Feuille d'exercices n°1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

11 septembre 2012

Quantificateurs

Exercice 1 (* à **)

- Cette première proposition est évidemment fausse, un des nombreux contre-exemples est donné par $x = -45$.
- C'est vrai, il en existe même un seul, $x = 3$.
- C'est faux, les nombres strictement compris entre 0 et 1 ne vérifient pas cette inégalité.
- C'est vrai, on peut toujours prendre $y = \frac{x}{2}$ par exemple. Si on restreint la proposition aux nombres rationnels, elle reste vrai (bien qu'il y ait des « trous » dans l'ensemble des rationnels) ; avec les nombres entiers, ça ne fonctionne plus, 1 étant le plus petit entier strictement positif.
- C'est vrai, quand on multiplie un nombre entier par 2, on tombe toujours sur un nombre entier.
- C'est faux, il faut que n soit un entier pair pour que ça fonctionne (c'est même une caractérisation des entiers pairs).
- C'est vrai, le produit de deux entiers consécutifs est toujours un entier pair. En effet, soit n est pair, soit n est impair et $n+1$ sera pair. Dans les deux cas, $n(n+1)$ sera le produit d'un entier pair par un autre entier, c'est toujours un nombre pair.
- C'est vrai, il suffit de prendre une valeur de x strictement négative.
- C'est faux, l'énoncé n'a aucun sens quand $x > 0$. Il faudrait inverser le rôle de x et y pour que ça devienne vrai.
- Comme c'est écrit, c'est faux, puisque je n'ai pas précisé que $y > x$, ce qui pose problème dans l'encadrement final. Toutefois, en remplaçant $\forall y \neq x$ par $\forall y > x$, l'énoncé est vrai mais pas évident à prouver. Il existe nécessairement un entier n pour lequel $\frac{1}{n} < y - x$, puisque $\frac{1}{n}$ tend vers 0 et $y - x > 0$. Notons alors p le plus grand entier naturel (dans le cas où x et y sont positifs) pour lequel $\frac{k}{n} \leqslant x$. Un tel entier existe cette fois-ci car $\frac{k}{n}$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$. Par définition de k, $\frac{k+1}{n} > x$, mais on ne peut pas avoir $\frac{k+1}{n} > y$, sinon les inégalités $\frac{k}{n} < x < y < \frac{k+1}{n}$ impliqueraient $\frac{1}{n} > y - x$. Le nombre rationnel $\frac{k+1}{n}$ est donc strictement compris entre x et y.

Exercice 2 (*)

C'est extrêmement mécanique et peu palpitant :

- $\exists x \in \mathbb{R},\ x < 2$
- $\forall x \in \mathbb{N},\ x \in]-\infty; 2] \cup [4; +\infty[$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < x$
- $\exists x > 0,\ \forall y > 0,\ x \leqslant y$
- $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ p \neq 2n$
- $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ n \neq 2p$
- $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ n(n+1) \neq 2p$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 \leqslant x$

- $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y > 0$, $y \neq \ln(x)$
- $\exists x \in \mathbb{R}$, $\exists y \neq x$, $\forall z \in \mathbb{Q}$, $z \leqslant x$ ou $z \geqslant y$

Logarithmes et exponentielles

Exercice 3 (*)

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$ et impaire, son numérateur étant pair et son dénominateur impair.
- La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et paire.
- La fonction h n'est ni paire ni impaire. Par exemple, $h(1) = e^{-2}$ et $h(-1) = e^0 = 1$. Même si l'expression contenue dans l'exeponentielle avait été celle d'une fonction impaire (par exemple en enlevant le -1), la fonction ne serait ni paire ni impaire.
- La fonction i est définie sur $]-1; 1[$ et impaire : $i(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -i(x)$, en utilisant la relation $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

Exercice 4 (* à ***)

1. Commençons par constater que l'inéquation ne peut avoir de sens que si $x \geqslant -2$. Lorsque $x \in [-2; 1]$, l'inéquation sera certainement vérifiée puisque le membre de gauche est alors négatif, et le membre de droite positif. Reste le cas $x > 1$, où on peut se permettre de tout élever au carré puisque les deux membres de l'inégalité sont alors positifs : on obtient $x^2-2x+1 \leqslant x+2$, soit $x^2 - 3x - 1 \leqslant 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 9 + 4 = 13$, et s'annule donc en deux valeurs $x_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Le trinome est négatif entre ses racines, donc sur l'intervalle $[x_1; x_2]$. Comme $x_1 < 1$ et $x_2 > 1$, on en déduit concernant notre inéquation initiale que $\mathcal{S} = \left[-2; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$.
2. L'équation n'a de sens que si $x+2$ et $x-3$ sont tous les deux strictement positifs, donc lorsque $x > 3$. On peut alors regrouper les termes du membre de gauche pour obtenir $\ln((x+2)(x-3)) = \ln(2^2)$, d'où en prenant l'exponentielle des deux côtés $x^2 - x - 6 = 4$, soit $x^2 - x - 10 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 1 + 40 = 41$ (mais pourquoi est-ce que je vous ai mis des valeurs à la noix pour chaque inéquation, moi ?). Il y a donc deux solutions, $x_1 = \frac{1-\sqrt{41}}{2}$ qui est très inférieure à 3, donc non valide, et $x_2 = \frac{1+\sqrt{41}}{2}$, qui convient parfaitement. Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{\frac{1+\sqrt{41}}{2}\right\}$.
3. On doit avoir ici le réflexe du changement de variable $X = e^x$, qui transforme notre inéquation en $X^2 - 4X + 3 < 0$, gentil trinome dont le discriminant vaut $\Delta = 16 - 12 = 4$ (enfin une valeur sympa), et admet donc deux racines $X_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ et $X_2 = \frac{4+2}{2} = 3$. Notre inéquation est donc vérifiée lorsque $1 < e^x < 3$, soit pour $0 < x < \ln(3)$. Conclusion : $\mathcal{S} =]0; \ln(3)[$.
4. Pour résoudre une équation du troisième degré, il convient d'en trouver une racine « évidente » pour se ramener à ce qu'on sait faire. Ici, $x = 1$ est une telle racine puisque $1 - 2 - 5 + 6 = 0$. On peut donc factoriser $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ sous la forme $(x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. Par odentification des coefficients, on obtient $a = 1$; $b - a = -2$, soit $b = -1$; $c - b = -5$ soit $c = -6$. On a donc $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2 - x - 6)$. Il ne reste qu'à chercher quand le deuxième facteur s'annule. C'est un trinome de discriminant

$\Delta = 1 + 24 = 25$, qui admet pour racines $x_1 = \dfrac{1+5}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{1-5}{2} = -2$. Finalement, $\mathcal{S} = \{-2; 1; 3\}$.

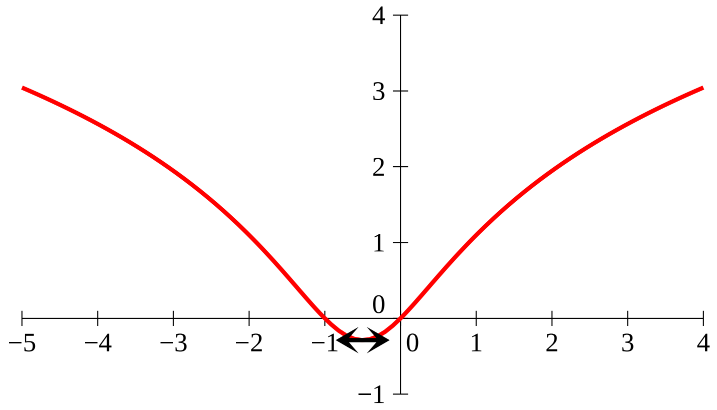
5. Cette inéquation n'a de sens que si $\dfrac{x^2 - x + 1}{x - 2} > 0$. Le numérateur de cette fraction a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 < 0$, il est toujours strictement positif. L'inéquation peut donc se résoudre lorsque $x > 2$. Dans ce cas, en passant à l'exponentielle, on doit avoir $\dfrac{x^2 - x + 1}{x - 2} \geqslant 1$, soit $\dfrac{x^2 - x + 1 - (x - 2)}{x - 2} \geqslant 0$. Le dénominateur étant d'après l'étude précédente strictement positif, reste à déterminer le signe du numérateur $x^2 - 2x + 3$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 4 - 12 < 0$. Le numérateur est donc strictement positif, et $\mathcal{S} =]2; +\infty[$.
6. Commençons par modifier un peu l'écriture de cette équation : $2^{3x-1} = 5^x(5 - 1) = 4 \times 5^x$, donc en prenant le ln de chaque côté (on peut, tout cela est toujours strictement positif), $(3x - 1)\ln(2) = \ln(4) + x\ln(5)$, soit $x(3\ln(2) - \ln(5)) = 3\ln(2)$. Finalement, $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{3\ln(2)}{3\ln(2) - \ln(5)} \right\}$.
7. Cette équation ne peut avoir de sens que si $x > 0$. si on passe alors au ln, on obtient $\sqrt{x}\ln(x) = x\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}x\ln(x)$, soit $\sqrt{x}\ln(x)\left(1 - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\right) = 0$. Les valeurs annulant ce produit sont 0 (valeur interdite ici), 1 et 4, donc $\mathcal{S} = \{1; 4\}$.
8. On ne sait pas du tout résoudre ce genre d'équations, mais une petit astruce permet de s'en sortir : la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc l'équation ne peut avoir au plus qu'une seule solution. Ca tombe bien, $x = 1$ est solution évidente, donc $\mathcal{S} = \{1\}$.
9. Écrivons tout cela sous la forme $2 \times 2^x + 2^{2x} - 15 \geqslant 0$. En posant $X = 2^x$, on se ramène à $X^2 + 2X - 15 \geqslant 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 60 = 64$, et admet donc deux racines $X_1 = \dfrac{-2+8}{2} = 3$ et $X_2 = \dfrac{-2-8}{2} = -5$. Les solutions de l'inéquation initiale vérifient donc $2^x \leqslant -5$ ou $3 \leqslant 2^x$. La première condition n'est jamais vérifiée puisque $2^x \geqslant 0$, celle de droite revient à dire que $x\ln(2) \geqslant \ln(3)$, soit $x \geqslant \dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$. Conclusion : $\mathcal{S} = \left[\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}; +\infty\right[$.

Exercice 5 (** à ***)

- La fonction f est définie lorsque $1 + x + x^2 > 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 < 0$, il est toujours positif, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{1+2x}{1+x+x^2}$. Comme on vient de le voir, le dénominateur de ce quotient est positif, donc f' est du signe de $1+2x$, et f a notamment un minimum en $-\dfrac{1}{2}$, de valeur $\ln\left(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{5}{4}\right)$. Enfin, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} 1 + x + x^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. D'où le tableau de variations suivant :

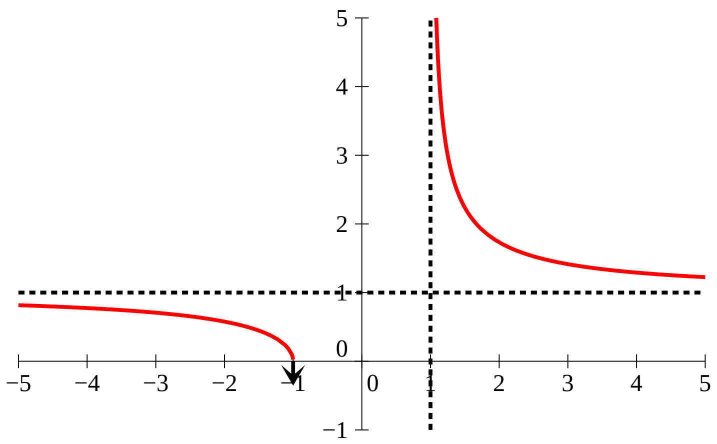
$$\begin{array}{c|ccccc}
x & -\infty & & -\frac{1}{2} & & +\infty \\
\hline
f & +\infty & \searrow & \ln(\frac{5}{4}) & \nearrow & +\infty
\end{array}$$

Pas d'asymptote oblique ici, comme ce sera souvent le cas avec des fonctions à base de ln.



- La fonction g est définie sur $]-\infty;-1]\cup]1;+\infty[$ (un petit tableau de signe vous convaincra si ça ne vous semble pas évident, faites par ailleurs attention au sens des crochets). Sur cet ensemble, ses variations sont les mêmes que $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ (puisque la fonction racine carrée est croissante), qui a pour dérivée $\dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0$ (bien sûr, on peut aussi calculer la dérivée de g directement, on aura simplement des termes supplémentaires qui sont toujours positifs). La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty;-1]$ et sur $]1;+\infty[$. On peut également constater que g n'est pas dérivable en -1, et que $\lim\limits_{x\to-1} g'(x) = -\infty$, ce qui implique la présence d'une tangente verticale à la courbe en -1. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$ (quotient des termes de plus haut degré), on aura $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 1$. En -1, pas de limite, g est définie et $g(-1) = 0$. Par contre en 1, $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = +\infty$. Il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ valable en $+\infty$ comme en $-\infty$, et une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
g	1	$\searrow$	0	$+\infty$	$\searrow$	1

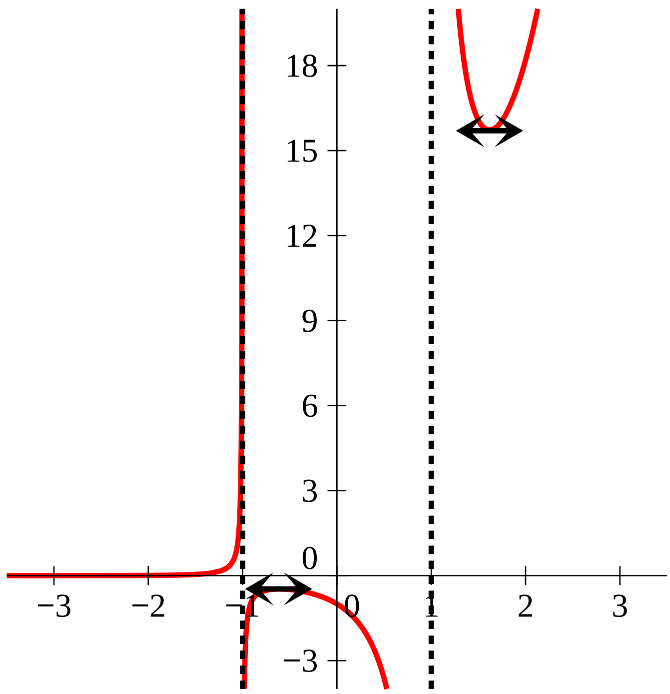


- La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, de dérivée $h'(x) = \dfrac{2e^{2x}(x^2-1) - 2xe^{2x}}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2e^{2x}(x^2-x-1)}{(x^2-x-1)^2}$. Cette dérivée est du signe de x^2-x-1, trinome dont le discriminant vaut $\Delta = 1+4 = 5$, qui s'annule en deux valeurs $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (qui est compris entre -1 et 1) et

$x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (qui est plus grand que 1). La fonction h admet donc un maximum en x_1 et un minimum en x_2, dont on ne cherchera exceptionnellement pas à expliciter les valeurs car ça ne se simplifie vraiment pas. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$; et sans croissance comparée, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$. La présence d'une asymptote oblique en $+\infty$ est peu probable ici. Comme par ailleurs e^{2x} est strictement positif, et x^2-1 est positif en-dehors de ses racines, on trouve $\lim\limits_{x\to-1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to-1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = -\infty$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
h	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$h(x_1)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$h(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

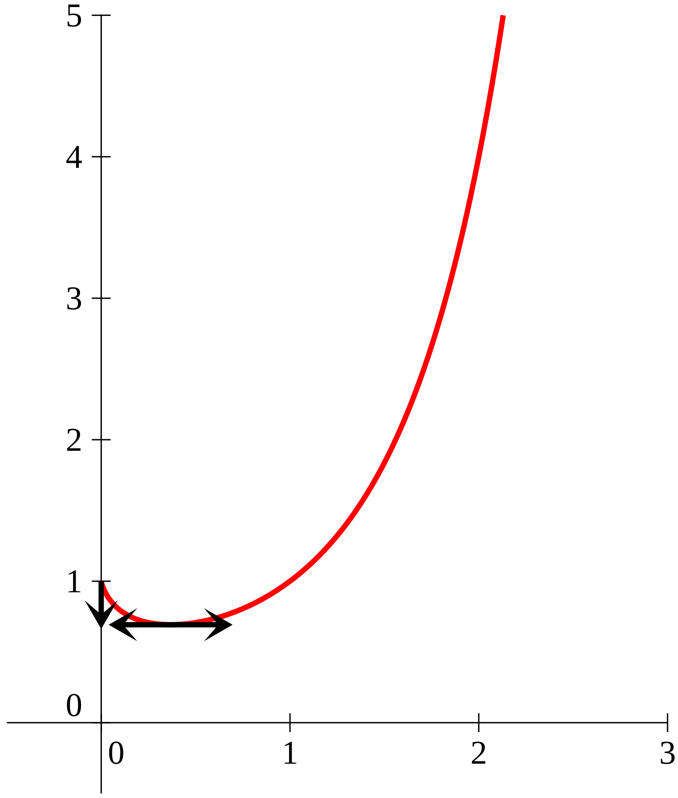
La courbe n'est ici pas très pratique à tracer sur une feuille, le minimum étant à une hauteur assez élevée.



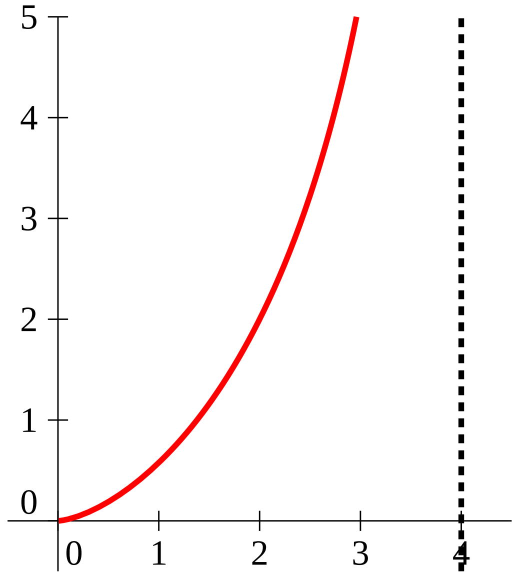
- Cette fonction ayant fait l'objet d'une étude détaillée dans le cours, je ne vais pas me répéter ici. Pour en avoir une autre, je vais par contre ajouter l'tude de la fonction k définie par $k(x) = x^x$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, on peut la mettre sous la forme $k(x) = e^{x\ln(x)}$. Elle est dérivable, de dérivée $k'(x) = (\ln(x)+1)e^{x\ln(x)}$. Cette dérivée s'annule lorsque $\ln(x) = -1$, soit $x = \dfrac{1}{e}$, où elle admet un minimum de valeur $\dfrac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$, et en utilisant la croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} k(x) = 1$. D'où le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
k	1	$\searrow$	$\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$	$\nearrow$	$+\infty$

On peut ici constater assez facilement que $\lim\limits_{x\to 0} k'(x)) = -\infty$ en reprenant le calcul de la limite de k en 0. Il y a donc une tangente verticale à la courbe en 0.



- La fonction j est définie si $\dfrac{x^3}{2a-x} \geqslant 0$, soit lorsque $x \in [0; 2a[$. La fonction vérifie évidemment $j(0) = 0$, et $\lim\limits_{x \to 2a} j(x) = +\infty$. La fonction racine carrée étant croissante, j a les mêmes variations que $x \mapsto \dfrac{x^3}{2a-x}$, qui a pour dérivée $\dfrac{3x^2(2a-x)+x^3}{(2a-x)^2} = \dfrac{6ax^2-2x^3}{(2a-x)^2} = \dfrac{2x^2(3a-x)}{(2a-x)^2}$, toujours positive sur $[0; 2a]$. La fonction j est donc strictement croissante, et on n'a pas grand chose de plus à dire sur cette fonction ! Un exemple de courbe lorsque $a = 2$:



Trigonométrie

Exercice 6 (*)

En constatant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, on peut simplement appliquer les formules d'addition pour obtenir $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. On obtient de même $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, puis en effectuant le quotient $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

Pour $\frac{\pi}{24}$, pas vraiment d'autre choix que de passer par les formules de duplication : $2 \times \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right) - 1$. On en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+1\right)} = \sqrt{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+4}{8}}$. En exploitant ensuite la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on trouve $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}$, puis enfin $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}$, ce qu'on peut essayer de simplifier si on a du temps à perdre (mais on n'obtient rien de très simple).

Exercice 7 (** à ***)

1. Cela se produit si $2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, soit $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, ce qu'on note également $x \equiv \frac{\pi}{8}\left[\frac{\pi}{2}\right]$.
2. $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right) \Leftrightarrow -x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{x}{4}[2\pi]$ ou $-x - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{x}{4}[2\pi] \Leftrightarrow \frac{5x}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ ou $\frac{3x}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$, donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{5} + k\frac{8\pi}{5}, -\frac{\pi}{3} + k\frac{3\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Il suffit d'utiliser la formule de transformation produit/somme : $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos(2x) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $2x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$, donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Beaucoup moins compliqué que ça n'en a l'air, il suffit d'y croire :
$$\begin{array}{lrcl} & \sin(3x)\cos^3(x) + \sin^3(x)\cos(3x) & = & \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow & (3\sin(x) - 4\sin^3(x))\cos^3(x) + \sin^3(x)(4\cos^3(x) - 3\cos(x)) & = & \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow & \sin(x)\cos^3(x) - \sin^3(x)\cos(x) & = & \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow & \sin(x)\cos(x)(\cos^2(x) - \sin^2(x)) & = & \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2}\sin(2x)\cos(2x) & = & \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow & \sin(4x) & = & 1 \end{array}$$
On a donc $4x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
5. L'équation ne peut avoir de sens que si $x \in [-1;1]$ et $2x \in [-1;1]$, donc $x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. On peut ensuite prendre le sin de chaque côté de l'équation. Comme $\arccos(x) \in [0;\pi]$, $\sin(\arccos(x)) > 0$, et $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}$. Quant au sinus de $\arcsin(2x)$, il vaut évidemment $2x$, ce qui donne la condition nécessaire $2x = \sqrt{1-x^2}$. Les solutions de l'équation sont donc forcément positives et vérifient, en élevant au carré l'égalité précédente, $4x^2 = 1 - x^2$,

soit $x^2 = \dfrac{1}{5}$, donc $x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (la solution négative ayant déjà été exclue). Cette valeur est bien inférieure à $\dfrac{1}{2}$, donc $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{\sqrt{5}}{5} \right\}$.

Exercice 8 (**)

Il suffit d'appliquer une deuxième fois la formule de duplication des tangentes : $\tan(4x) = \tan(2x + 2x) = \dfrac{2\tan(2x)}{1 - \tan^2(2x)} = \dfrac{\frac{4\tan(x)}{1-\tan^2(x)}}{1 - \frac{4\tan^2(x)}{(1-\tan^2(x))^2}} = \dfrac{4\tan(x)(1-\tan^2(x))}{1 - 6\tan^2(x) + \tan^4(x)}$.

Appliquons la formule à $x = \arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$ (qui a évidemment pour tangente $\dfrac{1}{5}$) pour obtenir $\tan(4x) = \dfrac{\frac{4}{5} \times (1 - \frac{1}{25})}{1 - \frac{6}{25} + \frac{1}{625}} = \dfrac{20 \times 24}{625 - 150 + 1} = \dfrac{480}{476} = \dfrac{120}{119}$. Calculons maintenant $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)\right) = \dfrac{1 + \frac{1}{239}}{1 - \frac{1}{239}} = \dfrac{240}{238} = \dfrac{120}{119}$. Ca vous rappelle quelque chose ? Les deux angles $4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right)$ et $\dfrac{\pi}{4} - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)$ ont la même tangente, et ils sont tous les deux positifs et plus petits que $\dfrac{\pi}{2}$ (pour le deuxième c'est évident, pour le premier, il faut vérifier que $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) > \dfrac{1}{5}$), ce qui permet de conclure à l'égalité des deux angles, ce qui prouve la formule de Machin. Pour être complets, calculons donc les lignes trigonométriques de $\dfrac{\pi}{8}$ en utilisant que $2 \times \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$. On en déduit par exemple que $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8} - 1\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+2}{4}$, donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$. On aura ensuite $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right)} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. On obtient enfin $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\dfrac{6-4\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ (qui pour les plus curieux peut se simplifier en $\sqrt{2} - 1$). En tout cas, ce nombre a pour carré $3 - 2\sqrt{2}$, dont on veut prouver qu'il est supérieur à $\dfrac{1}{25}$, ce qui revient à dire que $74 - 50\sqrt{2} > 0$, soit $\sqrt{2} < \dfrac{37}{25}$. En élevant au carré, on a bien $2 < \dfrac{1\ 369}{625}$, donc tout va bien (ouf !).

La deuxième formule est plus simple : $\tan\left(\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)\right) = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$. Comme on sait par ailleurs que $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 > \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3}$, il est facile de voir que $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right) < \dfrac{\pi}{2}$, ce qui achève la démonstration de l'égalité.

Exercice 9 (**)

- On sait bien sûr que $\arccos(\cos(x)) = x$ seulement si $x \in [0; \pi]$. Mais on sait aussi que $\cos\left(\dfrac{507\pi}{3}\right) = \cos(169\pi) = -1$, donc $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{507\pi}{3}\right)\right) = \pi$. Bon, c'eût été un peu plus intéressant en prenant autre chose qu'un multiple de π, mais le principe reste le même.
- Cette expression n'est bien sûr définie que si $x \in [-1; 1]$, et puisque $\arcsin(x) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, son cosinus est nécessairement positif. On peut alors écrire $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}$.
- On sait que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, donc $\cos^2\left(\dfrac{1}{2}x\right) = \dfrac{1}{2}(\cos(x) + 1)$. Or, $\cos^2(\arctan(x)) =$

$\dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \dfrac{1}{1+x^2}$, donc $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, et $\cos^2\left(\dfrac{1}{2}\arctan(x)\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{1}{2}$.

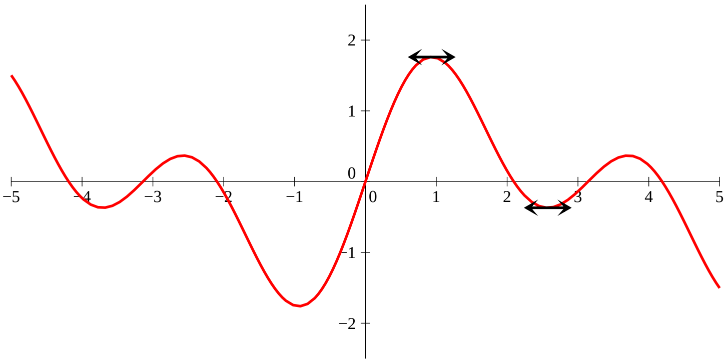
- Ici, rien d'évident ne sautant aux yeux, on peut tenter une autre tactique consistant à dériver l'expression. Posons donc $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$, alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$, avec $u(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. On a donc $1+u(x)^2 = 1 + \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{2}{1+x}$, et $u'(x) = \dfrac{\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = -\dfrac{1}{1+x}\sqrt{\dfrac{1}{(1+x)(1-x)}}$. Finalement $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. On reconnait une dérivée usuelle, et on en déduit que $f(x) = \dfrac{1}{2}\arccos(x) + k$, où k est une constante réelle. Calculons $f(0) = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$. Or, $\dfrac{1}{2}\arccos(0) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4}$. La constante k est donc nulle, et $\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right) = \dfrac{1}{2}\arccos(x)$ (ce qu'on peut obtenir directement par des arguments trigonométriques).

Exercice 10 (***)

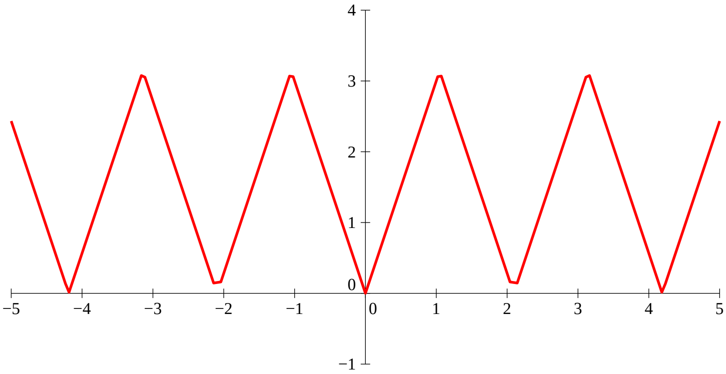
- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire. On va donc restreindre son étude à l'intervalle $[0;\pi]$. Elle est dérivable, de dérivée $f'(x) = \cos(x)+2\cos(2x) = \cos(x)+2(2\cos^2(x)-1) = 4\cos^2(x)+\cos(x)-2$. En posant $X = \cos(x)$, on se ramène à l'étude du signe du trinome $4X^2+X-2$, qui a pour discriminant $\Delta = 1+32 = 33$, et admet donc pour racines $X_1 = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$ et $X_2 = \dfrac{-1-\sqrt{33}}{8}$. Ces valeurs n'étant certainement pas des cosinus d'angles remarquables, on ne peut que les exprimer à l'aide de la fonction arccos (les deux valeurs sont comprises entre -1 et 1). Comme arccos est une fonction décroissante, $\arccos(X_1) < \arccos(X_2)$, et le tableau de variations ressemble à ceci :

x	0		$x_1 = \arccos(X_1)$		$x_2 = \arccos(X_2)$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	0

On peut, si on est vraiment très motivé, chercher à calculer les valeurs du minimum et du maximum, mais on va tomber sur des valeurs affreuses. Par exemple, $f(x_1) = \sin(\arccos(X_1)) + \sin(2\arccos(X_1)) = \sin(\arccos(X_1)) + 2\sin(\arccos(X_1))\cos(\arccos(X_1))$ en appliquant la formule de duplication. Or, $\sin(\arccos(X_1)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(X_1))}$ (les sinus sont positifs puisqu'on est dans $[0;\pi]$), donc $\sin(\arccos(X_1)) = \sqrt{1-X_1^2}$, avec $X_1^2 = \dfrac{1+33-2\sqrt{33}}{64} = \dfrac{34-2\sqrt{33}}{64}$, soit $\sin(\arccos(X_1)) = \sqrt{\dfrac{30+2\sqrt{33}}{64}} = \dfrac{\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{8}$. On obtient alors $f(x_1) = \dfrac{\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{8} + 2\dfrac{\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{8}\dfrac{\sqrt{33}-1}{8} = \dfrac{\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{8} + \dfrac{(\sqrt{33}-1)\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{32}$
$= \dfrac{(\sqrt{33}+3)\sqrt{30+2\sqrt{33}}}{32}$. C'est très laid et fort peu expoitable, on se dispensera donc de tenter un calcul du minimum.



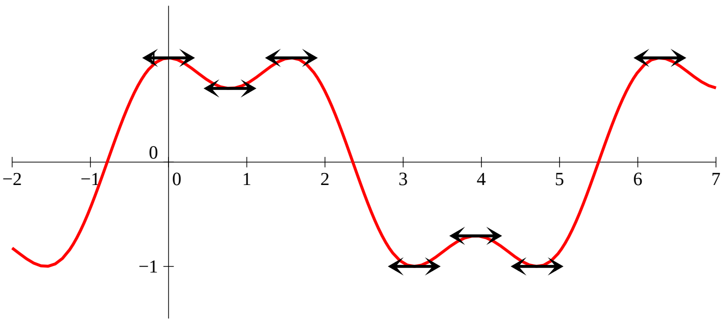
- La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, car $\cos(3x)$ étant toujours compris entre -1 et 1, on tombe toujours dans l'intervalle de définition de la fonction arccos. La fonction est de plus paire (puisque cos l'est), et $\dfrac{2\pi}{3}$ périodique (comme $x \mapsto \cos(3x)$). On peut donc restreindre l'intervalle d'étude à $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$. Or, sur cet intervalle, on constate que $3x \in [0; \pi]$, donc $\arccos(\cos(3x)) = 3x$. La courbe représentative de g sur cet intervalle est donc un segment de droite, et le reste s'en déduit par la symétrie et la périodicité.
  Les plus courageux auront calculé la dérivée : $g'(x) = -3\sin(3x) \times \dfrac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(3x)}} = \dfrac{3\sin(3x)}{\sqrt{\sin^2(3x)}} = 3\dfrac{\sin(3x)}{|\sin(3x)|}$, qui vaut 3 ou -3 selon le signe de $\sin(3x)$. On retrouve alors l'allure de la courbe.



- La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, mais ni paire ni impaire. On va donc restreindre son étude à l'intervalle $[0; 2\pi]$. On peut la dériver : $h'(x) = -3\sin(x)\cos^2(x) + 3\cos(x)\sin^2(x) = 3\sin(x)\cos(x)(\sin(x) - \cos(x))$. Le dernier facteur s'annule en $\dfrac{\pi}{4}$ et en $\dfrac{5\pi}{4}$, ce qui permet d'établir le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|
$\sin(x)$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0
$\sin(x) - \cos(x)$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	|
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
h	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	1	↘	-1	↗	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1	↗	1

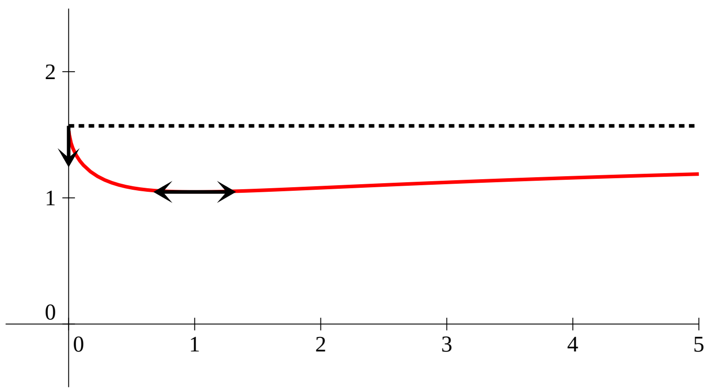
Calcul des valeurs intéressantes : $f(0) = 1^3 + 0^3 = 1$; $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \dfrac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{2\sqrt{2}}{8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; les deniers calculs sont extrêmement similaires. On peut enfin tracer une fort belle courbe :



- La fonction i ne peut être définie que si $x \geqslant 0$ (à cause de la racine carrée) et si $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x} \in [-1;1]$ à cause du arccos. Puisqu'on a déjà supposé $x \geqslant 0$, cela revient à dire qu'on doit avoir $\sqrt{x} \leqslant 1+x$, soit en élevant au carré $x \leqslant 1+2x+x^2$, ce qui est toujours le cas. On a donc $\mathcal{D}_i = \mathbb{R}^+$. On peut dériver la fonction i, ce qui donne $i'(x) = \dfrac{\frac{1+x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(1+x)^2} \times \dfrac{-1}{\sqrt{1-\frac{x}{(1+x)^2}}} = -\dfrac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2} \times \dfrac{1+x}{\sqrt{(1+x)^2-x}} = \dfrac{x-1}{2\sqrt{x}(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$. On peut constater en passant que la fonction i n'est pas dérivable en 0 (il y aura une tangente verticale puisque la dérivée y a une limite infinie), et la dérivée, bien qu'assez laide, est simplement du signe de $x-1$. La fonction admet donc un minimum en 1, de valeur $i(1) = \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Par ailleurs, $f(0) = \arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$, et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x+1} = 0$, on aura également $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = \dfrac{\pi}{2}$. On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
i	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{3}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Et tracer une dernière et magnifique courbe :



Exercice 11 (**)

1. Reprenez la construction donnée dans le cours, à l'aide du cercle trigonométrique, du sinus et de la tangente. On peut tout interpréter en termes de longueur : $\sin(h)$ (remplacez le x du cours par un h) est la hauteur du triangle intérieur au cercle, dont les sommets sont O, M et le point I de coordonnées $(1,0)$. La valeur de $\tan(h)$ est la hauteur du triangle extérieur au

cercle et tangent extérieurement au point I. Quant à x, c'est par définition la longueur de l'arc de cercle reliant le point I à M. Ainsi, l'aire du petit triangle vaut $\frac{1}{2}\sin(h)$, celle du triangle extérieur vaut $\frac{1}{2}\tan(h)$, et la portion de disque contenue entre les deux a pour aire $\pi \times \frac{h}{2\pi} = \frac{h}{2}$. En multipliant tout par 2, on obtient $\sin(h) \leqslant h \leqslant \tan(h)$.

2. L'inégalité de droite a déjà été prouvée. Celle de gauche s'obtient en partant de $h \leqslant \tan(h)$ et en mulptiliant de chaque côté par $\cos(h)$. En divisant tout cela par h, on a alors $\cos(h) \leqslant \frac{\sin(h)}{h} \leqslant 1$. Comme $\cos(0) = 1$, $\frac{\sin(h)}{h}$ est enacdré par deux expressions tendant vers 1 en 0, donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$.
3. Puisque $\sin(0) = 0$, on en déduit facilement que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin^2(h)}{h} = 0$. Or, $\frac{\sin^2(h)}{h} = \frac{1 - \cos^2(h)}{h} = (1 + \cos(h))\frac{1 - \cos(h)}{h}$. Le premier terme ayant pour limite 2 en 0, le deuxième doit nécessairement avoir une limite nulle pour que le produit tende vers 0.
4. Revenons à la définition de la dérivée : le taux d'accroissement du cos en x vaut $\tau_x(h) = \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$. En utilisant les formules d'addition, on trouve $\tau_x(h) = \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} = \cos(x)\frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h}$. Le premier quotient tend vers 0, le deuxième vers 1, donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau_x(h) = -\sin(x)$, ce qui donne bien la dérivée que vous connaissez par coeur pour le cosinus.
5. Même principe, cette fois-ci $\tau_x(h) = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\cos(x)\sin(h) + \sin(x)\cos(h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} + \sin(x)\frac{1 - \cos(h)}{h}$. Les mêmes limites que tout à l'heure permettent de conclure.

Fonctions hyperboliques

Exercice 12 (* à **)

- On se contente de tout écrire à l'aide des exponentielles. Quitte à tout multiplier par 2, cela donne $4(e^x + e^{-x}) + 3(e^x - e^{-x}) - 8 = 0$, soit $7e^x - 8 + e^{-x} = 0$. En posant $X = e^x$ (et en multipliant tout par e^x, on se ramène à l'équation du second degré $7X^2 - 8X + 1 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 64 - 28 = 36$, et ses solutions sont $X_1 = \frac{8+6}{2} = 7$ et $X_2 = \frac{8-6}{2} = 1$. On trouve donc deux solutions à l'équation initiale : $x = \ln(1) = 0$, et $x = \ln(7)$.
- Il manquait un tanh dans l'énoncé, d'où la curieuse double parenthèse. Ce qui est à gauche comme ce qui est à droite est défini sur $\mathbb{R}$ tout entier. Puisque l'énoncé nous propose de dériver, posons donc $f(x) = 2\arctan(\tanh(x)) - \arctan(\sinh(2x))$ et dérivons : $f'(x) = 2 \times \frac{1}{\cosh^2(x)} \times \frac{1}{1 + \tanh^2(x)} - 2\cosh(2x) \times \frac{1}{1 + \sinh^2(2x)}$. En utilisant le fait que $1 + \sinh^2(2x) = \cosh^2(2x)$, et que $\cosh^2(x) \times \tanh^2(x) = \sinh^2(x)$, on peut dire que $f'(x) = \frac{2}{\cosh^2(x) + \sinh^2(x)} - \frac{2}{\cosh(2x)}$. Il ne reste polus qu'à connaitre la formule $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$ pour conclure à la nullité de la dérivée (pour la démonstration de cette dernière formule, voir l'exercice suivant). La fonction f est donc constante, égale à $f(0) = 2\arctan(0) - \arctan(0) = 0$. On a bien démontré l'égalité souhaitée.

Exercice 13 (*)

- On part de ce qui est à droite : $\sinh(x) \times \cosh(y) + \cosh(x) \times \sinh(y) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\dfrac{e^y + e^{-y}}{2} + \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = \dfrac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-x-y}) = \dfrac{1}{4}(2e^{x+y} - 2e^{-x-y}) = \dfrac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x+y)$.
- On évite de refaire tout un calcul, on peut exploiter le résultat précédent : $\sinh(x-y) = \sinh(x+(-y)) = \sinh(x)\cosh(-y) + \cosh(x)\sinh(-y) = \sinh(x)\cosh(y) - \cosh(x)\sinh(y)$ en utilisant la parité de cosh et l'imparité de sinh.
- Même principe : $\cosh(x)\cosh(y)+\sinh(x)\sinh(y) = \dfrac{(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} = \dfrac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-x-y}) = \dfrac{2e^{x+y} + 2e^{-x-y}}{4} = \cosh(x+y)$.
- On remplace y par $-y$ dans la formule précédente, le signe de la deuxième partie change, et on obtient cette nouvelle formule.
- Soit on fait un calcul direct, soit on passe par le quotient : $\tanh(x+y) = \dfrac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)} = \dfrac{\sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)}{\sinh(x)\sinh(y) + \cosh(x)\cosh(y)}$. En divisant le tout par $\cosh(x)\cosh(y)$, on trouve $\tanh(x+y) = \dfrac{\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} + \frac{\sinh(y)}{\cosh(y)}}{\frac{\sinh(x)\sinh(y)}{\cosh(x)\cosh(y)} + 1} = \dfrac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}$.
- Encore une fois, un simple remplacement de y par $-y$ et l'imparité de tanh donnent la formule.
- C'est un cas particulier de la première formule : $\sinh(2x) = \sinh(x+x) = \sinh(x)\cosh(x) + \cosh(x)\sinh(x) = 2\cosh(x)\sinh(x)$.
- Même principe : $\cosh(2x) = \cosh(x)\cosh(x) + \sinh(x)\sinh(x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$. Les plus révéillés remarqueront qu'on peut également donner les formes $\cosh(2x) = 2\cosh^2(x) - 1 = 1 + 2\sinh^2(x)$ en exploitant $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
- Encore un cas particulier sans grand intérêt, je vous laisse l'écrire par vous-même.

Exercice 14 (***)

Pour le calcul, il peut être utile de constater l'égalité suivante : $\cosh(t) + \sinh(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} + \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = e^t$. On peut donc écrire ici $e^t = \cosh(t) + \sinh(t) = \cosh(\text{Argch}(x)) + \sinh(\text{Argch}(x))$. Le premier morceau est simplement égal à x, et comme $\sinh(t) = \sqrt{\cosh^2(t) - 1}$ pour les valeurs de t positives (ce qui est le cas de $\text{Argch}(x)$), le deuxième terme est égal à $\sqrt{x^2 - 1}$. Finalement, on a $e^t = x + \sqrt{x^2 - 1}$, soit $\text{Argch}(x) = t = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Pour Argsh, même principe, on écrit $e^{\text{Argsh}\, x} = \cosh(\text{Argsh}(x)) + \sinh(\text{Argsh}(x)) = \sqrt{1 + x^2} + x$, donc $\text{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Enfin, pour Argth, $e^{\text{Argth}(x)} = \cosh(\text{Argth}(x)) + \sinh(\text{Argth}(x))$ $= \sqrt{\cosh^2(\text{Argth}(x))} + \sqrt{\cosh^2(\text{Argth}(x)) - 1}$. Or, $\cosh^2(\text{Argth}(x)) = \dfrac{1}{1 - \tanh^2(\text{Argth}(x))} = \dfrac{1}{1 - x^2}$. On obtient $e^{\text{Argth}(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \sqrt{\dfrac{1}{1 - x^2} - 1} = \dfrac{1 + x}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. Finalement, on conclut que $\text{Argth}(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. Une expression finalement assez simple, et qui permet de retrouver rapidement la dérivée de cette fonction Argth.