Feuille d'exercices n°18 : Géométrie euclidienne

PTSI B Lycée Eiffel

28 mai 2013

Exercice 1 (*)

Déterminer parmi les applications suivantes celles qui sont des produits scalaires. Le cas échéant, donner une base orthonormale de l'espace considéré pour ce produit scalaire (si l'espace est de dimension finie, bien entendu).

1. $\varphi((x,y),(x',y')) = 2xx' + 5yy' - xy' - x'y$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g'(t) + f'(t)g(t)\ dt$ sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$
3. $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\ dt$ sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$
4. $\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ sur $\mathbb{R}_2[X]$ et sur $\mathbb{R}_3[X]$.
5. $\varphi(P,Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k q_k$ sur $\mathbb{R}_n[x]$, où p_k désigne le coefficient du terme de degré k du polynôme P.

Exercice 2 (*)

Vérifier que $\varphi(f,g) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\ dt$ définit un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. On note $f_k(x) = \cos(kx)$ et $g_k(x) = \sin(kx)$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Vérifier que la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_n)$ est orthonormale pour toute valeur de n.

Exercice 3 (**)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On définit sur E l'application $\varphi : (P,Q) \mapsto P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$.

1. Vérifier que (E,φ) est un espace euclidien.
2. On pose $F = \mathrm{Vect}(X^2+1)$, déterminer $F^\perp$.
3. Par le procédé de Gram-Schmidt, déterminer une base orthonormée de E.
4. Déterminer $G^\perp$ lorsque $G = \mathbb{R}_1[X]$ puis la distance de X^2 à G.

Exercice 4 (***)

On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction h_n par $h_n(t) = nt^n\sqrt{1-t^2}$.

1. Déterminer, pour tout réel $t \in [0,1]$, la limite de $h_n(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Peut-on en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n(t)\ dt$? Si vous pensez que oui, calculez $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n^3te^{-nt}\ dt$ et réflechissez à nouveau.

2. Déterminer les variations de h_n, et donner un équivalent simple de son maximum sur $[0,1]$. Peut-on désormais en déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 h_n(t)\,dt$?
3. On définit $\varphi_n(f,g) = \int_0^1 t^n f(t)g(t)\,dt$ sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que φ_n est un produit scalaire pour tout entier $n \geqslant 1$, et en appliquant intelligemment l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour déterminer la limite qui nous embête depuis le début de cet exercice.

Exercice 5 (*)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du prosuit scalaire usuel, on définit la droite F par les deux équations $x+2y-z = 2x-y = 0$. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique. Calculer la distance du vecteur $(1,1,1)$ à F.

Exercice 6 (*)

Montrer que la matrice $M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une projection orthogonale sur un plan de $\mathbb{R}^3$ qu'on déterminera.

Exercice 7 (**)

On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $P.Q = \sum_{i=0}^{3} p_i q_i$, où p_i désigne le coefficient du terme de degré i de P.

1. Montrer que $\{P \in E \mid P(1) = 0\}$ est un hyperplan de E, déterminer son orthogonal.
2. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur H, en déduire la distance de X^3 à H.

Exercice 8 (**)

Soit $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$. Déterminer tout ce que vous pouvez sur l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice dans la base canonique (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(i+j+k)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 9 (***)

On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application $\varphi : (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$.

1. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Montrer que les sous-espaces constitués des matrices symétriques et antisymétriques sont des supplémentaires orthogonaux pour ce produit scalaire.
3. Montrer que, $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $(\mathrm{Tr}(AB))^2 \leqslant \mathrm{Tr}(A^2)\,\mathrm{Tr}(B^2)$.
4. Montrer que, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|\,\mathrm{Tr}(M)| \leqslant \sqrt{n} \parallel M \parallel$.
5. Montrer que, si A est orthogonale, alors $|\,\mathrm{Tr}(A)| \leqslant n$. La réciproque est-elle vraie ?
6. Calculer la distance de la matrice A dont les coefficients sont $a_{i,j} = i$ au sous-espace vectoriel constitué des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.