = \alpha i + \beta$. De même, avec $X = -i$, on trouve $e^{-in\theta} = -\alpha i + \beta$. En additionnant les deux équations, $2\beta = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$, donc $\beta = \cos(n\theta)$. On en déduit que $i\alpha = e^{in\theta} - \cos(n\theta) = i\sin(n\theta)$, donc $\alpha = \sin(n\theta)$. Finalement, $(X\cos(\theta) + \sin(\theta))^n = (X^2 + 1)A(X) + \sin(n\theta)X + \cos(n\theta)$.

Exercice 20 (***)

1. Jusque-là tout va bien : $P_2 = XP_1 - P_0 = X^2 - 2$; $P_3 = X(X^2 - 2) - X = X^3 - 3X$; et $P_4 = X(X^3 - 3X) - (X^2 - 2) = X^4 - 4X^2 + 2$.
2. On conjecture aisément que P_n est de degré n et de coefficient dominant 1, c'est-à-dire que $P_n = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Prouvons-le par récurrence double. C'est vrai pour P_1 et P_2, supposons-le vrai aux rangs n et $n+1$ alors $P_{n+2} = X(X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - X^n - \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k = X^{n+2} + \sum_{k=0}^{n+1} c_k X^k$

(peu importe les coefficients exacts dans ce qui n'est pas dominant). La propriété reste donc vraie au rang $n+2$, par principe de récurrence, elle est vrai pour tout entier $n \geqslant 1$.

3. On va encore faire une récurrence double : $P_0\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = 2$ et $z^0 + \dfrac{1}{z^0} = 1+1 = 2$, donc ça marche pour P_0. De plus, $P_1\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = z+\dfrac{1}{z}$, ce qui prouve la propriété au rang 2. Supposons-la vérifiée aux rangs n et $n+1$, alors $P_{n+2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = \left(z+\dfrac{1}{z}\right)P_{n+1}\left(z+\dfrac{1}{z}\right) - P_n\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = \left(z+\dfrac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\dfrac{1}{z^{n+1}}\right) - z^n - \dfrac{1}{z^n} = z^{n+2} + \dfrac{1}{z^n} + z^n + \dfrac{1}{z^{n+2}} - z^n - \dfrac{1}{z^n} = z^{n+2} + \dfrac{1}{z^{n+2}}$. La propriété est donc vérifiée au rang $n+2$ et la récurrence fonctionne.
4. En posant $z = e^{i\theta}$, on aura $z + \dfrac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$ donc, d'après la question précédente, $P_n(2\cos(\theta)) = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$.
5. D'après la question précédente, si $\cos(n\theta) = 0$, alors $2\cos(\theta)$ est une racine de P_n. Or, $\cos(n\theta) = 0$ équivaut à $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2n}\left[\dfrac{\pi}{n}\right]$. Tous les réels de la forme $2\cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}\right)$ sont donc racines du polynôme P_n. Or, il y a exactement n réels distincts dans cette liste, à savoir $2\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\dfrac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in \{0;1;\dots;n-1\}$ (ces valeurs sont bien distinctes car étant les cosinus d'angles distincts de l'intervalle $[0;\pi[$ sur lequel le cosinus est bijectif ; par contre, pour les valeurs plus grandes de k, on retrouve les même cosinus : $\cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + k\dfrac{\pi}{n}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + (2n-k-1)\dfrac{\pi}{n}\right)$ si $k \geqslant n$. Le polynôme P_n étant de degré n, il ne peut avoir plus de n racines, et on vient donc de les exhiber toutes. Conclusion : $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n}\right)\right)$. Par exemple, pour $n = 3$, $P_3 = \left(X - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)\left(X - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\left(X - 2\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right) = X(X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3}) = X^3 - 3X$, on retrouve bien la bonne formule.

Exercice 21 (***)

Soit P le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines complexes sont x, y et z. Autrement dit, $P = (X-x)(X-y)(X-z)$. Si on écrit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$, en connaissant par coeur ses relations coefficients-racines ou en développant comme un gros bourrin, on trouve $a = -x-y-z$, donc $a = -1$; $b = xy+yz+xz$. Ah mince, on ne connait pas cette valeur, rusons un peu en calculant $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz = 1+2b$, donc $1+2b = 1$ et $b = 0$. Enfin, la dernière relation donne $-xyz = c$. Or, $(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3x^2y+3x^2z+3y^2x+3y^2z+3z^2x+3z^2y+6xyz$ (ceux pour qui la formule ne semble pas claire développeront brutalement pour vérifier) soit $1 = -5 + 3(x+y+z)(xy+yz+zx) - 3xyz$, donc, en utilisant que $b = 0$, $1 = -5+3c$ et $c = 2$. Finalement, $P = X^3 - X^2 + 2$. Coup de chance (ou plutôt, pour une fois, énoncé bien conçu), ce polynôme de degré 3 a une racine évidente, en l'occurence -1. On peut donc factoriser sous la forme $P = (X+1)(dX^2+eX+f) = dX^3 + (d+e)X^2 + (e+f)X + f$. Par identification, $d = 1$; $d+e = -1$ donc $e = -2$ et $e+f = 0$ soit $f = 2$. Comme $P = (X+1)(X^2-2X+2)$, et que la deuxième parenthèse a pour discriminant $\Delta = 4-8 = -4$, et donc pour racines $z_1 = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$ et $z_2 = 1-i$, on peut factoriser P sous la forme $P = (X+1)(X-1-i)(X-1+i)$. À permutation près, on connait les valeurs de x, y et z. Le système initial a six solutions : $\mathcal{S} = \{(-1,1-i,1+i);(-1,1+i,1-i);(1-i,-1,1+i);(1-i,1+i,-1);(1+i,-1,1-i);(1+i,1-i,-1)\}$.