Feuille d'exercices n°1 : Fonctions usuelles

PTSI B Lycée Eiffel

11 septembre 2012

Quantificateurs

Exercice 1 (* à **)

Parmi les propositions suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses. On essaiera de justifier les affirmations vraies, et de donner des contre-exemples aux affirmations fausses :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 2$
- $\exists x \in \mathbb{N},\ 2 < x < 4$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$
- $\forall x > 0,\ \exists y > 0,\ y < x$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ p = 2n$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ n = 2p$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ n(n+1) = 2p$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x < y^2$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y > 0,\ y = \ln(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \neq x,\ \exists z \in \mathbb{Q},\ x < z < y$

Exercice 2 (*)

Donner la négation (sous forme quantifiée) de chacun des énoncés de l'exercice 1.

Logarithmes et exponentielles

Exercice 3 (*)

Déterminer, parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont paires ou impaires :

- $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+3x}$
- $g(x) = \ln(\sqrt{1+x^2})$
- $h(x) = e^{-2x^3+x-1}$
- $i(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Exercice 4 (* à ***)

Résoudre les équations et inéquations suivantes (dans $\mathbb{R}$) :

1. $x - 1 \leqslant \sqrt{x+2}$
2. $\ln(x+2) + \ln(x-3) = 2\ln(2)$
3. $e^{2x} - 4e^x + 3 < 0$
4. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$
5. $\ln\left(\dfrac{x^2-x+1}{x-2}\right) \geqslant 0$

6. $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$
7. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
8. $x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3 = 0$
9. $2^{x+1} + 4^x \geqslant 15$

Exercice 5 (** à ***)

Étudier le plus complètement possible les fonctions suivantes (on cherchera notamment à tracer une courbe représentative soignée) :

- $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$
- $g(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
- $h(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2 - 1}$
- $i(x) = x^{\frac{1}{x}}$
- $j(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{2a - x}}$, a étant une constante positive fixée.

Trigonométrie

Exercice 6 (*)

À l'aide des formules d'addition et de duplication, déterminer les valeurs des lignes trigonométriques des angles $\dfrac{\pi}{12}$ et $\dfrac{\pi}{24}$.

Exercice 7 (** à ***)

Résoudre les équations suivantes :

1. $\tan(2x) = 1$
2. $\sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{x}{4}\right)$
3. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$
4. $\sin(3x)\cos^3(x) + \sin^3(x)\cos(3x) = \dfrac{3}{4}$
5. $\arcsin(x) = \arccos(2x)$

Exercice 8 (**)

Exprimer, pour un réel x pour lequel cela a un sens, $\tan(4x)$ en fonction de $\tan(x)$. En déduire que $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)$ (cette formule, connue sous le nom de formule de Machin, permit au mathématicien du même nom de déterminer les 100 premières décimales du nombre π au début du 18ème siècle).

Montrer par le même type de méthode que $\dfrac{\pi}{4} = \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Exercice 9 (**)

Simplifier les expressions suivantes :

- $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{507\pi}{3}\right)\right)$
- $\cos(\arcsin(x))$

- $\cos^2\left(\dfrac{1}{2}\arctan(x)\right)$
- $\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

Exercice 10 (***)

Étudier et tracer les courbes des fonctions suivantes :
- $f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$
- $g(x) = \arccos(\cos(3x))$
- $h(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x)$
- $i(x) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$

Exercice 11 (**)

1. À l'aide de considérations géométriques, montrer que, $\forall h \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin(h) \leqslant h \leqslant \tan(h)$.
2. En déduire que, sous les mêmes hypothèses, $h\cos(h) \leqslant \sin(h) \leqslant h$, puis calculer $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}$.
3. En déduire les limites quand h tend vers 0 de $\dfrac{\sin^2(h)}{h}$, puis de $\dfrac{1-\cos(h)}{h}$.
4. Retrouver à partir de ce dernier résultat la formule donnant la dérivée de la fonction cos.
5. Démontrer de même que la dérivée de la fonction sin est la fonction cos.

Fonctions hyperboliques

Exercice 12 (* à **)

Résoudre les équations suivantes :
- $4\cosh(x) + 3\sinh(x) - 4 = 0$
- $2\arctan((x)) = \arctan(\sinh(2x))$ (on pourra passer par un calcul de dérivée)

Exercice 13 (*)

Démontrer les formules suivantes (analogues pour les fonctions hyperboliques des formules de trigo que vous connaissez bien) :
- $\sinh(x+y) = \sinh(x)\ \cosh(y) + \cosh(x)\ \sinh(y)$
- $\sinh(x-y) = \sinh(x)\ \cosh(y) - \cosh(x)\ \sinh(y)$
- $\cosh(x+y) = \cosh(x)\ \cosh(y) + \sinh(x)\ \sinh(y)$
- $\cosh(x-y) = \cosh(x)\ \cosh(y) - \sinh(x)\ \sinh(y)$
- $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\ \tanh(y)}$
- $\tanh(x-y) = \dfrac{\tanh(x) - \tanh(y)}{1 - \tanh(x)\ \tanh(y)}$
- $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\ \cosh(x)$
- $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$
- $\tanh(2x) = \dfrac{2\tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}$

Exercice 14 (***)

En posant $t = \mathrm{Argch}(x)$ et en calculant e^t en fonction de x, exprimer la fonction Argch à l'aide de la fonction ln. Exprimer de même les fonction Argsh et Argth.