Feuille d'exercices n°5 : Géométrie dans l'espace

PTSI B Lycée Eiffel

12 novembre 2012

Exercice 1 (*)

Déterminer les coordonnées cartésiennes des points de coordonnées cylindriques $\left(2; \frac{\pi}{3}, 5\right)$ et $\left(4, \frac{3\pi}{2}, -2\right)$; ainsi que celles des points de coordonnées sphériques $\left(\sqrt{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ et $\left(2, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Déterminer les coordonnées cylindriques et sphériques du point de coordonnées cartésiennes $(\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

À quoi ressemble l'ensemble des points ayant pour coordonnées sphériques $r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$? Et ceux vérifiant $r = 5$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$?

Exercice 2 (*)

Soient $A(0,1,2)$; $B(-1,1,1)$; $C(2;-1;2)$; $D(4;0;-1)$ et $E(1;2;-2)$ cinq points de l'espace.

1. Calculer les distances AB, AD, BC et BE.
2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CE}$.
3. Déteminer les produits vectoriels $\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{CE}$.
4. Calculer les produits mixtes $[\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}]$ et $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$. En déduire le volume du parallélépipède engendré par $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Exercice 3 (**)

Prouver la formule du double produit vectoriel : $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})\overrightarrow{w}$.
En déduire l'identité $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} + (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) \wedge \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 4 (**)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs fixés. Déterminer tous les vecteurs $\overrightarrow{x}$ tels que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{v}$.

Exercice 5 (*)

Calculer les déterminants suivants à l'aide de la règle de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ a+c & ac & a^2+c^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 6 (**)

Soient A, B et C trois points de l'espace, et I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Montrer que les égalités suivantes sont vérifiées quel que soit le point M :

1. $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

2. $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$.
3. $[\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}] = [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{MA}]$.

Exercice 7 (**)

Soit les points $A(1;2;3)$, $B(2;-1;2)$ et $C(0;1;-2)$, les droites $D_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 3 & - & t \\ y & = & 1 & + & 2t \\ z & = & -1 & + & t \end{array} \right.$, et $D_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & 3u \\ y & = & & - & 2u \\ z & = & 3 & + & 5u \end{array} \right.$, et les plans $\mathcal{P}_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & - & 2t & + & 3u \\ y & = & -2 & + & t & + & u \\ z & = & 4 & - & t & - & 2u \end{array} \right.$, $\mathcal{P}_2 : 2x - y + 3z - 1 = 0$, et $\mathcal{P}_3 : x + 2z - 4 = 0$.

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}_1$.
2. Déterminer une équation paramétrique de $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.
3. Donner une équation cartésienne du plan contenant les points A, B et C.
4. Déterminer l'intersection de D_1 et de $\mathcal{P}_2$.
5. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ contenant D_1 et tel que D_2 soit parallèle à $\mathcal{Q}$.
6. Déterminer $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.
7. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_2$ et de la droite (AB).
8. Donner une équation paramétrique de la droite passant par A, parallèle à $\mathcal{P}_2$ et coupant D_1.
9. Donner une équation cartésienne du plan passsant par C et contenant D_1.
10. Donner une équation paramétrique de la droite, si elle existe, passant par A et sécante avec les deux droites D_1 et D_2.

Exercice 8 (*)

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ les deux plans d'équations respectives $3x - 4y + 1 = 0$ et $2x - 3y + 6z - 1 = 0$. Déterminer tous les points équidistants des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

Exercice 9 (*)

Calculer les distances suivantes :

- distance du point $A(1,2,1)$ au plan $\mathcal{P} : x - 2y + 3z = 1$.
- distance du point $B(1,2,-1)$ à la droite D d'équation paramétrique $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & 3t \\ y & = & 2 & - & t \\ z & = & & & 2t \end{array} \right.$
- distance du point $C(1,0,2)$ à la droite d'équation cartésienne $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & -1 \end{array} \right.$.
- distance entre les deux droites D d'équation $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 1 \end{array} \right.$, et D' d'équation $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & - & z & = & 0 \\ -x & - & 2y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right.$.

Exercice 10 (**)

Soit la droite D d'équation paramètrique $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & 4 & + & 2t \\ y & = & 3 & + & t \\ z & = & 1 & + & t \end{array} \right.$

1. Calculer la distance $f(t)$ de O au point $M(t)$ de paramètre t de D : déterminer la valeur de t pour laquelle cette distance est minimale. En déduire les coordonnées de H, projection orthogonale de O sur D. Que vaut la distance de O à D ?

2. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - 2z = 1$ contient la droite D. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{Q}$ contenant D et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.
3. Calculer la distance de O à $\mathcal{P}$ et retrouver celle de O à D.

Exercice 11 (** à ***)

Dans un tétraèdre régulier de côté 1, déterminer :

- la hauteur du tétraèdre (distance entre un sommet et son projeté orthogonal sur la face opposée).
- le volume du tétraèdre.
- la distance entre deux arêtes non coplanaires.
- l'angle entre deux faces.

Exercice 12 (*)

Donner une équation cartésienne de chacune des sphères suivantes (en précisant leur centre et leur rayon), et étudier leur intersection avec le plan $\mathcal{P} : x+y+z-3 = 0$, ainsi que leurs intersections deux à deux :

- $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z + 12 = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + \dfrac{17}{4} = 0$

Exercice 13 (**)

Déterminer le centre A et le rayon R de la sphère circonscrite au tétraèdre dont les faces ont pour équations cartésiennes $x + y + z = 0$, $x + y - z = 2$, $x - y + z = 4$ et $-x + y + z = 6$ (on pourra commencer par déterminer les coordonnées des sommets du tétraèdre).

Exercice 14 (***)

Pour tout réel m, on considère l'ensemble $\mathcal{S}_m$ des points qui vérifiant l'équation

$$x^2 - (2m+2)x + y^2 + (2m-2)y + z^2 - 4mz - 6m - 4 = 0$$

1. Vérifier que, pour tout m, $\mathcal{S}_m$ est une sphère dont on précisera le centre O_m et le rayon R_m.
2. Quel est le lieu décrit par les centres O_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$?
3. Deux sphères de la famille peuvent-elle avoir le même centre ? Le même rayon ? À quelles conditions ?
4. Déterminer l'ensemble des points appartenant simultanément à toutes les sphères $\mathcal{S}_m$.
5. Déterminer l'ensemble des points par lesquels ne passe aucune des sphères $\mathcal{S}_m$.
6. Donner, pout tout réel m, une équation du plan $\mathcal{P}_m$ passant par O_m et perpendiculaire à (OO_m).
7. Déterminer l'ensemble des points appartenant à tous les plans $\mathcal{P}_m$.
8. Caractériser l'intersection $\mathcal{P}_m \cap \mathcal{S}_m$.
9. Montrer que, si $m \neq m'$, $\mathcal{P}_m \cap \mathcal{P}_{m'}$ est une droite dont on donnera une équation paramétrique.
10. Donner une équation de l'ensemble $\mathcal{Q}$ des points par lesquels passe au moins un plan $\mathcal{P}_m$. Le point O appartient-il à $\mathcal{Q}$?