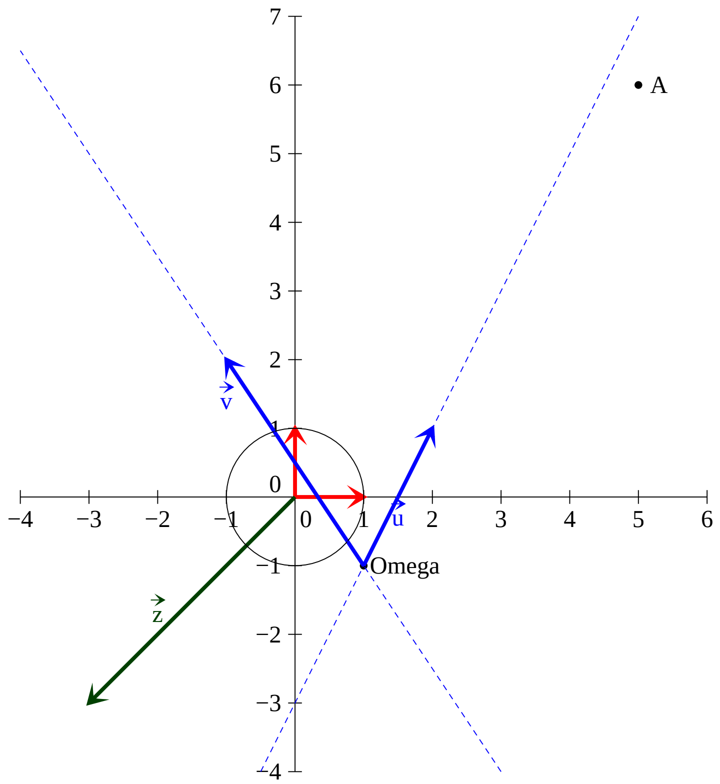
Feuille d'exercices n°3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

16 octobre 2012

Exercice 1 (*)



1. Il suffit de vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires : $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 3 + 4 = 7$, donc $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère du plan. De plus, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -2 + 6 = 4$, donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas orthogonaux, le repère n'est pas orthonormal (les deux vecteurs ne sont d'ailleurs pas non plus normés).
2. Essayons d'exprimer les coordonnées du point A dans l'ancien repère de deux façons différentes. D'une part, par définition des coordonnées d'un point, on a $\overrightarrow{OA} = 5\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j}$. D'autre part, on peut passer par l'intermédiaire du point Ω et utiliser la définition des coordonnées dans le nouveau repère : en notant (x, y) les coordonnées de A dans $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on peut écrire $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + x(\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}) + y(-2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}) = (1 + x - 2y)\overrightarrow{i} + (-1 + 2x + 3y)\overrightarrow{j}$. Les coordonnées d'un point dans un repère étant unique, on peut identifier les deux formules pour obtenir les équations $\left\{ \begin{array}{lcl} 5 & = & 1 + x - 2y \\ 6 & = & -1 + 2x + 3y \end{array} \right.$. Reste à résoudre ce système, en effectuant l'opération $2L_1 - L_2$ on obtient $4 = 3 - 7y$, soit $y = -\frac{1}{7}$, puis on trouve $x = 4 + 2y = \frac{26}{7}$. Les nouvelles coordonnées du point A sont donc $\left(\frac{26}{7}; -\frac{1}{7}\right)$.

Pour le vecteur $\overrightarrow{z}(-3,-3)$, les calculs sont exactement les mêmes jusqu'à la résolution du système, qui ressemble cette fois-ci à $\left\{\begin{array}{rcl} -3 & = & 1+x-2y \\ -3 & = & -1+2x+3y \end{array}\right.$. Par la même opération que tout à l'heure, on obtient cette fois-ci $-3 = 3-7y$, soit $y = \frac{6}{7}$, puis $x = -4+2y = -\frac{16}{7}$, ce qui donne pour coordonnées $\left(-\frac{16}{7}; \frac{6}{7}\right)$.

3. Si on reprend plus généralement les calculs de la question précédente, en notant (a,b) les coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et (x,y) ses coordonnées dans $(\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on aura toujours les relations $\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1+x-2y \\ b & = & -1+2x+3y \end{array}\right.$. L'équation de notre cercle dans l'ancien repère est $a^2+b^2-1=0$, qui se transforme donc en $(1+x-2y)^2+(-1+2x+3y)^2-1=0$, soit $1+x^2+4y^2+2x-4y-4xy+1+4x^2+9y^2-4x-6y+12xy-1=0$. En regroupant on trouve l'équation $5x^2+13y^2+8xy-2x-10y+1=0$, on ne reconnait plus vraiment une équation cartésienne de cercle, ce qui est normal quand on n'est plus dans un repère orthonormal (en fait, il s'agit d'une équation d'ellipse dans un repère orthonormal).

Exercice 2 (***)

1. C'est une simple application des propriétés du produit scalaire : $a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = c^2+b^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = c^2+b^2-2AB.AC.\cos(\widehat{BAC}) = b^2+c^2-2bc\cos(\widehat{BAC})$.
2. En fait, on ne peut pas exprimer le sinus uniquement en fonction de a. Le mieux qu'on puisse faire, c'est écrire $\sin(\widehat{BAC}) = \sqrt{1-\cos^2(\widehat{BAC})} = \sqrt{(1-\cos(\widehat{BAC}))(1+\cos(\widehat{BAC}))} = \sqrt{\left(1-\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}\right)\left(1+\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}\right)} = \frac{1}{2bc}\sqrt{(2bc-a^2+b^2+c^2)(2bc+a^2-b^2-c^2)} = \frac{1}{2bc}\sqrt{((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)}$.
3. On peut remarquer, de par la définition de l'aire d'un triangle, que $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{BAC})$, donc $\frac{a}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{abc}{2\mathcal{A}_{ABC}}$. De même, $\frac{b}{\sin(\widehat{CBA})} = \frac{c}{\sin(\widehat{BCA})} = \frac{abc}{2\mathcal{A}_{ABC}}$, d'où l'égalité demandée.
4. Reprenons les formules précédentes : $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{BAC}) = \frac{1}{4}\sqrt{((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)} = \frac{1}{4}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)} = \frac{1}{4}\sqrt{2p(2p-2a)(2p-2c)(2p-2b)}$ $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, en utilisant que $a+b+c=2p$.

Exercice 3 (*)

On peut encore utiliser le produit scalaire : $AC^2+BD^2 = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})^2+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2 = AB^2+BC^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+BC^2+CD^2+2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}$. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$, donc $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD} = 0$, et $BC^2 = DA^2$, d'où la formule demandée.

Exercice 4 (*)

Cet exercice a subi une déflation de son niveau de difficulté.
Considérons donc un triangle ABC et notons H le point de concours des hauteurs issues de A et de B dans ce triangle, c'est-à-dire un point vérifiant $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$. On veut prouver

que H appartient aussi à la hauteur issue de C, c'est-à-dire que $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0$. Calculons donc $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH}).\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CB}$. le dernier terme étant nul, il reste $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}$. Le dernier terme est à nouveau nul, les deux premiers sont opposés, il ne reste donc rien, et on peut passer à l'exercice suivant.

Exercice 5 (**)

Commençons avant tout par donner les coordonnées des trois sommets du triangle : $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(x,y)$.

1. Jusque-là, facile : G a pour abscisse $\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{1+x}{3}$ et pour ordonnée $\dfrac{y}{3}$.
2. La hauteur issue de C dans le triangle est simplement constituée des points d'abscisse x. Le point H a donc pour coordonnées (x, y_H), avec par exemple $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0$, soit $x(x-1) + y_H y = 0$, soit $y_H = \dfrac{x(1-x)}{y}$.
3. La médiatrice du segment $[AB]$ est simplement constituée des points d'abscisse $\dfrac{1}{2}$, notons donc y_O l'ordonnée du centre du cercle circonscrit. On peut par exemple écrire $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{AC} = 0$, où $I\left(\dfrac{x}{2}, \dfrac{y}{2}\right)$ est le milieu du segment $[AC]$. Cela donne la condition $\dfrac{x-1}{2} \times x + \left(\dfrac{y}{2} - y_0\right) \times y = 0$, soit $x^2 - x + y^2 - 2yy_O = 0$, donc $y_O = \dfrac{x(x-1)}{2y} + \dfrac{y}{2}$. On en conclut que $O\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{x(x-1)}{2y} + \dfrac{y}{2}\right)$.
4. Le vecteur $\overrightarrow{GH}$ a pour abscisse $x - \dfrac{1+x}{3} = \dfrac{2x-1}{3}$, et pour ordonnée $\dfrac{x(1-x)}{y} - \dfrac{y}{3} = \dfrac{3x - 3x^2 - y^2}{3y}$. Le vecteur $2\overrightarrow{OG}$ a pour abscisse $2\left(\dfrac{1+x}{3} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2+2x}{3} - 1 = \dfrac{2x+1}{3}$, et pour ordonnée $2\left(\dfrac{y}{3} - \dfrac{x(x-1)}{2y} - \dfrac{y}{2}\right) = \dfrac{2y^2 - 3x(x-1) - 3y^2}{3y} = \dfrac{3x - 3x^2 - y^2}{3y}$. Les deux vecteurs ont les mêmes coordonnées, ils sont donc égaux.
5. Le symétrique de H par rapport au côté $[AB]$ a pour coordonnées $\left(x, \dfrac{x(x-1)}{y}\right)$ puisque la droite (AB) est ici confondue avec l'axe des abscisses du repère. Le cercle circonscrit a pour rayon $R = OA = \sqrt{x_O^2 + y_O^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{x^2(x-1)^2}{4y^2} + \dfrac{x(x-1)}{2} + \dfrac{y^2}{4}}$. Calculons donc le carré de la distance du premier symétrique au centre O du cercle circonscrit : $\left(\dfrac{1}{2} - x\right)^2 + \left(\dfrac{x(x-1)}{2y} + \dfrac{y}{2} - \dfrac{x(x-1)}{y}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2} - x\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2} - \dfrac{x(x-1)}{2y}\right)^2 = \dfrac{1}{4} - x + x^2 + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x(x-1)}{2} + \dfrac{x^2(x-1)^2}{4y^2} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{x^2(x-1)^2}{4y^2} = R^2$, le point appartient bien au cercle.
   Pour les deux autres symétriques, on peut s'épargner bien du souci en constatant que la propriété en question ne dépend pas du repère choisi, et même pas du fait qu'on a décrété au départ $AB = 1$ (si $AB = k$, on multiplie les coordonnées de toutes les points par k, les distances sont multipliées également par k, et la conclusion reste la même). En partant d'un repèe centré en B et ayant $\overrightarrow{BC}$ pour vecteur de base, on montrerait ainsi identiquement que le symétrique de H par rapport à (BC) est sur le cercle circonscrit, et de même pour le troisième symétrique.
   Si on tient vraiment à faire les calculs, ça se complique un peu. Faisons-les pour le symétrique par rapport à (AC). La droite (AC) a pour équation $y_M = \dfrac{y}{x} x_M$ (en notant (x_M, y_M) les coordonnées d'un point du plan, x et y étant déjà pris pour C). La hauteur issue de B dans ABC a pour équation $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0$, soit $(x_M - 1)x + y_M y = 0$. Le point d'intersection D

de la hauteur et de la droite vérifie donc $(x_D-1)x+\dfrac{y^2}{x}x_D=0$, soit $x_D=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$, et donc $y_D=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. En notant H' le symétrique de H par rapport à (AC), on doit avoir $\overrightarrow{DH'}=\overrightarrow{HD}$, soit $x_{H'}=2x_D-x_H=\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}-x$; et pour ordonnée $y_{H'}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}-\dfrac{x(1-x)}{y}$. Il ne reste plus qu'à calculer $OH'^2=\left(\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}-x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{2xy}{x^2+y^2}-\dfrac{x(1-x)}{y}-\dfrac{x(x-1)}{2y}-\dfrac{y}{2}\right)^2$

$=\dfrac{4x^4}{(x^2+y^2)^2}+x^2+\dfrac{1}{4}-\dfrac{4x^3}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}+x+\dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$+\dfrac{x^2(x-1)^2}{4y^2}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{2x^2(x-1)}{x^2+y^2}-\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}-\dfrac{x(x-1)}{2}$

$=\dfrac{4x^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}+\dfrac{2x^3-2x^2-2xy^2-4x^3-2x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2(x-1)^2}{4y^2}$

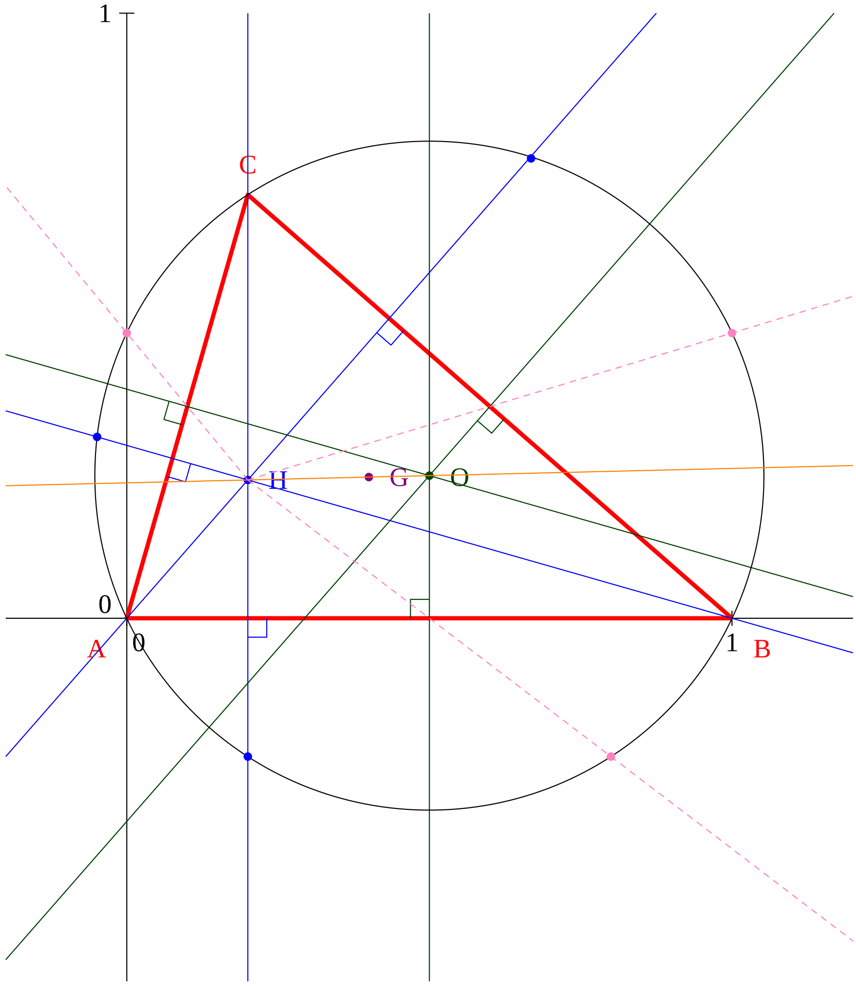
$=\dfrac{-2x(y^2+x^2)}{x^2+y^2}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2(x-1)^2}{4y^2}$

$=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2(x-1)^2}{4y^2}=OA^2.$

Les plus masochistes d'entre vous montreront que ça marche également pour le troisième symétrique.

6. Comme dans la question précédente, on peut se contenter de faire le symétrique de H par rapport au milieu de $[AB]$. Ledit milieu a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$, donc le symétrique de H aura pour coordonnées $\left(1-x,\dfrac{x(x-1)}{y}\right)$ (si ça ne vous semble pas évident, vous les retrouverez en écrivant $\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{IH'}$), donc le carré de sa distance à O vaut $\left(\dfrac{1}{2}-x\right)^2+\left(\dfrac{x(x-1)}{2y}-\dfrac{y}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}-x+x^2+\dfrac{x^2(x-1)^2}{4y^2}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x(x-1)}{2}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^2(x-1)^2}{4y^2}+\dfrac{y^2}{4}=OA^2$. Là encore, les courageux peuvent faire les calculs pour les deux derniers symétriques (c'est un peu moins pénible que ci-dessus).

   Sur la magnifique dessin ci-dessous, les points O, G et H sont alignés sur la droite orange, les symétriques de H par rapport aux côtés (points bleus, situés sur les hauteurs de la même couleur), et par rapport aux milieux (points roses, les médiatrices sont en vert) sont tous situés sur le cercle circonscrit au triangle (en noir).



Exercice 6 (*)

- On a déjà une équation cartésienne, on peut obtenir l'équation normale en divisant par $\sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$, ce qui donne $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}x + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$ (on a également changé le signe pour trouver la forme standard avec un coefficient positif à droite). Comme on ne connait pas vraiment d'angle dont le cosinus vaut $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et le sinus $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, on peut juste constater que l'angle en question va se trouver entre $\dfrac{\pi}{2}$ et π, on peut donc prendre $\theta_0 = \arccos\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ pour trouver une équation polaire $r = \dfrac{3}{\sqrt{5}\cos(\theta-\theta_0)}$. Enfin, $(2,-1)$ est un vecteur normal à (d), donc $(1,2)$ un vecteur directeur. Par ailleurs, le point $A(0,3)$ appartient à la droite, qui est donc décrite par le système d'équations paramétriques $\left\{\begin{array}{lll} x & = & t \\ y & = & 3+2t \end{array}\right.$.
- Un point $M(x,y)$ appartient à (d) si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$, soit $8(x-1)-4(y-2) = 0$, donc $8x-4y=0$, ce qu'on peut simplifier en $2x-y=0$ (en effet, on peut deviner en regardant les coordonnées de A et B que $y=2x$ est une équation de la droite). On peut en déduire directement un système d'équations paramétrique : $\left\{\begin{array}{lll} x & = & t \\ y & = & 2t \end{array}\right.$. L'équation normale s'obtient comme ci-dessus, $\dfrac{2}{\sqrt{5}}x - \dfrac{1}{\sqrt{5}}y = 0$, et comme la droite passe par l'origine, on a comme

équation polaire $\theta \equiv \theta_0 \equiv \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) [\pi]$.

- La droite précédente avait pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(4,8)$, un point $M(x,y)$ appartient à notre nouvelle droite si $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 0$, soit $4(x+1)+8(y-3) = 0$, donc $4x+8y-20 = 0$. On peut diviser tout cela par 4 pour obtenir $x+2y-5=0$. On commence à avoir l'habitude des divisions par $\sqrt{5}$, celà donne $\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y = \sqrt{5}$. L'équation polaire n'aura une fois de plus aucun intérêt. Pour le paramétrage, on peut prendre comme vecteur directeuR $(8,-4)$, ce qui donne $\begin{cases} x &= -1+8t \\ y &= 3-4t \end{cases}$.
- On obtient directement une équation cartésienne : $(x-1)-2(y-1) = 0$, soit $x-2y+1 = 0$. L'équation normale correspondante est $-\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (non, je ne fais pas une obsession sur le nombre $\sqrt{5}$). On zappe l'équation polaire, une équation paramétrique possible est $\begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= 1+t \end{cases}$.

Exercice 7 (**)

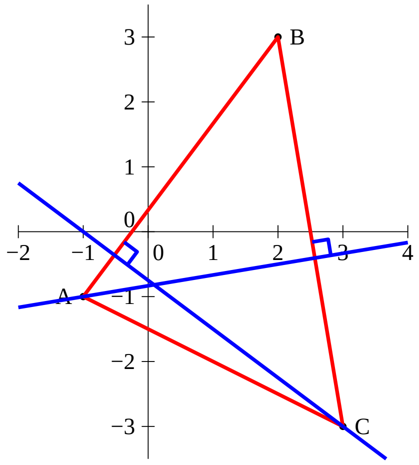
Le point $M(x,y)$ appartient à (au moins) une des droites de la famille si l'équation $(1-a^2)x + 2ay + a^2 - 2a - 3 = 0$ (d'inconnue a) admet au moins une solution. Cette équation peut être mise sous forme d'équation du second degré : $(1-x)a^2 + (2y-2)a + x - 3 = 0$. Elle admet pour discriminant $\Delta = (2y-2)^2 - 4(1-x)(x-3) = 4((y-1)^2 + (x-1)(x-3))$. Cette équation admet (au moins) une solution si $\Delta \geqslant 0$, soit $(y-1)^2 + x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$, soit $(y-1)^2 + (x-2)^2 \geqslant 1$. Le point M doit donc être situé à une distance supérieure ou égale à 1 du point $A(2,1)$. L'ensemble des points par lesquels passe au moins une droite de la famille est donc le plan privé du disque ouvert de centre A et de rayon 1.

Dans le cas où $\Delta > 0$, il y a deux solutions qu'on notera a et b à l'équation, donc deux droites de la famille passent par M, de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{u_a}(1-a^2, 2a)$ et $\overrightarrow{u_b}(1-b^2, 2b)$. Les deux droites seront perpendiculaires si $\overrightarrow{u_a}.\overrightarrow{u_b} = 0$, soit $(1-a^2)(1-b^2) + 2a \times 2b = 0$, donc $1-a^2-b^2+5a^2b^2 = 0$. Or, on connait la somme et le produit des deux solutions d'une équation du second degré : $a+b = 2-2y$ et $ab = x-3$. On en déduit que $a^2b^2 = (x-3)^2$, et $-a^2-b^2 = 2ab-(a+b)^2 = 2(x-3)-(2-2y)^2$. Du coup, notre condition devient $1+2(x-3)-(2-2y)^2+5(x-3)^2 = 0$, soit en développant et en regroupant $5x^2-4y^2-28x+8y+36 = 0$. On ne sait pas décrire précisément ce genre d'ensemble pour l'instant, il s'agit en fait d'une hyperbole.

Exercice 8 (*)

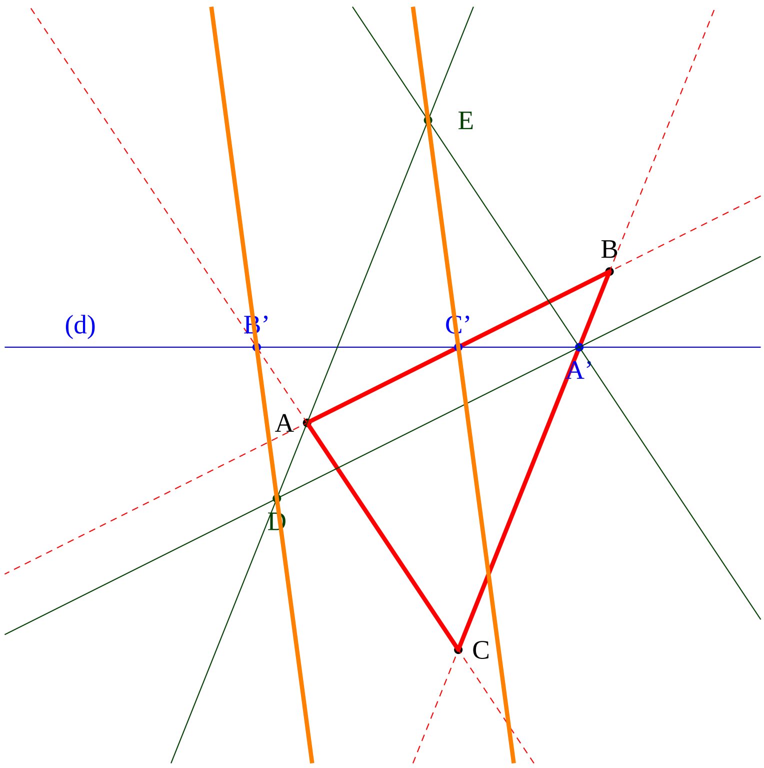
1. Un simple calcul de déterminant suffit : $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|-6-16| = 11$.
2. On sait par ailleurs que $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times AH \times BC$, où H est le projeté orthogonal de A sur (BC). Autrement dit, $d(A,(BC)) = AH$. Comme $BC = \sqrt{1^2+(-6)^2} = \sqrt{37}$, on en déduit que $d(A,(BC)) = \frac{22}{\sqrt{37}}$.
3. Un point $M(x,y)$ appartient à (AB) si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$, soit $\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ y+1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, ce qui se traduit par $4(x+1)-3(y+1) = 0$, donc en développant $4x-3y+1 = 0$.
4. La longueur de la hauteur correspond à $d(C,(AB)) = \frac{|4 \times 3 - 3 \times -3 + 1|}{AB} = \frac{22}{\sqrt{9+16}} = \frac{22}{5}$.

On retrouve pour l'aire du triangle $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{22}{5} \times AB = 11$.



Exercice 9 (***)

1. On obtient sans difficulté du premier coup une figure de ce type :



2. Le point B' appartenant à la droite (AC), il a une abscisse nulle, on peut donc écrire $B'(0, \beta)$. De même, $C' \in (AB)$ donc $C'(\gamma, 0)$.
3. Un point $M(x, y)$ appartient à la droite (d) si et seulement si $\det(\overrightarrow{B'M}, \overrightarrow{B'C'}) = 0$, soit $\begin{vmatrix} x & \gamma \\ y - \beta & -\beta \end{vmatrix} = 0$, ce qui donne l'équation cartésienne $-\beta x - \gamma(x - \beta) = 0$, ou encore $\beta x + \gamma y - \beta\gamma = 0$. La droite (BC) a plus simplement pour équation $x + y = 1$. Le point

A' étant à l'intersection de ces deux droites, on peut écrire $y_{A'} = 1 - x_{A'}$, et inclure dans l'autre équation pour obtenir la condition $\beta x_{A'} + \gamma - \gamma x_{A'} - \beta\gamma = 0$, ce qui donne $\dfrac{\gamma(1-\beta)}{\gamma - \beta}$. On en tire ensuite $y_{A'} = 1 - x_{A'} = \dfrac{\beta(\gamma - 1)}{\gamma - \beta}$.
Pour le point D, on utilise les parallélismes donnés par l'énoncé. Comme $(AD)//(BC)$, on a la condition $\det(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}) = 0$, qui donne $x_D + y_D = 0$. Un peu plus compliqué, $(A'D)//(AB)$ donne $y_D - y_{A'} = 0$, soit $y_D = y_{A'} = \dfrac{\beta(\gamma-1)}{\gamma-\beta}$, et $x_D = -y_D = \dfrac{\beta(1-\gamma)}{\gamma-\beta}$. On procède de même pour le point E : $(AE)//(BC)$ donne, comme pour le point D, $x_E + y_E = 0$. Et $(A'E)//(AC)$ donne $x_E - x_{A'} = 0$, soit $x_E = x_{A'} = \dfrac{\gamma(1-\beta)}{\gamma-\beta}$, puis $y_E = -x_E = \dfrac{\gamma(\beta-1)}{\gamma-\beta}$.

4. Calculons donc $\det(\overrightarrow{B'D}, \overrightarrow{C'E}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\beta(1-\gamma)}{\gamma-\beta} & \dfrac{\gamma(1-\beta)}{\gamma-\beta} - \gamma \\ \dfrac{\beta(\gamma-1)}{\gamma-\beta} - \beta & \dfrac{\gamma(\beta-1)}{\gamma-\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\beta(1-\gamma)}{\gamma-\beta} & \dfrac{\gamma(1-\gamma)}{\gamma-\beta} \\ \dfrac{\beta(\beta-1)}{\gamma-\beta} & \dfrac{\gamma(\beta-1)}{\gamma-\beta} \end{vmatrix} =$ $\dfrac{\beta\gamma(1-\gamma)(\beta-1) - \beta\gamma(\beta-1)(1-\gamma)}{\gamma-\beta} = 0$, ce qui prouve le parallélisme des droites $(B'D)$ et $(C'E)$.

Exercice 10 (**)

1. Avec l'énoncé que je vous ai donné, ABC est un triangle absolument quelconque, ce qui rend les calculs ultérieurs très similaires à ceux qu'on va faire mais assez peu palpitants. Remplaçons donc $AC = a\sqrt{2}$ par $AC = a\sqrt{3}$. On a alors $BC^2 = AC^2 + AB^2$ et le triangle est rectangle en A.
2. Développons tous les carrés en faisant intervenir le point A : $-4MA^2 + 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})^2 + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})^2 = 6a^2$, donc $-4MA^2 + 3MA^2 + 6\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} + 3AB^2 + MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} + AC^2 = 6a^2$. Les MA^2 se simplifient, on remplace les côtés du triangle par leurs longueurs, et on trouve $\overrightarrow{MA}.(6\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 6a^2 - 3a^2 - 3a^2 = 0$. L'ensemble cherché est donc la droite passant par A (on vérifie aisément que le point A est effectivement solution du problème posé), et de vecteur normal $6\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (sans la modification d'énoncé, le vecteur normal reste le même mais la droite ne passe plus par un sommet du triangle).
3. Même calcul en faisant cette fois apparaitre des C partout : $-4MC^2 - 8\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{CA} - 4CA^2 + 3MC^2 + 6\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{CB} + 3CB^2 + MC^2 = 0$, qui donne $\overrightarrow{MC}.(-4\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CB}) = 0$, soit $\overrightarrow{MC}.(3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. L'ensemble cherché est donc une droite passant par C, de vecteur normal $3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Exercice 11 (*)

Les deux cercles passent par l'origine, leur rayon est donc égal à la distance de l'origine au centre.

- On peut factoriser en $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{2}$. Le cercle a donc pour centre $A\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$, et pour rayon $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. La point A ayant pour coordonnées polaires $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, une équation polaire du cercle est $r = 3\sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$. On peut également reprendre les coordonnées cartésiennes du centre (ou développer l'équation précédente) pour obtenir $r = 3\cos(\theta) + 3\sin(\theta) = 3(\cos(\theta) + \sin(\theta))$.
- Factorisons donc : $(x - \sqrt{3})^2 + (y+1)^2 = 4$, il s'agit du cercle de centre $A(\sqrt{3}, -1)$ et de rayon 2. On peut donner comme première équation polaire $r = 2\sqrt{3}\cos(\theta) - \sin(\theta)$, puis en

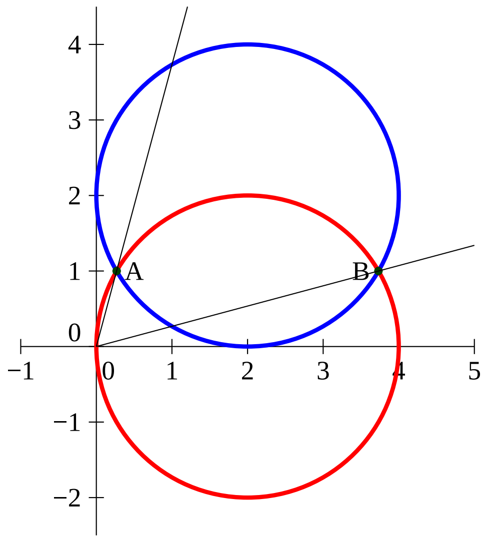
factorisant $r = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta) - \frac{1}{2}\sin(\theta)\right) = 4\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 12 (**)

Factorisons l'équation du cercle : $(x-\lambda)^2 + (y+1)^2 = \lambda^2 - 1$. Le cercle est donc vide lorsque $\lambda \in]-1;1[$, réduit au point $(1,-1)$ ou $(-1,-1)$ lorsque $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ respectivement, et c'est un cercle de centre $A_\lambda(\lambda,-1)$ et de rayon $\sqrt{\lambda^2-1}$ sinon. Pour savoir le nombre de points d'intersection avec la droite, on peut calculer la distance $d(\Omega, D) = \frac{|\lambda - 1 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|\lambda|}{\sqrt{2}}$. Le carré de cette distance, $\frac{\lambda^2}{2}$, est plus petit que le carré du rayon du cercle si $1 \leqslant \frac{\lambda^2}{2}$, soit $|\lambda| \geqslant \sqrt{2}$. Cherchons dans ce cas les coordonnées du ou des points d'intersection, notons $M(x,y)$ un tel point, on aura $y = -1 - x$, donc en reportant dans l'équation du cercle $(x-\lambda)^2 + (-x)^2 = \lambda^2 - 1$, soit $2x^2 - 2\lambda x + 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 4\lambda^2 - 8 = 4(\lambda^2 - 2)$. La condition de positivité est celle obtenue plus haut, et on a dans ce cas deux solutions $x_1 = \frac{2\lambda + 2\sqrt{\lambda^2-2}}{4} = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2-2}}{2}$, et $x_2 = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2-2}}{2}$. Les ordonnées correspondantes sont $y_1 = -1 - x_1$ et $y_2 = -1 - x_2$ (ça n'a pas grand intérêt de développer plus). Le cercle et la droite sont tangents dans deux cas : si $\lambda = \sqrt{2}$, $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y_1 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$; si $\lambda = -\sqrt{2}$, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$.

Exercice 13 (*)

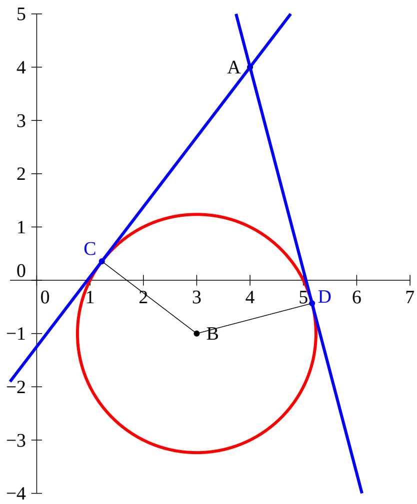
Le premier cercle a pour rayon λ, et donc pour équation $(x-\lambda)^2 + y^2 = \lambda^2$. Le deuxième a également pour rayon λ (il sera aussi tangent à l'axe (Oy)), et a pour équation $(x-\lambda)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2$. Les deux centres sont distants de λ, les deux cercles vont toujours avoir deux points d'intersection. La première équation de cercle se ramène à $x^2 + y^2 = 2\lambda x$. On peut développer la deuxième pour obtenir $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y + \lambda^2 = 0$. En reprenant la première condition, on a donc $-2\lambda y + \lambda^2 = 0$, soit $y = \frac{\lambda}{2}$. On doit alors avoir (équation du premier cercle) $(x-\lambda)^2 = \frac{3\lambda^2}{4}$, soit $x = \lambda \pm \frac{\sqrt{3}\lambda}{2}$. Les deux points d'intersection sont donc $A\left(\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\lambda; \frac{1}{2}\lambda\right)$ et $B\left(\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\lambda; \frac{1}{2}\lambda\right)$. Le point A se trouve donc sur la droite d'équation $x = (2 - \sqrt{3})y$, et le point B sur la droite d'équation $x = (2 + \sqrt{3})y$. Plus précisément, puisque $\lambda > 0$, les points d'intersection parcourront les demi-droites ouvertes issues de O ayant ces équations. Les demi-droites sont en noir dans la figure ci-dessous, on a tracé les deux cercles lorsque $\lambda = 2$:



Exercice 14 (**)

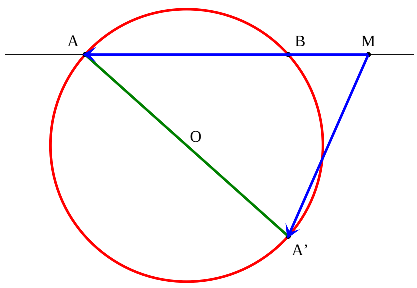
En fait, le point A aurait du avoir pour coordonnées $(4,-4)$, les calculs sont alors moins laids. Mais faisons avec ce qui était inscrit sur la feuille.

On peut toujours factoriser l'équation du cercle : $(x-3)^2+(y+1)^2=5$, cercle de centre $B(3,-1)$ et de rayon $\sqrt{5}$. Le point $M(x,y)$ est un point du cercle par lequel passe une tangente issue de A s'il vérifie l'équation du cercle, et la condition $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$, soit $(x-4)(x-3)+(y-4)(y+1)=0$. En développant, on obtient $x^2+y^2-7x-3y+8=0$. Comme par ailleurs $x^2+y^2=6x-2y-5$ (équation du cercle), on trouve $x+5y-3=0$, soit $x=3-5y$. Remplaçons dans l'équation de cercle initiale : $(3-5y-3)^2+(y+1)^2=5$ donne $25y^2+y^2+2y+1=5$, soit $26y^2+2y-4=0$, ou encore $13y^2+y-2=0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta=1+104=105$, et admet donc deux solutions $y_1=\dfrac{-1+\sqrt{105}}{26}$, et $y_2=\dfrac{-1-\sqrt{105}}{26}$. Cela donne pour x les valeurs correspondantes $x_1=3-5y_1=\dfrac{83-5\sqrt{105}}{26}$, et $x_2=\dfrac{83+5\sqrt{105}}{26}$. Il y a donc deux points convenables : $C\left(\dfrac{83-5\sqrt{105}}{26},\dfrac{-1+\sqrt{105}}{26}\right)$, et $D\left(\dfrac{83+5\sqrt{105}}{26},\dfrac{-1-\sqrt{105}}{26}\right)$. Il ne reste plus aux courageux qu'à calculer la distance entre les deux points (au carré pour commencer) : $(x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2=\left(\dfrac{10\sqrt{105}}{26}\right)^2+\left(\dfrac{-2\sqrt{105}}{26}\right)^2=\dfrac{25\times105+105}{13^2}=\dfrac{26\times105}{13^2}=\dfrac{210}{13}$, donc la distance cherchée vaut $\sqrt{\dfrac{210}{13}}\simeq 4.02$. À vous de vérifier la crédibilité de ce résultat sur la figure ci-dessous :

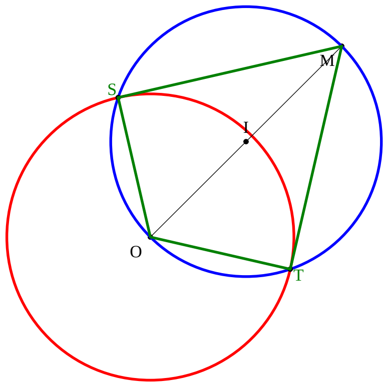


Exercice 15 (***)

1. On sait que le triangle $AA'B$ est rectangle en B, puisque le point B appartient au cercle de diamètre $[AA']$. Autrement dit, le point B est le projeté orthogonal de A' sur (AM), donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = \overline{MA}.\overline{MB}$. Or, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'}) = OM^2 + \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'}$. Les points A et A' étant diamétralement opposés sur un cercle de centre O, on a $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$. Le développement précédent se simplifie donc (les dex termes du milieu s'annulent) en $OM^2 - OA^2 = OM^2 - R^2$.



2. Une tangente étant orthogonale au rayon joignant le centre du cercle au point de tangence, les triangles OMS et OMT sont rectanges en S et T respectivement. Les points S et T appartiennent donc au cercle de diamètre $[OM]$. Comme ce dernier ne peut couper le cercle $\mathcal{C}$ en plus de deux points, S et T sont donc définis parfaitement comme les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et du cercle de diamètre $[OM]$, ce qui se construit très bien à la règle et au compas (il suffit de trouver le milieu de $[OM]$).



3. C'est une application immédiate du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OMS (ou OMT) : $OM^2 = OT^2 + MT^2$, soit $MT^2 = OM^2 - OT^2 = OM^2 - R^2 = p_{\mathcal{C}}(M)$.
4. Si les points sont cocycliques, la puissance du point N par rapport au cercle les contenant tous les quatre est à la fois égale à $\overline{NA}.\overline{NB}$ et à $\overline{NC}.\overline{ND}$ d'après la première question, d'où l'égalité demandée. Réciproquement, si on suppose que $\overline{NA}.\overline{NB} = \overline{NC}.\overline{ND}$, notons $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC, on peut alors écrire $p_{\mathcal{C}}(N) = \overline{NA}.\overline{NB}$ (toujours en utilisant la première question), donc notre hypothèse implique $p_{\mathcal{C}}(N) = \overline{NC}.\overline{ND}$. Or, on sait que $p_{\mathcal{C}}(N) = \overline{NC}.\overline{NE}$, où E est le deuxième point d'intersection de la droite (CN) avec le cercle $\mathcal{C}$ (encore et toujours la première question). On en déduit que $\overline{ND} = \overline{NE}$, avec D et E situés sur la même droite. Celà n'est possible que si D et E sont confondus, ce qui prouve que D appartient au cercle circonscrit à ABC et donc que les quatre points sont cocycliques.
5. (a) Partons du deuxième membre de l'équivalence, on utilise le fait que $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O'M})$ pour obtenir la condition $(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MO'}).(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{O'M}) = 2k$, soit en développant $OM^2 - O'M^2 = 2k$ (les deux autres termes se simplifient). On trouve donc $OM^2 = O'M^2 + 2k$, ce qui est équivalent à $p_{\mathcal{C}}(M) = p_{\mathcal{C}'}(M)$ à condition d'avoir $2k = R^2 - R'^2$, soit $k = \frac{1}{2}(R^2 - R'^2)$.

   (b) En utilisant les résultats du cours sur les lignes de niveau du produit scalaire, l'axe radical sera une droite perpendiculaire à $\overrightarrow{OO'}$.

   (c) Si les cercles sont sécants en deux points, on aura nécessairement $\Delta = (AB)$. En effet, A et B sont tous deux sur l'axe radical (un point appartenant à un cercle a une puissance nulle par rapport à celui-ci), et l'axe est une droite, c'est nécessairement (AB).

   (d) Cette fois-ci, le point de tangence appartient à la droite, et Δ est perpendiculaire à (OO'), donc Δ est la tangente commune aux deux cercles.

   (e) Notons donc Δ et Δ' les axes radicaux de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$ (pour Δ) ; et de $\mathcal{C}'$ et de $\mathcal{C}''$ (pour Δ'). Ces deux droites ne sont pas parallèles puisqu'elles sont respectivement perpendiculaires à (OO') et à $(O'O'')$ et que les trois centres sont supposés non alignés. Elles se coupent donc en un point R. Ce point appartenant à Δ, il vérifie $p_{\mathcal{C}}(R) = p_{\mathcal{C}'}(R)$. De même, comme il est sur Δ', il vérifie aussi $p_{\mathcal{C}'}(R) = p_{\mathcal{C}''}(R)$. On en conclut aisément que $p_{\mathcal{C}}(R) = p_{\mathcal{C}''}(R)$, et donc que R appartient au troisième axe radical.

   (f) Il suffit de prendre un troisième cercle plus ou moins aléatoire, sécant aux deux premiers. On construit les axes radicaux de ce cercle avec chacun de deux cercles dont on est parti (facile pour des cercles sécants, il suffit de tracer la droite reliant les points d'intersection, cf la question c), ils se coupent en un point R. Comme ce point appartient à l'axe radical de nos deux cercles (question e), ce dernier est la droite perpendiculaire à (OO') passant par R (et si R se trouve sur (OO'), ce n'est vraiment pas de pot, mais on change le troisième cercle et ça ne durera pas).

Sur la figure ci-dessous, on cherche à trouveer l'axe radical des deux cercles rouges. ON passe par un troisième cercle (le bleu) sécant aux deux premiers, on trace les deux axes radicaux roses passant par les points d'intersection, ces deux droites roses se coupent en un point à partir duquel on trace une perpendiculaire à $[OO']$ (en orange) qui est l'axe radical cherché.