Feuille d'exercices n°5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

12 novembre 2012

Exercice 1 (*)

Puisque $2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ et $2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, le premier point a pour coordonnées cartésiennes $(1, \sqrt{3}, 5)$. On obtient de même pour le deuxième point $(0, -4, -2)$. Pour les coordonnées sphériques, il faut calculer $z\sqrt{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; puis $x = \sqrt{6} \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{6} \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{4}$; et enfin $y = \sqrt{6} \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$, ce qui donne comme coordonnées cartésiennes $\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. Pour le deuxième point, on obtient $z = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$; $x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ et $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit des coordonnées $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$.

Avec les notations du cours, pour le point $M(\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, on a $\rho = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$, donc $\overrightarrow{OM} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}\right) + 2\sqrt{2}\overrightarrow{k} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}\right) + 2\sqrt{2}\overrightarrow{k}$, d'où les coordonnées cylindriques $\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{6}, 2\sqrt{2}\right)$. Pour les coordonnées sphériques, on commence par calculer $r = \sqrt{6+2+8} = 4$, donc $\overrightarrow{OM} = 4(\sqrt{6}\overrightarrow{i} + \sqrt{2}\overrightarrow{j}) + 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{k}$. On aura donc $\cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\varphi = \frac{\pi}{4}$, ensuite $\overrightarrow{OM} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i} + \frac{1}{2}\overrightarrow{j}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{k} = 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\overrightarrow{i} + 4\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\overrightarrow{j} + 4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\overrightarrow{k}$, ce qui correspond aux coordonnées sphériques $\left(4, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Les points vérifiant $r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ sont situés dans le plan contenant les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, et à distance 2 de 0, donc il s'agit du cercle de centre 0 et de rayon 2 dans ce plan. De même, la deuxième condition caractérise le cercle de centre 0 et de rayon 5 dans le plan contenant les vecteurs $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$.

Exercice 2 (*)

1. Calculons : $AB = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$; $AD = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26}$; $BC = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$ et $BE = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$.
2. Calculons : $\overrightarrow{DA} = (-4, 1, 3)$ et $\overrightarrow{BE}(2, 1, -3)$, donc $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BE} = -8+1-9 = -16$; $\overrightarrow{BC} = (3, -2, 1)$ et $\overrightarrow{DE} = (-3, 2, -1)$ donc $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DE} = -9-4-1 = -14$, $\overrightarrow{AE} = (1, 1, -4)$ et $\overrightarrow{BA} = (1, 0, 1)$ donc $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BA} = 1 - 4 = -3$; $\overrightarrow{DB} = (-5, 1, 2)$ et $\overrightarrow{CE} = (-1, 3, -4)$ donc $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CE} = 5 + 3 - 8 = 0$.
3. Pour changer, calculons : $\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{BE} = (-6, 18, -6)$; $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{DE} = (0, 0, 0)$; $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{BA} = (1, -5, -1)$ et $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{CE} = (-10, -22, -14)$.

4. Pour le premier produit mixte, on peut se contenter de calculer $\overrightarrow{CD} = (2, 1, -3)$ et reprendre un calcul déjà effectué : $[\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}] = (\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{BA}).\overrightarrow{CD} = 2 - 5 + 3 = 0$. Pour le deuxième, on calcule $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (2, -2, 0)$ et $\overrightarrow{AD} = (4, -1, -3)$, puis $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 4 \times (-2) + 1 \times 2 - 3 \times (2) = -12$. Le parallélépipède est donc de volume 12.

Exercice 3 (**)

La méthode la plus accessible à notre niveau est un calcul brutal de coordonnées. Notons donc $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$, $\overrightarrow{v} = (x', y', z')$ et $\overrightarrow{w} = (x'', y'', z'')$, alors $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = (y'z'' - z'y'', z'x'' - x'z'', x'y'' - y'x'')$, puis $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (yx'y'' - yy'x'' - zz'x'' + zx'z'', zy'z'' - zz'y'' - xx'y'' + xy'x'', xz'x'' - xx'z'' - yy'z'' + yz'y'')$. De l'autre côté, $(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$ a pour première coordonnée $(xx'' + yy'' + zz'')x' - (xx' + yy' + zz')x'' = yx'y'' + zx'z'' - yy'x'' - zz'x''$ (les termes en $xx'x''$ se simplifient) ; pour deuxième coordonnée $(xx'' + yy'' + zz'')y' + (xx' + yy' + zz')y'' = xy'x'' + zy'z'' - xx'y'' - zz'y''$; et pour dernière coordonnée $(xx'' + yy'' + zz'')z' + (xx' + yy' + zz')z'' = xz'x'' + yz'y'' - xx'z'' - yy'z''$. les coordonnées des deux membres coïncident, ce qui prouve la formule.

Utilisons donc la formule précédente (en faisant attention au fait que la parenthèse est à gauche et pas à droite, ça change tous les signes) : $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} + (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) \wedge \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = (\overrightarrow{w}.\overrightarrow{u})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{w}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{w} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} + (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{u} - (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u})\overrightarrow{w}$. Ces termes s'annulent deux à deux en utilisant la symétrie du produit scalaire, ce qui prouve la formule.

Exercice 4 (**)

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires (et non nuls), il ne peut pas y avoir de solution puisque $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x}$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Si $\overrightarrow{u}$ est nul et pas $\overrightarrow{v}$, là encore pas de solution. Si $\overrightarrow{v}$ est nul mais pas $\overrightarrow{u}$, tous les vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{u}$ sont solutions. Dernier cas particulier, si les deux vecteurs sont nuls, tout vecteur est solution.

Dans le cas plus intéressant où les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, $\overrightarrow{v}$ doit être orthogonal à $\overrightarrow{u}$ (sinon là encore, on n'aura pas de solution), et $\overrightarrow{v}$ doit être orthogonal à $\overrightarrow{x}$. Le vecteur $\overrightarrow{x}$ appartient donc au plan orthogonal à $\overrightarrow{v}$, dont une base est par exemple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. Autrement dit, $\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. Par linéarité du produit vectoriel, on a donc $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$. Le premier terme étant nul, on veut avoir $\mu\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$. Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ forme une base orthogonale, donc $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est colinéaire à $\overrightarrow{v}$, de sens opposé, et de norme $\| \overrightarrow{u} \|^2 \times \| \overrightarrow{v} \|$. On doit donc avoir $\mu = -\dfrac{1}{\| \overrightarrow{u} \|^2}$, ce qui donne comme solution tous les vecteurs de la forme $\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{u} - \dfrac{1}{\| \overrightarrow{u} \|^2}\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

Exercice 5 (*)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times1\times2+(-1)\times1\times2+3\times2\times1-3\times1\times2-1\times1\times1-(-1)\times2\times2 = 2-2+6-6-1+4 = 3.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\times5\times9+4\times8\times3+7\times2\times6-7\times5\times3-1\times8\times6-4\times2\times9 = 45+96+84-105-48-72 = 0.$$

On pouvait éventuellement s'en rendre compte en constatant que la troisième colonne est égale à deux fois la deuxième moins la première, ce qui signifie que des vecteurs ayant ces coordonnées dans une base orthonormale sont coplanaires.

$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = bc^2+ca^2+ab^2-ba^2-cb^2-ac^2$. Les plus courageux constateront que ce déterminant peut se factoriser sous la forme $(a-b)(c-a)(b-c) = (ac-a^2-bc+ab)(b-c) = abc-a^2b-b^2c+ab^2-ac^2+a^2c+bc^2-abc$ (les deux abc se simplifient).

$\begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ a+c & ac & a^2+c^2 \end{vmatrix} = bc(a+b)(a^2+c^2)+ac(b+c)(a^2+b^2)+ab(a+c)(b^2+c^2)-bc(a+c)(a^2+b^2)-ab(b+c)(a^2+c^2)-ac(a+b)(b^2+c^2) = b^2c^3+a^3c^2+b^3a^2-b^3c^2-a^3b^2-a^2c^3$ après simplifications un peu lourdes. On peut cette fois factoriser sous la forme $(ab+bc+ca)(a-b)(c-a)(c-b) = (ab+bc+ca)(bc^2+ca^2+ab^2-ba^2-cb^2-ac^2) = ab^2c^2+a^3bc+a^2b^3-b^2a^3-ab^3c-a^2bc^2+b^2c^3+a^2bc^2+ab^3c-a^2b^2c-b^3c^2-abc^3+abc^3+a^3c^2+a^2b^2c-a^3bc-ab^2c^2-a^2c^3$, et tous les termes autres que ceux de la forme x^2y^3 se simplifient.

Exercice 6 (**)

1. En utilisant les propriétés de bilinéarité et d'antisymétrie du produit vectoriel,
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA} &= \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MC} \\ &= \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM})\wedge\overrightarrow{MC} \\ &= \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{MC} \\ &= \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{MA}\wedge(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} \end{aligned} .$$
2. En utilisant le fait que $\overrightarrow{IA} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA})$ (et relations similaires avec les autres milieux), $2(\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{KC}) = \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA})\wedge\overrightarrow{BA}+(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA})\wedge\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{BC}$ puisque le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est nul. Après simplifications, il ne reste que $\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CM})\wedge\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$. La formule en découle.
3. $[\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MJ},\overrightarrow{MK}] = ((\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AI})\wedge(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AJ})).(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AK})$. Le produit vectoriel est égal à $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ}$. Le premier de ces deux produits vectoriels étant orthogonal à $\overrightarrow{MA}$, son produit scalaire avec $\overrightarrow{MA}$ est nul, donc $[\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MJ},\overrightarrow{MA}] = (\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ}).\overrightarrow{MA} = [\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{MA}]$. Reste le deuxième morceau, égal à $(\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ}).\overrightarrow{AK}$. Le vecteur $\overrightarrow{AI}\wedge\overrightarrow{AJ}$ étant orthogonal à $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$, il est normal au plan (AIJ), c'est-à-dire au plan (ABC), donc son produit scalaire avec $\overrightarrow{AK}$ est nul. Quant au vecteur $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{IJ}$, comme $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ (c'est le théorème des milieux dans le triangle ABC), il est orthogonal à $\overrightarrow{BA}$, donc à $\overrightarrow{AK}$, et son produit scalaire avec $\overrightarrow{AK}$ est également nul. Finalement, on a bien $[\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MJ},\overrightarrow{MK}] = [\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{MA}]$.

Exercice 7 (**)

1. Une façon de faire est de dire que les vecteurs $\overrightarrow{u} = (-2,1,-1)$ et $\overrightarrow{v} = (3,1,-2)$ forment une base du plan, et que le point $M(1,-2,4)$ apparitent au plan. On peut déterminer un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ en calculant $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = (-1,-7,-5)$, le plan a donc une équation de la forme $-x-7y-5z+d=0$, avec, pour que M appartienne au plan, $-1+14-20+d=0$, soit $d=7$. Une équation cartésienne de $\mathcal{P}_1$ est donc $-x-7y-5z+7=0$.

Autre méthode, réussir à exprimer t et u dans l'équation paramétrique. Ici, en additionnant les deux dernières lignes, $y+z=2-u$, soit $u=2-y-z$, et en ajoutant le double de la deuxième équation à la dernière, $2y+z=t$. Il ne reste plus qu'à remplacer dans l'équation qu'on n'a pas encore utilisée, la première, pour obtenir $x=1-2t+3u=1-4y-2z+6-3y-3z$, soit $0=7-x-7y-5z$. On retrouve exactement la même équation que par l'autre méthode.

2. On sait que le vecteur $\overrightarrow{n}=(2,-1,3)$ est normal à $\mathcal{P}_2$, et que le vecteur $\overrightarrow{n'}=(1,0,2)$ est normal à $\mathcal{P}_3$, donc leur droite d'intersection sera dirigée par $\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{n'}=(-2,-1,1)$. On obtient facilement un point de la droite en fixant par exemple $x=0$ dans les deux équations de plan, ce qui donne rapidement $z=2$ puis $y=5$, donc on peut prendre le paramétrage suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & & - & 2t \\ y & = & 5 & - & t \\ z & = & 2 & + & t \end{array}\right.$.

   Autre possibilité, prendre une des variables, par exemple y, comme paramètre (on la renomme t), ce qui donne les deux équations $2x-t+3z-1=0$ et $x+2z-4=0$, on élimine ensuite x en soustrayant le double de la deuxième équation à la première : $-t-z+7=0$ donne $z=7-t$, puis $x=4-2z=-1+2t$. Le paramétrage obtenu est très différent du précédent, mais tout aussi valable, et évite d'avoir à trouver un point de la droite.

3. On décrit classiquement les points $M(x,y,z)$ appartenant au plan comme ceux vérifiant $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM}]=0$, soit $0=\begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ -3 & -1 & y-2 \\ -1 & -5 & z-3 \end{vmatrix}=14(x-1)-(-6)(y-2)+(-4)(z-3)=$ $14x+6y-4z-14$, d'où l'équation cartésienne, en divisant tout par 2, $7x+3y-2z-7=0$.

4. Il suffit de remplacer les valeurs de x, y et z données par la paramétrage de D_1 dans l'équation de $\mathcal{P}_2$: $2(3-t)-(1+2t)+3(-1+t)-1=0$, soit $6-2t-1-2t-3+3t-1=0$, donc $-t+1=0$. On obtient $t=1$, soit $x=2$, $y=3$ et $z=0$. Le point recherché a pour coordonnées $(2,3,0)$.

5. Le plan $\mathcal{Q}$ contient le point de coordonnées $(3,1,-1)$ qui est sur D_1. Une base du plan est obtenue en prenant des vecteurs directeurs de D_1 et D_2, donc un vecteur normal au plan sera le vecteur $(-1,2,1)\wedge(3,-2,5)=(12,8,-4)$. On peut diviser les coordonnées par 4, et trouver une équation de $\mathcal{Q}$ de la forme $3x+2y-z+d=0$. Comme $(3,1,-1)$ appartient au plan, on doit avoir $9+2+1+d=0$, soit $d=-12$. Le plan $\mathcal{Q}$ a pour équation cartésienne $3x+2y-z-12=0$.

6. Injectons le paramétrage du premier plan dans les équations cartésiennes des deux autres, on obtient les équations $2(1-2t+3u)-(-2+t+u)+3(4-t-2u)-1=0$, soit $2-4t+6u+2-t-u+12-3t-6u-1=0$, ou encore $8t+u=15$; et $1-2t+3u+2(4-t-2u)-4=0$, soit $4t+u=5$. Reste à résoudre le système de deux équations à deux inconnues pour trouver u et t. Par substitution, comme $u=5-4t$, la première équation devient $4t+5=15$, soit $t=\frac{5}{2}$, puis $u=-5$. En reprenant le paramétrage du premier plan, on trouve $x=1-5-15=-19$; $y=-2+\frac{5}{2}-5=-\frac{9}{2}$ et $z=4-\frac{5}{2}+10=\frac{23}{2}$. Le point d'intersection des trois plans a donc pour coordonnées $\left(-19,-\frac{9}{2},\frac{23}{2}\right)$.

7. Puisque $\overrightarrow{AB}=(1,-3,-1)$, la droite (AB) admet pour paramétrage $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & t \\ y & = & 2 & - & 3t \\ z & = & 3 & - & t \end{array}\right.$. On peut injecter ce paramétrage dans l'équation de $\mathcal{P}_2$: $2(1+t)-(2-3t)+3(3-t)-1=0$ donne $2+2t-2+3t+9-3t-1=0$, donc $2t+8=0$. Pour $t=-4$, on trouve $x=-3$, $y=14$ et $z=7$, qui constituent donc les coordonnées du point d'intersection cherché.

8. On connait déjà un point de la droite, le point A, il faut en trouver un vecteur directeur $\overrightarrow{u}(x,y,z)$. Le fait que la droite est parallèle à $\mathcal{P}_2$ se traduit par le fait que $\overrightarrow{u}$ doit être orthogonal

au vecteur normal $\overrightarrow{n}(2,-1,3)$ de $\mathcal{P}_2$, c'est-à-dire que $2x-y+3z=0$. Par ailleurs, si notre droite est sécante avec D_1, on peut trouver un point B sur la droite D_1 pour lequel $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$. Or, $\overrightarrow{AB}=(2-t,2t-1,-4+t)$ (en reprenant le paramétrage de D_1), donc l'équation $2x-y+3z=0$ peut s'écrire $2(2-t)-(2t-1)+3(-4+t)=0$, soit $4-2t-2t+1-12+3t=0$, ce qui donne $-t-7=0$, donc $t=-7$. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{u}=(9,-15,-11)$ est directeur de la droite cherchée, qui admet donc pour paramétrage $\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 1 & + & 9t \\ y & = & 2 & - & 15t \\ z & = & 3 & - & 11t \end{array}\right.$.

9. Le point $M(3,1,-1)$ appartenant à D_1, les vecteurs $\overrightarrow{u}=(-1,2,1)$ (vecteur directeur de D_1), et $\overrightarrow{CM}=(3,0,1)$ forment une base du plan cherché. Il admet donc pour vecteur normal $\overrightarrow{n}=(2,4,-6)$, ou encore plus simplement $(1,2,-3)$. Son équation cartésienne est de la forme $x+2y-3z+d=0$, avec C appartenant au plan, soit $2+6+d=0$. Cela donne $d=-8$, et l'équation $x+2y-3z-8=0$.

10. Si cette droite existe, il existe un point M sur D_1 et un point M' sur D_2 pour lesquels $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires (et sont alors des vecteurs directeurs de la droite cherchée). Or, en reprenant les paramétrages des deux droites, $\overrightarrow{AM}=(2-t,2t-1,t-4)$, et $\overrightarrow{AM'}=(3u,-2-2u,5u)$. Pour que ces vecteurs soient colinéaires, on doit donc trouver un coefficient k tel que $3u=k(2-t)$, $-2-2u=k(2t-1)$ et $5u=k(t-4)$. en comparant les équations extrêmes (que je multiplie par 5 et 3 pour plus de simplicité), on a $10k-5kt=3kt-12k$, soit $22k=8kt$, donc $t=\dfrac{11}{4}$. On réécrit alors les trois équations : $3u=-\dfrac{3}{4}k$; $-2-2u=\dfrac{9}{2}k$ et $5u=-\dfrac{5}{4}k$. Les deux équations extrêmes donnent $u=-\dfrac{1}{4}k$, celle du milieu devient alors $-2+\dfrac{1}{2}k=\dfrac{9}{2}k$, soit $k=-\dfrac{1}{2}$. Il ne reste plus qu'à en déduire $u=\dfrac{1}{8}$. Le système admet donc une solution (unique), et la droite recherchée admet par exemple pour vecteur directeur $8\overrightarrow{AM'}=(3,-9,5)$, d'où le paramétrage $\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 1 & + & 3s \\ y & = & 2 & - & 9s \\ z & = & 3 & + & 5s \end{array}\right.$

Exercice 8 (*)

On va bien évidemment utiliser la formule pour la distance à un plan utilisant l'équation cartésienne. Un point $M(x,y,z)$ est équidistant des deux plans si $\dfrac{|3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|2x-3y+6z-1|}{\sqrt{4+9+36}}$, soit $7|3x-4y+1|=5|2x-3y+6z-1|$. La seule petit difficulté de l'exercice consiste à se rappeler que deux nombres ont même valeur absolue s'ils sont égaux ou opposés, ce qui donne les deux possibilités $7(3x-4y+1)=5(2x-3y+6z-1)$, soit $11x-13y-30z+12=0$; ou $7(3x-4y+1)=-5(2x-3y+6z-1)$, soit $31x-43y+30z+2=0$. Autrement dit, les points équidistants des deux plans sont situés sur deux autres plans (qui ont la même intersection que les deux plans initiaux), appelés plans bissecteurs des deux plans.

Exercice 9 (*)

Dans tous les cas, c'est du cours :

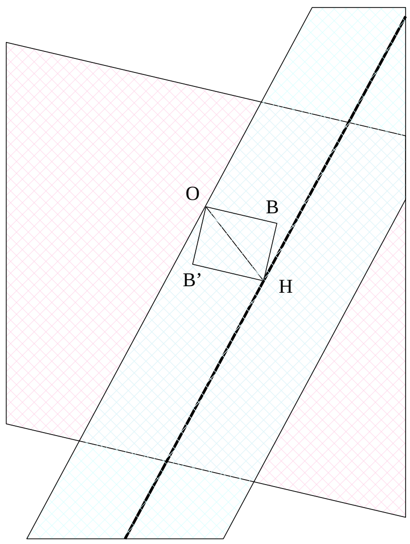
- $d(A,\mathcal{P})=\dfrac{|1-4+3-1|}{\sqrt{1+4+9}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$.
- La droite passe par le point $M(1,2,0)$, pour lequel $\overrightarrow{BM}=(0,0,1)$, et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}=(3,-1,2)$, donc $d(B,d)=\dfrac{\parallel \overrightarrow{BM}\wedge\overrightarrow{u}\parallel}{\parallel\overrightarrow{u}\parallel}=\dfrac{\parallel(1,3,0))\parallel}{\sqrt{9+1+4}}=\sqrt{\dfrac{10}{14}}=\sqrt{\dfrac{5}{7}}$.
- La droite admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}=(2,-1,1)\wedge(1,-1,1)=(0,-1,-1)$, et passe par exemple par le point $M(2,3,0)$ (attention, ici on est obligés de prendre $x=2$ pour obtenir des

points de la droite, ce qu'on constate en soustrayant les deux équations de plans), pour lequel $\overrightarrow{CM} = (1, 3, -2)$. On a donc $d(C, d) = \dfrac{\| \overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{u} \|}{\| \overrightarrow{u} \|} = \dfrac{\| (-5, 1, 1) \|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{\dfrac{27}{2}}$.

- Les droite D admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (-1, 1, -1) \wedge (1, -1, 2) = (1, 1, 0)$, et la droite D' admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'} = (2, -1, -1) \wedge (-1, -2, 3) = (-5, -5, -5)$. On prendra plutôt $(1, 1, 1)$ comme vecteur directeur, et on calcule $(1, 1, 0) \wedge (1, 1, 1) = (1, -1, 0)$. reste à trouver un point sur chaque droite. Pour D', c'est facile, $(0, 0, 0)$ convient. Pour D, on peut prendre par exemple $(-1, 2, 2)$ (j'ai imposé $x = 1$ pour avoir des conditions très simples, en l'occurence $y = z$ et $-y + 2z = 2$ dans les deux équations de plan). On calcule alors $d(D, D') = \dfrac{|(1, -1, 0).(-1, 2, 2)|}{\| (1, -1, 0) \|} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Exercice 10 (**)

1. Cette distance vaut simplement $\sqrt{(4 + 2t)^2 + (3 + t)^2 + (1 + t)^2}$ $= \sqrt{16 + 16t + 4t^2 + 9 + 6t + t^2 + 1 + 2t + t^2} = \sqrt{6t^2 + 24t + 26}$. Cette distance est minimale lorsque $6t^2 + 24t + 26$ (qui est toujours positif puisque somme de trois carrés) atteint son minimum, c'est-à-dire pour $t = -\dfrac{24}{2 \times 6} = -2$. Le point correspond de la droite vérifie $x = 0$, $y = 1$ et $z = -1$, donc $H(0, 1, -1)$. On ne revient évidemment pas à la grosse racine carrée pour calculer la distance : $d(O, D) = OH = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.
2. Avec le paramétrage donné pour D, $x - 2z = 4 + 2t - 2(1 + t) = 2$. Hum, il semblerait bien qu'il y ait une légère erreur dans cet énoncé. Remplaçons donc l'équation de $\mathcal{P}$ par $x - 2z = 2$. Le plan $\overrightarrow{P}$ ayant pour vecteur normal $(1, 0, -2)$, un vecteur normal $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ du plan $\mathcal{Q}$ devra vérifier $\alpha - 2\gamma = 0$ pour être orthogonal à celui de $\mathcal{P}$. Il devra également être orthogonal à un vecteur directeur de D, ce qui implique $2\alpha + \beta + \gamma = 0$. On a donc $\alpha = 2\gamma$ et $\beta = -5\gamma$, on peut choisir $\overrightarrow{n} = (2, -5, 1)$. Le plan $\mathcal{Q}$ a donc une équation de la forme $2x - 5y + z + d = 0$, et il passe par le point $A(4, 3, 1)$ (puisqu'il contient la droite D), donc $8 - 15 + 1 + d = 0$, soit $d = 6$. On obtient finalement l'équation $2x - 5y + z + 6 = 0$
3. Via la formule du cours, $d(O, \mathcal{P}) = \dfrac{|-2|}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. De même, on calcule $d(O, \mathcal{Q}) = \dfrac{6}{\sqrt{4 + 25 + 1}} = \dfrac{6}{\sqrt{30}}$. Si on note B et B' les projetés orthogonaux de O sur les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, et B'' celui sur la droite D, le quadrilatère $OBB''B'$ est un rectangle car les deux plans se coupent en D et sont perpendiculaires. Par application du théorème de Pythagore, $d(O, D) = \sqrt{d(O, \mathcal{P})^2 + d(O, \mathcal{Q})^2} = \sqrt{\dfrac{4}{5} + \dfrac{36}{30}} = \sqrt{\dfrac{10}{5}} = \sqrt{2}$.



Exercice 11 (** à ***)

Une façon de faire, pour exploiter les données de notre cours, est de trouver les coordonnées de quatre points formant un tétraèdre régulier dans un repère orthonormal direct. On peut toujours prendre $A(0,0,0)$, et $B(1,0,0)$. Le point C peut être choisi dans le plan $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, pour que ABC soit équilatéral on choisira $C\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$. Reste à trouver un point $D(x,y,z)$ à distance 1 des points A, B et C. Il devra certainement vérifier $x = \frac{1}{2}$ (c'est une condition nécessaire pour avoir $DA = DB$, puis $AD^2 = \frac{1}{4} + y^2 + z^2 = 1$, soit $y^2 + z^2 = \frac{3}{4}$; et $CD^2 = \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + z^2 = 1$, soit $y^2 - \sqrt{3}y + \frac{3}{4} + z^2 = 1$. Comme $y^2 + z^2 = \frac{3}{4}$, on trouve $-\sqrt{3}y = -\frac{1}{2}$, soit $y = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. On a alors $y^2 = \frac{1}{12}$, donc il faut $z^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, donc par exemple $z = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Le point D a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

- Le plan (ABC) étant confondu avec le plan $z = 0$, la hauteur du tétraèdre est simplement la cote du point D, donc $\sqrt{\frac{2}{3}}$.
- La base ABC a pour aire $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, donc le volume du tétraèdre vaut $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$.
- Il s'agit de calculer par exemple la distance entre les droites (AB) et (CD). On peut appliquer la formule du cours : $d((AB),(CD)) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}]|}{\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} \|}$. On a $\overrightarrow{AB} = (1,0,0)$, et $\overrightarrow{CD} = \left(0, \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \left(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. La norme de ce vecteur vaut $\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = 1$, il suffit donc de calculer $|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}).\overrightarrow{AC}| = \left|-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Les plus motivés peuvent tenter de calculer cette distance par des moyens géométriques

élémentaires.

- En notant $I\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ le milieu de $[AB]$, l'angle entre les faces (ABC) et (ABD) correspond à l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$ (vérifiez si vous ne me croyez pas que ces deux vecteurs sont orthogonaux à (AB), qui est évidemment la droite d'intersection des deux faces). Ces deux vecteurs ont pour coordonnées $\overrightarrow{IC} = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ et $\overrightarrow{ID} = \left(0, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Ces deux vecteurs ont pour norme $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ce sont des hauteurs de triangles équilatéraux de côté 1, mais on peut le retrouver par le calcul), et pour produit scalaire $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$. On en déduit que $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos(\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}}) = \frac{1}{4}$, donc $\cos(\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}}) = \frac{1}{3}$. Les faces forment entre elles un angle (non remarquable) de $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 12 (*)

Notons $(\mathcal{S}_1)$, $(\mathcal{S}_2)$ et $(\mathcal{S}_3)$ les trois sphères.

- $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 4$, donc $\mathcal{S}_1$ a pour centre $A_1(1,1,1)$ et pour rayon $R_1 = 2$.
- $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z + 12 = x^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 - 1$, donc $\mathcal{S}_2$ a pour centre $A_2(0,2,-3)$ et pour rayon $R_2 = 1$.
- $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + \frac{17}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (z-1)^2 - \frac{1}{4} - \frac{9}{4} - 1 + \frac{17}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (z-1)^2 + \frac{3}{4}$, donc la sphère $\mathcal{S}_3$ est vide. Bon, très bien, ce n'était peut-être pas initialement prévu comme ça, mais ça nous fera moins de travail pour la suite !

Pour les intersections avec $\mathcal{P}$, calculons $d(A_1, \mathcal{P}) = \frac{|1+1+1-3|}{\sqrt{1+1+1}} = 0$. Le centre de la sphère est situé sur le plan, donc l'intersection est un cercle de centre A_1 et de rayon 3 (et on est incapable de le décrire mieux que ça). Pour la deuxième sphère, $d(A_2, \mathcal{P}) = \frac{|2-3-3|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} > 1$, donc l'intersection est vide. Passons à l'intersection éventuelle des deux premières sphères : $A_1A_2 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} > R_1 + R_2$, donc les sphères n'ont pas d'intersection. Cet exercire, en plus d'être facile, est bien décevant !

Exercice 13 (**)

Pour déterminer les coordonnées des quatres sommets, il faut résoudre les quatre systèmes de trois équations à trois inconnus obtenus en gardant trois des quatre équations de plan. Allons-y :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & -2 \\ 2x & & & & & = & 6 \end{array}$$

(on a soustrait les deux premières équations et additionné les deux dernières), d'où un premier sommet $A(3,-2,-1)$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ -x & + & y & + & z & = & 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & -2 \\ & & 2y & & & = & 8 \end{array}$$

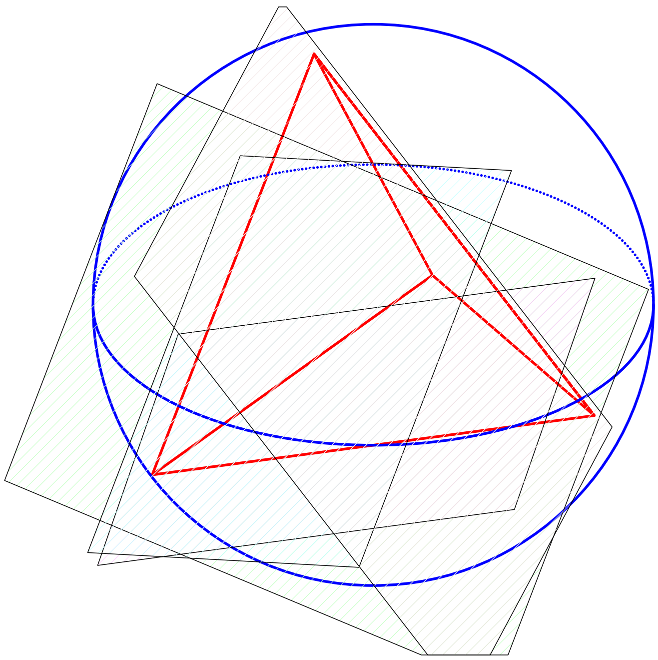
(mêmes opérations que ci-dessus), d'où un deuxième sommet $B(-3,4,-1)$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 4 \\ -x & + & y & + & z & = & 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & 10 \\ & & 2y & & & = & -4 \end{array}$$

(on a additionné les deux deuxières équations et soustrait les deux premières), d'où un troisième sommet $C(-3,-2,5)$.

$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 4 \\ -x & + & y & + & z & = & 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & & & & & = & 6 \\ & & & & 2z & = & 10 \end{array}$ (on a additionné les deux premières et les deux dernières équations), d'où un dernier sommet $D(3,4,5)$.

Le centre $O(x,y,z)$ de la sphère circonscrite est situé à égale distance des quatre sommets. Pour avoir $OA^2 = OB^2$, on doit avoir $(x-3)^2+(y+2)^2+(z+1)^2 = (x+3)^2+(y-4)^2+(z+1)^2$, soit en simplifiant les carrés qui apparaissent des deux côtés $-6x+4y+2z+14 = 6x-8y+2z+26$, donc $-12x+12y-12 = 0$, soit $y = x+1$; de même, la condition $OA^2 = OC^2$ donne $-6x+4y+2z+14 = 6x+4y-10z+38$, soit $-12x+12z-24 = 0$, donc $z = x+2$. Enfin, la condition $OA^2 = OD^2$ (les autres seront automatiquement vérifiées ensuite) donne $-6x+4y+2z+14 = -6x-8y-10z+50$, soit $12y+12z-36 = 0$, donc $y = 3-z$. En reprenant les deux autres conditions, on a donc $x+1 = 3-x-2$, soit $x = 0$, puis $y = 1$ et $z = 2$. Le centre de la sphère circonscrite est donc le point $O(0,1,2)$, et le rayon vaut par exemple $OA = \sqrt{9+9+9} = 3\sqrt{3}$.



Exercice 14 (***)

Pour tout réel m, on considère l'ensemble $\mathcal{S}_m$ des points qui vérifiant l'équation

$$x^2-(2m+2)x+y^2+(2m-2)y+z^2-4mz-6m-4 = 0$$

1. Ca ressemble en effet beaucoup à une sphère : $(x-(m+1))^2-(m^2+2m+1)+(y+(m-1))^2-(m^2-2m+1)+(z-2m)^2-4m^2-6m-4 = 0$, soit $(x-(m+1))^2+(y-(m-1))^2+(z-2m)^2 = 6m^2+6m+6 = 6(m^2+m+1)$. Le trinôme m^2+m+1 ayant un discriminant négatif, il est toujours positif, donc la sphère n'est jamais vide. On est en présence d'une sphère de centre $O_m(m+1, 1-m, 2m)$ et de rayon $R_n = \sqrt{6(m^2+m+1)}$.
2. Le système $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & m \\ y & = & 1 & - & m \\ z & = & & & 2m \end{array}\right.$ est un système d'équations paramétriques d'une droite, passant par le point $A(1,1,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1,-1,2)$.
3. Pour le centre, c'est assez manifestement impossible (si $2m = 2m'$ par exemple, on a automatiquement $m = m'$). Pour le rayon, il faut avoir $m^2+m+1 = m'^2+m'+1$, soit $m^2-m'^2+m-m' = 0$, donc $(m+m')(m-m')+m-m' = 0$ ou encore $(m-m')(m+m'+1)$.

Les sphères ont donc même rayon (outre le cas évident $m = m'$) si $m' = -1 - m$. À part pour $m = -1$, il existe donc, pour toute valeur de m, une autre valeur du paramètre pour laquelle le rayon sera le même.

4. On peut écrire l'équation de nos sphères un peu différemment : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4 + 2m(-x + y - 2z - 3) = 0$. Pour que cette égalité soit vérifiée, à (x, y, z) fixés, indépendamment de la valeur de m, on doit avoir $-x + y - 2z - 3 = 0$, qui est l'équation d'un plan $\mathcal{P}$, et $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4 = 0$, soit $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 6$, équation de la sphère de centre A (le même que ci-dessus) et de rayon $\sqrt{6}$. Comme $d(A, \mathcal{P}) = \dfrac{|-1 + 1 - 3|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}} < \sqrt{6}$, cette intersection est un cercle $\mathcal{C}$ qu'on ne cherchera pas à expliciter plus.
5. Pour qu'aucune sphère ne passe par un point, il faut que l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4 + 2m(-x + y - 2z - 3) = 0$ ne soit vérifiée par aucune valeur de m, ce qui sera le cas si $-x+y-2z-3 = 0$, autrement dit si notre point appartient à $\mathcal{P}$, mais $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4 \neq 0$. L'ensemble recherché est donc $\mathcal{P} \backslash \mathcal{C}$.
6. Le plan $(\mathcal{P}_m)$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n}_m = \overrightarrow{OO_m} = (m + 1, 1 - m, 2m)$, donc a une équation de la forme $(m + 1)x + (1 - m)y + 2mz + d = 0$. Comme il passe de plus par le point O_m, on a $(m + 1)^2 + (1 - m)^2 + (2m)^2 + d = 0$, soit $m^2 + 2m + 1 + 1 - 2m + m^2 + 4m^2 + d = 0$, donc $d = -6m^2 - 2$. D'où l'équation $(m + 1)x + (1 - m)y + 2mz - 6m^2 - 2 = 0$.
7. Il faudrait pour cela que le trinome en la variable m qu'on vient d'obtenir s'annule quelle que soit la valeur de m. Comme son coefficient dominant vaut -6, ce trinôme n'est pas nul, c'est donc impossible. Il n'y a aucun point commun à tous les plans $\mathcal{P}_m$.
8. Le point O_m appartenant par définition au plan $\mathcal{P}_m$, cette intersection sera un cercle de centre O_m et de rayon R_m.
9. Dans ce cas, les vecteurs $\overrightarrow{OO_m}$ et $\overrightarrow{OO_{m'}}$ ne peuvent pas être colinéaires, car leur produit vectoriel vaut $(2(1-m)m' - 2(1-m')m; 2m(m'+1) - 2m'(m+1); (m+1)(1-m') - (m'+1)(1-m)) = (2(m' - m), 2(m - m'), 2(m - m'))$, qui est non nul et colinéaire à $(-1, 1, 1)$. Les deux plans se coupent donc suivant une droite dirigée par $(-1, 1, 1)$, reste à trouver un point sur cette droite. En choisissant par exemple $x = 0$, on a les deux équations $(1 - m)y + 2mz - 6m^2 - 2 = 0$ et $(1 - m')y + 2m'z - 6m'^2 - 2 = 0$. En soustrayant les deux équations, $(m' - m)y + 2(m - m')z = 6(m^2 - m'^2)$, donc $-y + 2z = 6(m + m')$. On injecte dans la première équation : $y + 6m(m + m') - 6m^2 - 2 = 0$, donc $y = 2 - 6mm'$. On en déduit $z = 3(m + m') + 1 - 3mm'$. On peut donc écrire le système paramétrique suivant :
$$\begin{cases} x = & & - & t \\ y = & 2 - 6mm' & + & t \\ z = & 3(m + m') + 1 - 3mm' & + & t \end{cases}$$
10. Il passe au moins un plan par le point de coordonnées (x, y, z) si le trinôme $(m + 1)x + (1 - m)y + 2mz - 6m^2 - 2 = 0$ admet une solution. On peut l'écrire $6m^2 + m(-x + y - 2z) + 2 - x - y$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = (-x + y - 2z)^2 - 24(2 - x - y)$, le point est donc convenable si $\Delta \geqslant 0$, soit $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 4yz + 24x + 24y - 48 \geqslant 0$ (ce qui doit être une zone située en dehors d'un ellipsoïde). Ce n'est certainement pas le cas pour l'origine du repère. D'ailleurs, on obtient dans ce cas l'équation $-6m^2 - 2 = 0$, qui n'a effectivement pas de solution réelle.