Feuille d'exercices n°18 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

28 mai 2013

Exercice 1 (*)

1. L'application φ est assez clairement symétrique, elle est linéaire à gauche puisque $\varphi((\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2), (x', y')) = 2(\lambda x_1 + \mu x_2)x' + 5(\lambda y_1 + \mu y_2)y' - (\lambda x_1 + \mu x_2)y' - x'(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(2x_1x' + 5y_1y' - x_1y' - x'y_1) + \mu(2x_2x' + 5y_2y' - x_2y' - x'y_2) = \lambda\varphi((x_1, y_1), (x', y')) + \mu\varphi((x_2, y_2), (x', y'))$. Puisqu'elle est symétrique, la linéarité sera aussi vérifiée à droite, et l'application est donc bilinéaire. Par ailleurs, $\varphi((x, y), (x, y)) = 2x^2 + 5y^2 - 2xy = x^2 + 4x^2 + x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + 4y^2 + (x - y)^2$. Cette quantité est manifestement toujours positive, et ne s'annule que si $x = y = 0$ (et accessoirement $x - y = 0$, ce qui est impliqué par les deux premières conditions). L'application φ est donc définie positive, c'est un produit scalaire.
   Pour déterminer une base orthonormale pour φ, il suffit d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt à partir de la base canonique $((1, 0); (0, 1))$ de $\mathbb{R}^2$. Commençons par normer $(1, 0)$: $\varphi((1, 0); (1, 0)) = 2$, donc $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ est un vecteur normé pour le produit scalaire φ. On calcule ensuite $(0, 1) - \varphi\left((0, 1); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = (0, 1) - \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$. Reste à normer ce vecteur : $\varphi\left(\left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1}{2}, 1\right)\right) = \frac{1}{2} + 5 + 1 = \frac{13}{2}$ donc $\left(-\frac{1}{\sqrt{26}}, \sqrt{\frac{2}{13}}\right)$ est un vecteur normé pour φ. une base orthonormale est donc $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right); \left(-\frac{1}{\sqrt{26}}, \sqrt{\frac{2}{13}}\right)\right)$.
2. L'application est facilement symétrique, et elle est bilinéaire par linéarité de la dérivation et de l'intégration. Par contre, elle n'a aucune raison d'être positive, et encore moins définie positive : $\varphi(f, f) = \int_0^1 2f(t)f'(t)\,dt = [f^2(t)]_0^1 = f(1)^2 - f(0)^2$. Si on prend par exemple $f(x) = x - 1$, $\varphi(f, f) = -1$. Il ne s'agit donc pas d'un produit scalaire.
3. Oui, certes, ça ressemble au précédent. L'application est là aussi symétrique et bilinéaire (pour les mêmes raisons), mais cette fois-ci elle est en plus définie positive : $\varphi(f, f) = \int_0^1 f^2(t) + f'(t)^2\,dt$ est l'intégrale d'une fonction positive, donc toujours positif. De plus, cette quantité ne peut s'annuler que si la fonction continue $f^2 + f'^2$ est toujours nulle sur $[0, 1]$, ce qui ne se produit que si $\forall t \in [0, 1]$, $f(t) = f'(t) = 0$. Il s'agit donc d'un produit scalaire. Pas question ici de parler de base orthonormale, l'espace considéré est de dimension infinie.
4. L'application φ (quel que soit l'espace sur laquelle on la considère) est clairement symétrique et bilinéaire. De plus, $\varphi(P, P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 \geqslant 0$. C'est au niveau de la positivité que se situe la différence : si $\varphi(P, P) = 0$, alors $P(0) = P(1) = P(2) = 0$, ce qui implique $P = 0$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ (un polynôme de degré 2 ayant trois racines distinctes est nécessairement nul) mais pas dans $\mathbb{R}_3[X]$. Par exemple, $P = X(X - 1)(X - 2) = X^3 - 3X^2 + 2X$ vérifie $\varphi(P, P) = 0$. L'application φ est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ mais pas sur $\mathbb{R}_3[X]$. Cherchons une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire en appliquant une fois de plus le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique. On commence par calculer $\varphi(1, 1) = 3$, donc le ponynôme

constant $\frac{1}{\sqrt{3}}$ est normé pour φ. Ensuite, on pose $P_2 = X - \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi(X,1) \times \frac{1}{\sqrt{3}} = X - \frac{1}{3}(1+2) = X - 1$. On norme ensuite en calculant $\varphi(X-1, X-1) = 1+0+1 = 2$. Le deuxième polynôme de notre base sera donc $\frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dernière étape, on calcule $P_3 = X^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(X^2, X) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(X - 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi(X^2, 1) \times \frac{1}{\sqrt{3}} = X^2 - \frac{1}{2}(0+0+8)(X-1) - \frac{1}{3}(0+1+4) = X^2 - 4X + \frac{8}{3}$. Il ne reste plus qu'à normer : $\varphi(P_3, P_3) = \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{81}{9} = 9$. Tiens, notre polynôme est de norme 3 pour ce produit scalaire, on peut donc prendre pour compléter notre base $\frac{1}{3}X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{8}{9}$. Conclusion : une base orthonormée pour φ est $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{3}X^2 - \frac{4}{3}X + \frac{8}{9}\right)$.

5. L'application φ est très certainement symétrique, et également bilinéaire (il suffit de constater que l'application qui à deux polynômes associe $p_0 q_0$ est bilinéaire, et de même pour chacun des autres coefficients). De plus, $\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^{n} p_k^2$ estcertainement positifs, et ne peut s'annuler que si tous les coefficients du polynôme sont nuls, donc si P est nul. L'application φ est un produit scalaire. Pour trouver une base orthonormale, il faut d'abord choisir une valeur de n. Faisons le calcul dans $\mathbb{R}_2[X]$ pour ne pas trop se fatiguer. Comme toujours, on part de la base canonique. Le polynôme constant égal à 1 est déjà normé, on peut le garder tel quel. On calcule alors $X - \varphi(X, 1)1 = X$. Ah ben, il est lui aussi normé, c'est fou. Bon, en fait, on pouvait se dispenser de poser $n = 2$, la base canonique est toujours orthonormale pour ce produit scalaire. En effet, les polynômes qui la constituent sont orthogonaux puisqu'ils n'ont qu'un coefficient non nul, et pas pour le même degré. Ils sont par ailleurs normés.

Exercice 2 (*)

Le fait que l'application est symétrique et bilinéaire ne pose aucun problème. Elle est par ailleurs positive puisque $\varphi(f, f) = \int_0^{2\pi} f^2(t)\ dt$ est certainement positif, et ce réel est nul seulement si la fonction continue f^2 s'annule sur tout l'intervalle $[0, 2\pi]$. Comme f est supposée 2π-périodique, elle est alors nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier. L'application φ est donc un produit scalaire, qu'on notera simplement par un point pour les calculs suivants pour alléger les notations. Vérifions que toutes les fonctions de la famille sont normées : $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(kx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2kx)}{2}\ dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2kx)}{4k}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \times \pi = 1$. On a simplement utilisé pour ce calcul la formule de duplication $\cos(2kx) = 2\cos^2(kx) - 1$ pour écrire $\cos^2(kx) = \frac{1+\cos(2kx)}{2}$. De même, on exploitera $\cos(2kx) = 1 - 2\sin^2(kx)$ pour écrire $\sin^2(kx) = \frac{1-\cos(2kx)}{2}$ et prouver que $g_k.g_k = 1$. Toutes nos fonctions ont donc bien une norme égale à 1. Rest à vérifier qu'elles sont orthogonales. Commençons par vérifier que $f_i.f_j = 0$ lorsque $i \neq j$. Pour cela, le plus rapide est d'utiliser les formules de transformation somme-produit : $\cos(ix) \times \cos(jx) = \frac{1}{2}(\cos((i-j)x) + \cos((i+j)x))$, dont l'intégrale s'annule effectivement entre 0 et 2π (pusique les primitives seront toujours des sinus de multiples de x). De même, pour le calcul de $g_i.g_j$, la formule $\sin(ix)\sin(jx) = \frac{1}{2}(\cos((i-j)x) - \cos((i+j)x))$ donnera une intégrale nulle. Enfin, le produit scalaire $f_i.g_j$ (ici, i et j ont le droit d'être égaux) se calcule en exploitant $\cos(ix)\sin(jx) = \frac{1}{2}(\sin((i+j)x) + \sin((i-j)x))$, donc $f_i.g_j = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((i+j)x)}{i+j} - \frac{\cos((i-j)x)}{i-j}\right]_0^{2\pi}$. Cette intégrale est tout autant nulle que les précédentes puisqu'elle ne fait intervenir que des fonctions

2π-périodiques. Attention tout de même, dans le cas où $i = j$, le deuxième terme est simplement nul, la forme donnée pour la primitive dans l'intégrale est alors incorrecte. La famille est donc bien orthonormale, vous l'étudierez plus en détail l'an prochain lors de votre cours sur les séries de Fourier.

Notons que les formules somme-produit ne sont pas indispensables pour les calculs, on peut faire une double intégration par parties. Par exemple, $\pi \times f_i.f_j = \int_0^{2\pi} \cos(ix)\cos(jx)\,dx = \left[\frac{\sin(ix)}{i}\cos(jx)\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\sin(ix)}{i} \times j\sin(jx)\,dx = 0 + \frac{j}{i}\left[-\frac{\cos(ix)}{i}\sin(jx)\right] + \frac{j}{i}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(ix)}{x} \times j\cos(jx)\,dx = \frac{j^2}{i^2} \times \pi f_i.f_j$. Le produit scalaire est donc nécessairement nul si $i \neq j$ (sinon, on ne peut rien conclure de ce calcul).

Exercice 3 (**)

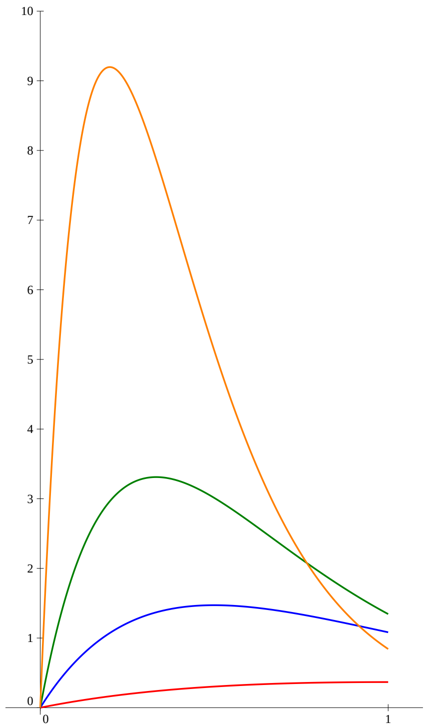
1. C'est quasiment la même chose que le quatrième exemple de l'exercice 1. L'application est symétrique et bilinéaire, clairement positive, et si $\varphi(P, P) = 0$ alors $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$, donc P étant un polynôme de degré 2, il est nécessairement nul. Conclusion : φ est un produit scalaire.
2. Le plus simple ici est de poser $P = aX^2 + bX + c$ et de résoudre l'équation $\varphi(P, X^2 + 1) = 0$. On trouve $\varphi(P, X^2 + 1) = 2P(-1) + P(0) + 2P(1) = 2a - 2b + 2c + c + 2a + 2b + 2c = 4a + 5c$. Les polynômes solutions sont donc de la forme $aX^2 + bX - \frac{4}{5}a$. Autrement dit, $F^\perp = \mathrm{Vect}\left(X, X^2 - \frac{4}{5}\right)$. Sans surprise, cet espace est de dimension 2 puisqu'il est le supplémentaire d'une droite vectorielle dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3.
3. On part comme toujours de la base canonique. Pour plus de simplicité, on notera φ à l'aide d'un point et la norme associée à φ avec les doubles barres usuelles. Commençons par calculer $\| 1 \| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$; puis $X - \left(X.\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\sqrt{3}} = X - \frac{1}{3}(X.1) = X - \frac{1}{3}(-1+0+1) = X$ (les polynômes 1 et X étaient donc déjà orthogonaux) ; on enchaîne avec $\| X \| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$; enfin on calcule $X^2 - \frac{1}{2}(X^2.X)X - \frac{1}{3}(X^2.1) = X^2 - \frac{1}{2}(-1+0+1)X - \frac{1}{3}(1+0+1) = X^2 - \frac{2}{3}$; enfin, on norme ce dernier polynôme : $\left\|X^2 - \frac{2}{3}\right\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. En conclusion, la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}}X; \sqrt{\frac{2}{3}}\left(X^2 - \frac{2}{3}\right)\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
4. On a déjà fait le calcul pour l'orthogonal de G à la question précédente : G est de dimension 2, engendré par 1 et X qui sont tous deux orthogonaux à $X^2 - \frac{2}{3}$, donc $G^\perp$ est une droite nécessairement engendrée par $X^2 - \frac{2}{3}$. Le projeté orthogonal de X^2 sur G a aussi été calculé à la question précédente, il s'agit du polynôme $\frac{2}{3}$ (c'est celui qu'on soustrait à X^2 lors de la dernière étape de l'algorithme de Gram-Schmidt). La distance recherchée est donc $d(X^2, G) = \left\|X^2 - \frac{2}{3}\right\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Aucun calcul à effectuer dans cette dernière question, c'est agréable...

Exercice 4 (***)

On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction h_n par $h_n(t) = nt^n\sqrt{1-t^2}$.

1. Commençons par écarter le cas $t = 1$, puisque $h_n(1) = 0$ quel que soit la valeur de n (la suite converge alors évidemment vers 0). Si $t \neq 1$, $\lim_{n \to +\infty} t^n = 0$, et par croissance comparée,

$\lim_{n\to+\infty} h_n(t) = 0$. La limite est donc nulle quelle que soit la valeur de t comprise entre 0 et 1. Pour autant, on ne peut absolument rien en déduire sur la limite de l'intégrale. Mais pour que la correction soit complète, faisons semblant de croire que si. Calculons alors, à l'aide d'une petite IPP en dérivant le t et en primitivant e^{-nt} en $\frac{e^{-nt}}{-n}$, l'intégrale $\int_0^1 n^3te^{-nt}\,dt = [-n^2te^{-nt}]_0^1 + \int_0^1 n^2e^{-nt}\,dt = -n^2e^{-n} - [ne^{-nt}]_0^1 = -n^2e^{-n} - ne^{-n} + n$. Toujours par croissance comparée, les deux premiers termes ont une limite nulle en $+\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^3te^{-nt}\,dt = +\infty$. Pourtant, tout comme h_n, cette suite de fonctions tend vers 0 quelle que soit la valeur de t fixée dans $[0,1]$! C'est trivial pour $t = 0$ puisqu'elle s'annule tout le temps, et si $t > 0$, $\lim_{n\to+\infty} e^{-nt} = 0$ et c'est encore un résultat de croissance comparée. À défaut de réfléchir à nouveau, essayon d'illustrer ce phénomène en traçant les courbes des fonctions $t \mapsto n^3te^{-nt}$ (pour les premières valeurs de n, ici $n = 1$ en rouge, $n = 2$ en bleu, $n = 3$ en vert et $n = 5$ en orange) :



On voit bien que les maxima sont de plus en plus haut (ce qui explique que les intégrales tendent vers $+\infty$), mais de plus en plus proches de 0 en abscisse, ce qui est cohérent avec le fait, qu'à t fixé, les valeurs des fonctions tendent vers 0.

2. La fonction h_n est dérivable sur $[0,1[$, de dérivée $h_n'(t) = n^2t^{n-1}\sqrt{1-t^2} + nt^n \times \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} = \frac{n^2t^{n-1}(1-t^2) - nt^{n+1}}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{nt^{n-1}(n-(n+1)t^2)}{\sqrt{1-t^2}}$. Cette dérivée s'annule en $t_n = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ (qui appartient bien à l'intervalle $[0,1]$), la fonction h_n est croissante sur $[0, t_n]$ et décroissante sur $[t_n, 1]$. En particulier, elle admet en t_n un maximum de valeur $h_n(t_n) = n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \sqrt{1-\frac{n}{n+1}}$ $= \frac{n}{\sqrt{n+1}}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$. Le calcul de la limite ne devrait plus poser de problèmes à cette période de l'année : $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})}$, avec $\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{1}{n+1}$, donc $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = -1$. On en déduit que $h_n(t_n) \sim \frac{n}{\sqrt{n+1}} \times e^{-1} \sim \frac{n}{e\sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{n}}{e}$.

En particulier, ce maximum tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. On en peut donc toujours pas conclure (tout ce qu'on faire c'est majorer l'intégrale par le maximum de la fonction, ce qui ne nous avance à rien).

3. L'application φ_n est toujours symétrique, et bilinéaire à cause de la linérité de l'intégrale. De plus, $\varphi_n(f,f) = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)^2\ dt$ est l'intégrale d'une fonction positive sur $[0,1]$, donc toujours positive ; et ne peut s'annule que si $t^n f(t)^2$ est toujours nulle. Cela implique que f est nulle sur $]0,1]$ et par continuité de f en 0, sur $[0,1]$ également. Puisqu'elle est définie positive, φ_n est bien un produit scalaire.
Or, on peut écrire que $\displaystyle\int_0^1 h_n(t)\ dt = \varphi_n(f_n, g_n)$, en poosant $f_n(t) = n$ et $g_n(t) = \sqrt{1-t^2}$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz nous assure alors que $\left(\displaystyle\int_0^1 h_n(t)\ dt\right)^2 \leqslant \displaystyle\int_0^1 n^2 t^n\ dt \times \int_0^1 t^n(1-t^2)\ dt = \left[n^2\frac{t^n}{n+1}\right]_0^1 \times \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+3}}{n+3}\right]_0^1 = \frac{n^2}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{2n^2}{(n+1)^2(n+3)} \sim \frac{2}{n}$.
En particulier, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 h_n(t)\ dt\right)^2 = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n(t)\ dt = 0$. On a même prouvé quelque chose de beaucoup plus précis : puisque h_n est toujours positive, $\displaystyle\int_0^1 h_n(t)\ dt \sim \sqrt{\frac{2}{n}}$.

Exercice 5 (*)

Le plus simple est de déterminer une base de F (un vecteur directeur, si vous préférez) pour calculer explicitement les images des prejetés des vecteurs de la base canonique. Résolvons donc le système constitué par les deux équations définissant F : d'après la deuxième $y = 2x$, et la première donne alors $z = x + 2y = 5x$. Autrement dit, $F = \text{Vect}((1,2,5))$. Normons ce vecteur : $\|(1,2,5)\| = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30}$, donc $u = \dfrac{1}{\sqrt{30}}(1,2,5)$ forme une base orthonormale de F. on calcule alors $p_F((1,0,0)) = (1,0,0).u \times u = \dfrac{1}{30} \times (1,0,0).(1,2,5) \times (1,2,5) = \dfrac{1}{30}(1,2,5)$. De même, $p_F((0,1,0)) = \dfrac{1}{15}(1,2,5)$ et $p_F((1,2,5)) = \dfrac{1}{6}(1,2,5)$. La matrice de p_F est donc la matrice $A = \dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ 5 & 10 & 25 \end{pmatrix}$. En particulier, on calcule facilement $p_F((1,1,1)) = \dfrac{1}{30}(8,16,40) = \left(\dfrac{4}{15}, \dfrac{8}{15}, \dfrac{4}{3}\right)$. Pour la distance du vecteur à F, il ne reste plus qu'à calculer $\|(1,1,1) - p_F((1,1,1))\| = \left\|\left(\dfrac{11}{15}, \dfrac{7}{15}, -\dfrac{5}{15}\right)\right\| = \sqrt{\dfrac{121}{225} + \dfrac{49}{225} + \dfrac{25}{225}} = \sqrt{\dfrac{195}{225}} = \sqrt{\dfrac{13}{15}}$.

Exercice 6 (*)

On peut déjà vérifier aisément que M est une matrice de projection : $M^2 = \dfrac{1}{36}\begin{pmatrix} 30 & -12 & 6 \\ -12 & 12 & 12 \\ 6 & 12 & 30 \end{pmatrix} = M$ en simplifiant tout par 6. L'énoncé aurait bien sûr du préciser que cette matrice était prise dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, ou au moins dans une base orthonormale. Mais comme on ne dipose de toute façon pas du théorème qui dit qu'une matrice de projection symétrique dans une base orthonormale correspond à une symétrie orthogonale, on ne peut pas conclure facilement. De toute façon, on nous demande le plan de projection, alors allons-y pour le calcul du noyau et de l'iamge de notre projection p. Pour l'image, qui est caractérisée comme pour tout projecteur par l'équation $p(u) = u$, on se ramène en multipliant par 6 à la résolution du système $\begin{cases} 5x - 2y + z = 6x \\ -2x + 2y + 2z = 6y \\ x + 2y + 5z = 6z \end{cases}$. Ces trois équations sont équivalentes, elles se ramènent toutes à $-x-2y+z=0$, soit $z=x+2y$. Il s'agit donc bien d'un plan, plus précisément $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}((1,0,1);(0,1,2))$. Le noyau est encore plus simple, la deuxième équation donne $x = y+z$, les deux équations extrêmes deviennent alors $3y+6z=0$ et $3y+6z=0$. Surprise, ce sont les mêmes, donc $y=-2z$. Autrement dit, $\ker(p) = \mathrm{Vect}((-1,-2,1))$. Reste simplement à vérifier que noyau et images sont orthogonaux, ce qui se fait rapidement en constatant que les vecteurs des deux bases sont orthogonaux. Ici, $(-1,-2,1).(1,0,1) = -1+1 = 0$ et $(-1,-2,1).(0,1,2) = -2+2 = 0$, ça marche !

Exercice 7 (**)

1. Si considère un polynôme $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in E$, alors $P(1) = 0 \Leftrightarrow a+b+c+d = 0$. Si on préfère, en notant H l'ensemble considéré (ce qui n'est pas fait dans l'énoncé bien qu'on parle de H ensuite !), $H = \mathrm{Vect}(X-1, X^2-1, X^3-1)$, qui est bien un espace vectoriel de dimension 3, soit un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$ qui est lui de dimension 4. Son orthogonal est une droite vectorielle. Reprenons un polynôme P quelconque, on peut calculer $P.(X-1) = b-a$, puis $P.(X^2-1) = c-a$ et $P.(X^3-1) = d-a$ pour conclure que $P \in H^\perp \Leftrightarrow a=b=c=d$. Autrement dit, $H^\perp = \mathrm{Vect}(1+X+X^2+X^3)$.
2. Il est beaucoup plus facile de calculer le projeté de X^3 sur $H^\perp$ et de faire une soustraction ensuite. Normons le vecteur constituant notre base de $H^\perp$: $\|1+X+X^2+X^3\| = \sqrt{1+1+1+1} = 2$, donc $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X^3$ constitue une base orthonormale de $H^\perp$. Calculons donc $p_{H^\perp}(X^3) = X^3.\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X^3\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X^3\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}X + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}X^3$. Pour la projection sur H, il suffit alors de calculer $X^3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}X + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}X^3 = \frac{3}{4}X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$. Et la distance est égale à $\left\|\frac{1}{4} + \frac{1}{4}X + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}X^3\right\| = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{1}{2}$.

Exercice 8 (**)

Commençons par vérifier que la matrice A est une matrice orthogonale. Pour cela, on peut par exemple vérifier que ses vecteurs-lignes forment une base orthonormale. En effet, $(-7,-4,4).(4,-8,-1) = -28+32-4 = 0$; $(-7,-4,4).(-4,-1,-8) = 28+4-32 = 0$ et $(4,-8,-1).(-4,-1,-8) = -16+8+8 = 0$; et de plus, $\frac{1}{9}\|(-7,-4,-4)\| = \frac{1}{9}\sqrt{49+16+16} = \frac{9}{9} = 1$; $\frac{1}{8}\|(-4,-1,-8)\| = \frac{1}{9}\sqrt{16+1+64} = 1$ et de même pour le dernier vecteur. Nous sommes bien en présence d'une matrice orthogonale. Calculons son déterminant pour savoir si elle correspond à une isométrie directe ou indirecte : $\begin{vmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ 0 & -9 & -9 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 9\begin{vmatrix} -7 & -4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 9\times(-9) - 9\times 72 = -9^3$, donc $\det(A) = -1$. La matrice A correspond donc à une isométrie indirecte de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire a priori une composée de rotation et de réflexion. Déterminons tout d'abord l'axe de la réflexion en déterminant les vecteurs vérifiant $f(u) = -u$ (on note bien sûr f l'application associée à la matrice A dans la base canonique). Pour cela, en multipliant tout par 9, on résout le système $\begin{cases} -7x - 4y + 4z = -9x \\ 4x - 8y - z = -9y \\ -4x - y - 8z = -9z \end{cases}$. La première équation donne $x = 2y-2z$, ce qu'on peut insérer dans les deux autres : $9y-9z = 0$ et $-9y+9z = 0$. Sans surprise, les équations sont équivalentes et donnent $z = y$, puis $x = 0$. Autrement dit, l'axe de notre isométrie est $\mathrm{Vect}((0,1,1))$.

Pour déterminer l'angle de la rotation restante, on fait comme pour une isométrie directe de $\mathbb{R}^3$ (ça marchera très bien puisque dans les deux cas la restriction de f à l'orthogonal de l'axe est une rotation) : choisissons un vecteur orthogonal à l'axe, par exemple $(1,0,0)$, il a pour image $\frac{1}{9}(-7,-4,4)$. On peut prendre comme vecteur normé dirigeant l'axe le vecteur $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$. Calculons alors $\cos(\theta) = (1,0,0).\frac{1}{9}(-7,-4,4) = -\frac{7}{9}$. Remarquons que, comme dans le cas d'une rotation, on peut retrouver ce cosinus à l'aide de la trace de la matrice : $\text{Tr}(A) = -\frac{23}{9}$ et on sait que, dans une base adaptée, f aura pour matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, donc $\text{Tr}(A) = 2\cos(\theta) - 1$. On retrouve bien en comparant ces deux égalités que $\cos(\theta) = -\frac{7}{9}$. Reste à déterminer le signe du sinus, en calculant $\frac{1}{9\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9\sqrt{2}} \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{8}{9\sqrt{2}}$. On vérifie au passage que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = \frac{49}{81} + \frac{64}{2 \times 81} = 1$, ce qui est rassurant. on peut maintenant conclure : en notant $D = \text{Vect}((0,1,1))$, f est la composée de la réflexion d'axe D et de la rotation d'axe D et d'angle $-\arccos\left(\frac{7}{9}\right)$.

C'est en fait beaucoup plus rapide dans l'autre sens, en utilisant la formule pour une rotation $r(u) = \cos(\theta)u + (1-\cos(\theta))(u.a)a + \sin(\theta)(a \wedge u)$. Ici, le vecteur unitaire a orientant l'axe sera $a = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, et on a évidemment $\cos(\theta) = 0$ et $\sin(\theta) = 1$. On trouve donc plus simplement $r(u) = \frac{1}{3}(u.(1,1,1))(1,1,1) + \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \wedge u$. Les produits scalaires de chacun des trois vecteurs de la base canonique avec $(1,1,1)$ valent 1 (ce qu'on peut traduire par le fait qu'ils ont tous les trois le même projeté sur l'axe de la rotation, ce qui devrait vous paraitre géométriquement évident), et par ailleurs $(1,1,1) \wedge (1,0,0) = (0,1,-1)$; $(1,1,1) \wedge (0,1,0) = (-1,0,1)$ et $(1,1,1) \wedge (0,0,1) = (1,-1,0)$. On peut donc achever les calculs : $r((1,0,0)) = \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}+1}{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)$; $r((0,1,0)) = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}+1}{3}\right)$ et $r((0,0,1)) = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right)$, soit une matrice $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. On peut aisément vérifier que cette matrice est bien une matrice orthogonale.

Exercice 9 (***)

1. La symétrie de l'application découle du fait que $\text{Tr}({}^tA) = \text{Tr}(A)$ (pour une matrice carrée), on peut alors écrire $\varphi(B,A) = \text{Tr}({}^tBA) = \text{Tr}({}^t({}^tBA)) = \text{Tr}({}^tAB) = \varphi(A,B)$. La bilinéarité (on peut se contenter de prouver la linéarité à gauche du fait de la symétrie) est une conséquence de la linéarité de la trace et de celle de la transposée : $\varphi(\lambda A + \mu A', B) = \text{Tr}({}^t(\lambda A + \mu A')B) = \text{Tr}(\lambda {}^tAB + \mu {}^tA'B) = \lambda \text{Tr}({}^tAB) + \mu \text{Tr}({}^tA'B) = \lambda\varphi(A,B) + \mu\varphi(A',B)$. Vérifions maintenant la positivité : $\varphi(A,A) = \text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tAA)_{ii}$. Or, $({}^tAA)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tA)_{ik}A_{ki} = \sum_{i=1}^{n} A_{ki}^2$. Chacun des termes de la somme la constituant étant une somme de carrés, $\varphi(A,A)$ estbien positif. En fait, on constate que $\varphi(A,A)$ est simplement égal à la somme des carrés de tous les coefficients de la matrice A. En particulier, ce réel ne peut s'annuler que si tous ces coefficients sont nuls, ce qui prouve que φ est défini positif, et donc bien un produit scalaire.

2. Supposons A symétrique et B antisymétrique, alors $\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}(AB)$ (puisque A est symétrique), mais aussi $\varphi(B,A) = \mathrm{Tr}({}^tBA) = \mathrm{Tr}(-BA)$ puisque B est antisymétrique. On en déduit que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(-BA)$. Orn, on sait bien que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ pour des matrices carrées quelconques, donc nécessairement $\mathrm{Tr}(AB) = 0$ et A et B sont orthogonales. Pour justifier la supplémentarité des deux sous-espaces, il suffit de constqter que leurs dimensions conviennent. L'ensemble des matrices symétriques est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (le nombre de coefficients situés en-dessous de la diagonale, diagonale comprise, ils suffisent en effet à déterminer la matrice de façon unique) et celui des matrices antisymétriques de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$ (même raisonnement, sans la diagonale qui est forcément nulle). La somme de ces deux dimensions vaut $\dfrac{n(n-1+n+1)}{2} = n^2$, ce qui correspond à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et prouve donc la supplémentarité.
3. On sent venir la formule de Cauchy-Schwarz. Si on l'applique bêtement aux matrices A et B, on trouve (en mettant tout au carré), $(\mathrm{Tr}({}^tAB))^2 \leqslant \mathrm{Tr}({}^tAA) \times \mathrm{Tr}({}^tBB)$. Ce n'est pas exactement ce qu'on veut. En fait, l'énoncé est inexact pour des matrices quelconques ! Il faut que les matrices soient symétriques pour que l'inégalité découle de Cauchy-Schwarz. En général, ce sera malheureusement faux, puisque $\mathrm{Tr}(A^2) \leqslant \mathrm{Tr}({}^tAA)$, et qu'il n'y a aucun moyen de s'en sortir.
4. Là, pas de problème, ça marche pour une matrice quelconque, en appliquant Cauchy-Schwarz à I et A : $(\mathrm{Tr}({}^tIA))^2 \leqslant \|I\| \times \|M\|$, soit $(\mathrm{Tr}(A))^2 \leqslant n\|M\|$ puisque $\|I\| = \sqrt{n^2} = n$. Il suffit de prendre la racine carrée de tout ça pour obtenir l'inégalité souhaitée.
5. Inutile de s'embêter avec ce qui précède, une matrice orthogonale a tous ses coefficients inférieurs ou égaux à 1 (en valeur absolue) puisque ses colonnes doivent êtres des vecteurs de norme 1. Sa trace est donc inférieure ou égale à n par simple application de l'inégalité triangulaire. La réciproque est évidemment complètement fausse, par exemple la matrice nulle n'est pas vraiment orthogonale, mais a une trace nulle.
6. Surtout pas de calcul monstrueux ! On peut décomposer très facilement une matrice A quelconque en $A + \dfrac{A +^t A}{2} + \dfrac{A -^t A}{2}$, qui est la décomposition de A suivant les deux sous-espaces supplémentaires othogonaux décrits à la question 2. Du coup, la projection de A sur l'ensemble des matrices antisymétriques est $\dfrac{A -^t A}{2}$, et la distance recherchée est simplement la norme de cette matrice. Notons $B = \dfrac{A -^t A}{2}$, alors $B_{ij} = \dfrac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}) = \dfrac{i-j}{2}$, et $\|B\|2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{(i-j)^2}{4} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 + j^2 - 2ij = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} ni^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - in(n+1) =$ $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{n^2(n+1)^2}{2}\right) = \dfrac{n^2(n+1)}{24} \times (4n + 2 - 3n - 3) =$ $\dfrac{n^2(n^2-1)}{24}$. Autrement dit, la distance recherchée vaut $\dfrac{n\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{6}}$.