Feuille d'exercices n°10 : Structures algébriques

PTSI B Lycée Eiffel

25 janvier 2013

Exercice 1 (**)

Pour chaque ensemble et chaque loi suivants, déterminer s'il s'agit d'une lci, si l'ensemble muni de la loi forme un groupe, et si la loi est commutative. S'il ne s'agit pas d'une loi de groupe mais qu'il y a un élément neutre, on précisera quels sont les éléments symétrisables.

1. $E = \mathbb{N}$ et $x \star y = \max(x, y)$.
2. $E = \mathbb{R}$ et $x \star y = x + y - xy$.
3. $E = \mathbb{Z}$ et $x \star y$ est le reste de la division de xy par 3
4. $E = \mathbb{R}$ et $x \star y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$.
5. $E =]-1; 1[$ et $x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.
6. $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = 0\}$ et $\star = +$.
7. $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $(a, b) \star (c, d) = (ac, ad + bc)$.

Exercice 2 (*)

Montrer que l'ensemble des racines n-èmes de l'unité forment un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.

Exercice 3 (*)

On considère l'ensemble constitué des six fonctions de $\mathbb{R}\backslash\{0; 1\}$ dans lui-même suivantes : $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $f_3(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $f_4(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_5(x) = 1 - x$ et $f_6(x) = \dfrac{x-1}{x}$. Montrer qu'il s'agit d'un groupe pour la composition (écrire dans un tableau les valeurs de $f_i \circ f_j$ pour tous les éléments de l'ensemble). Déterminer tous ses sous-groupes.

Exercice 4 (**)

Soit $(G, \star)$ un groupe et $a \in G$. Montrer que l'application $\tau_a : x \mapsto a \star x \star a^{-1}$ est un automorphisme de groupes de G. Montrer que $\{\tau_a \mid a \in G\}$, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

Exercice 5 (*)

Soit $(G, \star)$ un groupe. On note $C_G = \{x \in G \mid \forall y \in G, x * y = y * x\}$. Montrer que C_G est un sous-groupe de G (appelé centralisateur de G).

Exercice 6 (**)

Montrer que l'ensemble des suites réelles, muni de la somme et du produit terme par terme, est un anneau. Quels sont ses éléments inversibles (pour le produit) ? Parmi les ensembles suivants, lesquels en sont des sous-groupes ou des sous-anneaux :

- suites bornées
- suites monotones
- suites convergentes
- suites périodiques
- suites divergeant vers $+\infty$

Exercice 7 (***)

Soit E un ensemble. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau. En préciser les éléments neutres, les éléments inversibles (et leur inverse) pour chacune des deux lois. Cet anneau est-il intègre ? Si $F \subset E$, $(\mathcal{P}(F), \Delta, \cap)$ est-il un sous-anneau de $\mathcal{P}(E)$?

Exercice 8 (**)

Soit $(A, +, \times)$ un anneau tel que $\forall a \in A$, $a^2 = a$.

1. Montrer que $\forall a \in \mathbb{A}$, $2a = 0$.
2. Montrer que A est commutatif.
3. Montrer que, si A possède au moins trois éléments, A n'est pas intègre.

Exercice 9 (*)

Montrer que $A = \{a+b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$. De même, $B = \{a+b\sqrt{3}\}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $a + b\sqrt{2} \mapsto a + b\sqrt{3}$ n'est pas un isomorpisme de corps de A dans B.

Exercice 10 (**)

Déterminer le nombre de diviseurs de 10! (sans les écrire tous).

Exercice 11 (*)

Déterminer tous les triplets d'entiers (x, y, z) vérifiant $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$.

Exercice 12 (**)

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

1. $xy = 2x + 3y$.
2. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$.
3. $x^2 = 9y^2 - 39y + 40$.

Exercice 13 (***)

On considère la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.
2. Montrer que F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+p} = F_n F_{p-1} + F_{n+1}F_p$. En déduire que le pgcd de F_n et de F_p est le même que celui de F_n et F_{n+p}.
4. Montrer que, $\forall (n, m) \geqslant 2$, $F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m}$.
5. Montrer que, si $n \geqslant 5$ et n est premier, alors F_n est premier. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 14 (*)

Soient P et Q les deux polynômes définis par $P(X) = 2X^3 + 5X - 1$ et $Q(X) = -X^2 + 3X$. Déterminer chacun des polynômes suivants : $P+Q$; PQ ; $P^2(X)$; $P(X^2)$; $P \circ Q$; $Q \circ P$; $3P^3Q - Q \circ P^2$.

Exercice 15 (*)

Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

1. Déterminer une racine évidente du polynôme P.
2. Factoriser P sous la forme $(X + 2)Q(X)$, où Q est un polynôme de degré 2.
3. En déduire le tableau de signe de P sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre les inéquations $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 > 0$ et $e^{2x} - 2e^x \leqslant 5 - 6e^{-x}$

Exercice 16 (* à ***)

Factoriser chacun des polynômes suivants dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$:

1. $P(X) = X^4 - 1$
2. $P(X) = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$ (on trouvera un entier $n \leqslant 5$ racine double de P).
3. $P(X) = X^8 + X^4 + 1$
4. $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$
5. $P(X) = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$

Exercice 17 (**)

1. Déterminer les racines carrées des nombres complexes $\dfrac{i + \sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{i - \sqrt{3}}{2}$.
2. Effectuer la division euclidienne de $X^6 - i$ par $X^2 + i$. En déduire, à l'aide de la question précédente, la factorisation de $X^6 - i$.
3. Résoudre l'équation $z^6 = i$ en passant par la forme exponentielle. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 18 (**)

Pour chacune des conditions suivantes, déterminer tous les polynômes la vérifiant :

- P est de degré 3, $P(0) = P(1) = P'(1) = 0$ et $P'(0) = 2$.
- $(X+3)P(X) = XP(X+1)$
- P est de degré 3 ; $(X+1)^2$ divise $P+1$ et $(X-1)^2$ divise $P-1$.
- $(X^2+4)P'' = 6P$
- $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$

Exercice 19 (**)

Effectuer la division euclidienne de P par Q dans chacun des cas suivants :

1. $P(X) = X^3 + X^2 - 2X + 3$ et $Q(X) = X^2 + 2X - 1$
2. $P(X) = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$, et $Q(X) = X^2 - 3X + 1$
3. $P(X) = X^4 - 2X\cos(2\theta) + 1$ et $Q(X) = X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$
4. $P(X) = X^3 - iX^2 - X$, et $Q(X) = X - 1 + i$,
5. $P(X) = (X\sin(\theta) + \cos(\theta))^n$ et $Q(X) = X^2 + 1$

Exercice 20 (***)

On définit la suite de polynômes (P_n) par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Calculer P_2, P_3 et P_4.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Montrer que, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.
4. En déduire une expression simple de $P - n(2\cos(\theta))$.
5. Déterminer les racines de P, et sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 21 (***)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & 1 \\ x^3 & + & y^3 & + & z^3 & = & -5 \end{array}\right.$$

Pour cela, on cherchera un polynôme unitaire de degré 3 ayant pour racines x, y, et z, et on calculera chacun de ses coefficients en utilisant les conditions données.