Feuille d'exercices n°14 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

2 avril 2013

Exercice 1 (*)

Commençons déjà par constater que la fonction nulle vérifie toutes les conditions de l'exercice, il nous restera donc à regarder si chaque ensemble est stable ou non par combinaisons linéaires (on peut bien évidemment séparer la somme et le produit par un réel si on le souhaite).

- Soient f et g deux fonctions paires, on peut certainement écrire $(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est donc également paire, et l'ensemble des fonctions paires est espace vectoriel.
- Les fonctions admettant un minimuml global ne forment pas un sous-espace vectoriel : l'ensemble n'est pas stable par produit par un réel négatif (si f admet un minimum global, $-f$ admettra un maximum global, mais n'a aucune raison d'avoir un minimum). On peut par contre prouver qu'une somme de deux telles fonctions admet nécessairement un minimum global (mais ce n'est pas une preuve évidente).
- Les fonctions s'annulant une infinité de fois ne forment pas un sous-espace vectoriel : l'ensemble est stable par un produit par un réel (les valeurs d'annulation de f annulant aussi λf), mais pas par somme : une fonction nulle sur $\mathbb{R}^-$ mais strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ (on peut construire une telle fonction $\mathcal{C}^\infty$, ajoutée à une fonction positive sur $\mathbb{R}^-$ mais nulle sur $\mathbb{R}^+$ ne s'annulera jamais ailleurs qu'en 0, donc sûrement pas une infinité de fois.
- Les fonctions vérifiant $f(2x) = f(x^2)$ forment un sous-espace vectoriel : si f et g vérifient l'équation, alors $(\lambda f + \mu g)(2x) = \lambda f(2x) + \mu g(2x) = \lambda f(x^2) + \mu g(x^2) = \lambda f + \mu g)(x^2)$.
- Les fonctions admettant une tangente horizontale en $x = 5$ forment un sous-espace vectoriel à cause de la linéarité de la dérivation : si $f'(5) = g'(5) = 0$, alors $(\lambda f + \mu g)'(5) = \lambda f'(5) + \mu g'(5) = 0$.
- Les fonctions vérifiant $f''(x) = 3f'(x) - 2f(x)$ (ou toute autre équation différentielle linéaire homogène) forment un sous-espace vectoriel, encore une fois à cause de la linéarité de la dérivation (et de la dérivation seconde) : si f et g sont solutions de l'équation, alors $(\lambda f + \mu g)''(x) = \lambda f''(x) + \mu g''(x) = \lambda(3f'(x) - 2f(x)) + \mu(3g'(x) - 2g(x)) = 3(\lambda f + \mu g)'(x) - 2(\lambda f + \mu g)(x)$, donc toute combinaison linéaire de f et g est également solution de l'équation.
- Les fonctions admettant une branche infinie (asymptote ou branche parabolique) ne forment pas un sous-espace vectoriel. L'ensemble est stable par un produit par un réel (si le réel est non nul on garde le même type de branche infinie), mais pas par somme : par exemple $f : x \mapsto x^2 + \sin(x)$ admet une branche parabolique de direction (Oy), et $g : x \mapsto -x^2$ également, mais leur somme est la fonction sin qui n'a pas de limite en $+\infty$.
- Les fonctions Lipschitziennes sur $\mathbb{R}$ forment un sous-espace vectoriel, on a vu en cours qu'une somme de deux fonctions Lipschitziennes était Lipschitzienne, et le produit par un réel λ d'une fonction k-Lipschitzienne est clairement λk-Lipschitzienne.

Exercice 2 (**)

1. Pour vérifier si la famille est libre, supposons que $a(-1,1,1)+b(1,-1,1)+c(1,1,-1)=(0,0,0)$. On peut traduire cette égalité par le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & - & b & + & c & = & 0 \\ a & + & b & - & c & = & 0 \end{array}\right.$. La somme des deux premières lignes donne $2c=0$, soit $c=0$. De même, la somme des extrêmes donne $b=0$ et la somme des deux dernières $a=0$. La seule combinaison linéaire de la famille donnant le vecteur nul est donc la combinaison nulle, la famille est libre. Pour prouver que la famille est génératrice, calculons directement les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ dans la famille, ce qui nous permettra de répondre très rapidement à la question suivante. Essayons donc d'écrire un vecteur (x,y,z) sous la forme $a(-1,1,1)+b(1,-1,1)+c(1,1,-1)$. Il suffit juste de changer le second membre du système précédent : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & + & c & = & x \\ a & - & b & + & c & = & y \\ a & + & b & - & c & = & z \end{array}\right.$. La somme des deux premières lignes donne cette fois $2c=x+y$, soit $c=\dfrac{x+y}{2}$. De même, les autres sommes donnent $b=\dfrac{x+z}{2}$ et $a=\dfrac{y+z}{2}$. Le système ayant toujours une solution, la famille est génératrice, il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^3$. Les coordonnées du vecteur $(2,3,4)$ dans cette base sont obtenus en remplaçant x, y et z par 3, 4 et 5 dans les calculs précédents, ce qui donne $a=\dfrac{9}{2}$; $b=4$ et $c=\dfrac{7}{2}$. Autrement dit, les coordonnées dans cette base sont $\left(\dfrac{9}{2},4,\dfrac{7}{2}\right)$.

2. La famille étant échelonnée (une constante, un polynôme de degré 1, un de degré 2 et un de degré 3), le cours nous assure directement qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Cherchons les coordonnées de X^3, autrement dit cherchons quatre réels a, b, c et d tels que $X^3=a+bX+cX(X-1)+dX(X-1)(X-2)$. En développant tout, $X^3=a+bX+cX^2-cX+dX^3-3dX^2+2dX=dX^3+(c-3d)X^2+(2d-c+b)X+a$. Par identification des coefficients, $d=1$, $c-3d=0$, donc $c=3$; $2d-c+b=0$, donc $b=1$ et $a=0$. Les coordonnées de X^3 dans notre base sont donc $(0,1,3,1)$ (si vous préférez, $X^2=X+3X(X-1)+X(X-1)(X-2)$.

3. Si $a\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en isolant chaque coefficient, on trouve le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & & & + & 2c & & & = & 0 \\ a & + & 2b & - & 2c & - & 2d & = & 0 \\ & & 3b & + & c & - & 10d & = & 0 \\ & & -b & - & c & + & 4d & = & 0 \end{array}\right.$. Procédons par un mélange de combinaisons et de substitutions : $a=-2c$, la deuxième équation devient alors en divisant par 2, $b-2c-d=0$. En additionnant avec la dernière équation, $-3c+3d=0$, soit $d=c$. On trouve alors dans la deuxième équation $b-3c=0$, soit $b=3c$. Reste à tout remplacer dans la troisième équation : $9c+c-10d=0$. Ah mince, cette équation est toujours vérifiée ! En effet, une solution non triviale du système est par exemple $(-2,3,1,1)$. La famille n'étant pas libre, ce n'est bien sûr pas une base.

4. La famille la plus simple à prendre est la suivante : on définit quatre suites (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) en posant $a_0=1$, $b_1=1$, $c_2=1$, $d_3=1$ et tous les autres termes de chaque suite sont nuls. Chacune de ces suites appartient évidemment à E, et on peut prouver directement que la famille est une base en prouvant qu'une suite de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de nos quatre suites : en effet, on peut écrire $u_n=u_0a_n+u_1b_n+u_2c_n+u_3d_n$ (on vérifie trivialement que cette suite coïncide avec (u_n) en constatant que les quatre premiers termes sont les mêmes et que les suivants sont nuls), et cette écriture est unique en regardant les quatre premiers coefficients. Dans cette base, les coordonnées de x sont tout simplement $(-2,3,4,1)$.

Exercice 3 (*)

L'ensemble F est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène, il s'agit donc d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Par ailleurs, on peut écrire G sous la forme $\{a(2,1,3)+b(1,-1,-1) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((2,1,3);(1,-1,-1))$, qui est aussi un sous-espace vectoriel. Leur intersection est constituée des vecteur de la forme $(2a+b, a-b, 3a-b)$ vérifiant $2x+y-3z=0$, soit $2(2a+b)+(a-b)-3(3a-b)=0$, soit $-4a+4b=0$. Autrement dit, on doit avoir $a=b$ et $F \cap G = \{(3a,0,2a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((3,0,2))$.

Exercice 4 (**)

1. Soit x un élément appartenant à $(A \cap B)+(A \cap C)$, cela signifie que $x = y+z$, avec $y \in A \cap B$, et $z \in A \cap C$. Puisque A est un sous-espace vectoriel, $x = y+z \in A$, donc $x \in A \cap (B+C)$ (il appartient évidemment à $B+C$ puisqu'il est somme d'un élément de B et d'un élément de C). L'égalité n'a aucune raison d'être vraie. Prenons trois droites (vectorielles, donc passant par l'origine) distinctes dans le plan. La somme des deux premières droites est le plan tout entier, donc son intersection avec la troisième droite est cette troisième droite elle-même. Mais l'intersection de la troisième droite avec chacune des deux autres étant réduite à $\{0\}$, la somme des intersections vaut simplement $\{0\}$.
2. Non, même contre-exemple : si A, B et C sont trois droites distinctes, $B \cap C = \{0\}$, donc $A+(B \cap C) = A$; mais $(A+B) = (A+C) = \mathbb{R}^2$, donc $(A+B) \cap (A+C) = \mathbb{R}^2$. On a toujours par contre l'inclusion $A+(B \cap C) \subset (A+B) \cap (A+C)$.
3. Procédons par double inclusion. Soit $x \in (A+(B \cap (A+C))$, alors $x = a+b$, avec $a \in A$, et $b \in B$, et de plus $b = a'+c$, où $a' \in A$, et $c \in C$. On peut alors écrire $x = a+b$, ce qui prouver que $x \in A+B$, et $x = (a+a')+c$, ce qui prouve que $x \in A+C$. Autrement dit, $x \in (A+B) \cap (A+C)$ et $A+(B \cap (A+C)) = (A+B) \cap (A+C)$. Dans l'autre sens, soit $y \in (A+B) \cap (A+C)$, on peut donc écrire $y = a+b = a'+c$, avec les mêmes conventions que ci-dessus ($a \in A$, etc). On peut alors dire que $b = a'-a+c \in A+C$, donc $y \in A+(B \cap (A+C))$, ce qui prouve la deuxième inclusion.

Exercice 5 (*)

1. C'est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille (I,J,K,L), qui est un espace vectoriel, et même précisément l'espace vectoriel engendré par cette famille. Pour prouver que la famille (I,J,K,L) en est une base, il suffit donc de prouver que la famille est libre, ce qui est essentiellement trivial (si on écrit qu'une combinsaison linéaire de la famille est nulle, on obtient 16 équations donc quatre à chaque fois nous assurent la nullité de chaque coefficient).
2. On calcule sans difficulté $J^2 = L$, $K^2 = L$, $L^2 = L$, $J^3 = K$, $K^3 = J$ et $L^3 = L$.
3. On a $JK = JJ^3 = J^4 = (J^2)^2 = L^2 = I$. De même, $KJ = I$, puis $KL = LK = K^3 = J$ et $JL = LJ = J^3 = K$.
4. Soient deux matrices de E, qui s'écrivent donc $aI+bJ+cK+dL$ et $eI+fJ+hK+iL$. Leur produit, via un calcul passionnant et en utilisant les résultats des deux questions précédentes, vaut $(ae+bh+cf+di)I+(af+be+ci+dh)J+(ag+bi+ce+df)K+(ai+bf+cg+de)L$, qui appartient bien à E. L'ensemble E est ce qu'on appelle une algèbre (espace vectoriel et stabilité par produit interne).

Exercice 6 (**)

- Les deux sous-ensembles sont définis par des équations linéaires homogènes, ce sont des sous-espaces vectoriels. Leur intrsection est constituée des couples (x,y) vérifiant $x+y = x-y = 0$, ce qui donne très facilement $x = y = 0$. On a donc bien $F \cap G = \{0\}$. De plus, tout vecteur (a, b) peut s'écrire comme somme d'un élément de F et d'un élément de G : $(a, b) = \left(\dfrac{a-b}{2}; \dfrac{b-a}{2}\right) + \left(\dfrac{a+b}{2}; \dfrac{a+b}{2}\right)$ (si on ne le devine pas, on résout un gentil système).

- F est défini comme ensemble de solutions d'une équation linéaire homogène, G est l'espace vectoriel engendré par une famille, il s'agit bien de deux sous-espaces vectoriels. Supposons $u \in F \cap G$, alors $u = (3a, 2a, a)$, avec $3a - 2a + a = 0$, donc $a = 0$. L'intersection est bien réduite au vecteur nul. Soit désormais un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on souhaite écrire $(x, y, z) = (a, b, c) + (3d, 2d, d)$, avec $a - b + c = 0$. On trouve donc les conditions $a + 3d = x$, soit $a = x - 3d$; $b + 2d = y$, soit $b = y - 2d$, et de même $c = z - d$. La condition $a - b + c = 0$ donne alors $x - 3d - y + 2d + z - d = 0$, donc $d = \dfrac{x - y + z}{2}$. On en déduit les valeurs (uniques) de a, b et c, le système a une solution, ce qui prouve que $F + G = \mathbb{R}^3$.
- F est évidemment un sous-espace vectoriel, G aussi puisqu'il s'agit du noyau d'une application linéaire (la dérivation). Les seuls polynômes ayant une dérivée nulle étant les constantes, $F \cap G = \{0\}$ (aucune constante n'est combinaison linéaire de X et de X^2. Par ailleurs, on peut évidemment écrire tout polynôme de degré 2 comme combinaison linéaire de X et de X^2 plus une constante, c'est la définition d'un polynôme ! Cela prouve la supplémentarité.
- Les sous-espaces F et G sont en effet des sous-espaces vectoriels, une somme ou un produit par un réel de fonctions paires est paire, et de même pour les fonctions impaires. Leur intersection est réduite à la fonction nulle, puisque la seule fonction à la fois paire et impaire (sans même parler de polynômes) est la fonction nulle (elle vérifie $f(x) = -f(x)$ pour tout réel). Par ailleurs, on peut facilement écrire tout polynôme de E comme somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair, tout simplement en séparant les termes correspondant aux puissances paires et impaires : si $P = aX^6 + bX^5 + cX^4 + dX^3 + eX^2 + fX + g$, alors $P = Q + R$, avec $Q = aX^6 + cX^4 + eX^2 + g$ qui est pair, et $R = bX^5 + dX^3 + fX$ qui est impair. On peut en fait montrer à partir de ceci que $F = \text{Vect}(1, X^2, X^4, X^6)$ et $G = \text{Vect}(X, X^3, X^5)$.
- Le sous-ensemble G coïncide avec $\mathbb{R}_0[X]$, c'est un sous-espace vectoriel de E ; les fonctions d'intégrale nulle constituent le noyau de l'application linéaire associant à une fonction continue f son intégrale entre -1 et 1, donc également un sous-espace vectoriel de E. Si une fonction appartient à $F \cap G$, elle est constante égale à k, avec $\displaystyle\int_{-1}^{1} k\ dt = 0$, soit $2k = 0$. Seule la fonction nulle convient. Enfin, on peut écrire n'importe quelle fonction continue f sous la forme $f(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\ dt + \left(f(x) - \dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\ dt\right)$. Le morceau de gauche est évidemment une constante k, celui de droite, si on le nomme $g(x)$, vérifie $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\ dt = \int_{-1}^{1} f(t) - k\ dt = 2k - 2k = 0$. Autrement dit, $g \in G$, et $f \in F + G$, ce qui prouve la supplémentarité de F et G dans E.
- Chacun des ensembles F et G est un sous-espace vectoriel de E comme noyau d'une application linéaire (c'est d'ailleurs la même raison qui fait de E un espace vectoriel). Attention tout de même, l'énoncé a un petit peu oublié de préciser que les suites de F et de G devaient aussi appartenir à E, sinon l'exercice n'a plus aucun sens ! Soit donc une suite appartenant à F et G. Elle vérifie $u_{n+1} = -u_n$, donc $u_{n+2} = -u_{n+1} = u_n$, ce qui implique en prenant la définition de G que $u_n + 2u_n + u_n = 0$, donc $u_n = 0$. La suite est donc nulle. Considérons désormais une suite quelconque (u_n) de E, et posons $v_n = u_{n+1} + u_n$. La suite (v_n) vérifie $v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n = u_{n+3} + u_{n+2} - 2u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_{n+1} + u_n = 0$ puisque $(u_n) \in E$. La suite (v_n) appartient donc à G. De même, la suite $(u_n + u_{n-1})$ appartient à G (il suffit de décaler les relations). Puisque G est un sous-espace vectoriel, la suite définie par $w_n = u_{n+1} + 2u_n + u_{n-1}$ appartient aussi à G. Posons maintenant $z_n = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}$, alors $z_{n+1} + z_n = u_{n+2} - u_{n+1} - u_n + u_{n-1} = 0$ puisque $(u_n) \in E$. La suite (z_n) appartient donc à F. Il suffit alors de constater que $u_n = \dfrac{1}{4}w_n - \dfrac{1}{4}z_n$, avec $\dfrac{1}{4}w_n \in G$ et $-\dfrac{1}{4}z_n \in F$. Nous avons

bien achevé la preuve du fait que $E = F \oplus G$.

Exercice 7 (**)

- La matrice de u dans la base canonique est simplement $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour déterminer le noyau, on résout l'équation $AX = 0$ (ou le système correspondant), ce qui nous mène aux conditions $y = -x$, et $z = 2x - y = 3x$. Autrement dit, $\ker(u) = \{(x, -x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, -1, 3))$. Pour l'image, le plus simple est de calculer les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $\mathrm{Im}(u) = \overrightarrow{(}(1, -2); (1, 1); (0, 1)) = \mathbb{R}^2$, car $(1, 0) = (1, 1) - (0, 1) \in \mathrm{Im}(u)$, donc $\mathrm{Im}(u)$ contient les deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
- (je m'intéresse ici à la deuxième application de la première ligne de l'énoncé) La matrice de u dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On trouve le noyau en résolvant le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$. Les conditions $y = z = -x$ et $z = -y$ imposent $x = y = z = 0$ donc $\ker(u) = \{0\}$. Si on remplace le second membres du système par des inconnues a, b et c, en soustrayant les deux premières équations, on trouve $y - z = a - b$, ce qui donne en additionnant avec la dernière $2y = a - b + c$. De même, $2z = b + c - a$ et $2x = a + b - c$, le système a donc toujours une solution (unique), et l'application est bijective. En particulier, $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^3$. On peut même préciser que $u^{-1}(a, b, c) = \frac{1}{2}(a + b - c; a - b + c, b + c - a)$ (et obtenir du même coup l'inverse de la matrice A).
- Explicitons un peu plus les images des polynômes constituant la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$: $u(1) = (1, 1, 1, 1)$; $u(X) = (1, 2, 3, 4)$; $u(X^2) = (1, 4, 9, 16)$ et $u(X^3) = (1, 8, 27, 64)$. D'où la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$. Le noyau de u est constitué des polynomes de degré 3 qui s'annulent pour $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ et $x = 4$. Seul le polynôme nul peut avoir quatre racines en étant de degré inférieur ou égal à 3, donc $Ker(u) = \{0\}$. Quand à l'image, elle est engendrée par les quatre images calculées plus haut. Mais il n'est pas évident de prouver directement que cette famille est génératrice de $\mathbb{R}^4$. On peut ruser : si le noyau est réduit à 0, c'est que le système homogène de quatre équations à quatre inconnues ayant pour matrice A est de Cramer. La matrice est donc inversible, et l'application linéaire u est nécessairement bijective. En particulier, u est surjective, et $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^4$. En fait, on vient de constater qu'un polynôme de degré 3 (au plus) est déterminé de façon unique par la donnée de ses valeurs en 1, 2, 3 et 4. Ce résultat se généralise, nous en reparlerons dans le chapître consacré à la dimension des espaces vectoriels.
- Calculons donc les images des quatre matrices formant la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a $u\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $u\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $u\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $u\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, soit une matrice dans la base canonique égale à $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors $AM = \begin{pmatrix} -a & -b \\ a - c & b - d \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} -a + b & -b \\ -c + d & -d \end{pmatrix}$. On a donc $u(M) = AM - MA = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ a - d & b \end{pmatrix}$. Cette matrice est nulle seulement si $b = 0$ et

$a = d$, donc $\ker(u) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \mid (a, c) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. L'image de u est engendrée par les images des matrices de la base canonique, d'où $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ (les deux dernières images sont manifestement superflues).

Exercice 8 (*)

1. Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans la base canonique, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   L'expression analytique de u est $u(x, y, z) = (x - 3y - 7z, -x + 2y + 4z, 2x - y + z)$.

2. Il s'agit de résoudre le système Il faut résoudre le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 7z & = & -1 \\ -x & + & 2y & + & 4z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \end{array} \right.$

   $$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 7z & = & -1 \\ & & -y & - & 3z & = & 0 \\ & & -5y & - & 15z & = & -10 \end{array} \right.$$

   Les deux dernières équations étant incompatibles, $(-1, 1, 8)$ n'a pas d'antécédent par u.

   De même, pour le deuxième vecteur, il faut résoudre le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 7z & = & -2 \\ -x & + & 2y & + & 4z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \end{array} \right.$

   $$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & - & 7z & = & -2 \\ & & -y & - & 3z & = & -1 \\ & & -5y & - & 15z & = & -5 \end{array} \right.$$

   Cette fois-ci, les deux dernières équations sont équivalentes et donnent $y = 1 - 3z$. En remplaçant dans la première équation, on obtient $x - 3 + 9z - 7z = -2$, soit $x = 1 - 2z$. Finalement, les antécédents de $(-2, 1, 3)$ sont les vecteurs de la forme $(1 - 2z, 1 - 3z, z)$, pour une certaine valeur réelle de z.

3. u n'est pas injective ni surjective puisque certains éléments ont une infinité d'antécédents, et d'autres n'en ont pas (si on préfère, la matrice A n'est pas inversible).

Exercice 9 (***)

1. Supposons donc $x \in \mathrm{Im}(u)$, il existe alors un $y \in E$ tel que $x = u(y)$. Mais alors $u(x) = u^2(y) = 0$ puisque $u^2 = 0$. Ceci prouve que $x \in \ker(u)$, donc $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$. Pour prouver que $id + u$ est un automorphisme, il suffit d'exhiber son inverse : $(id + u) \circ (id - u) = id - u^2 = id$ (les deux morphismes commutent évidemment). L'application $id + u$ est donc un automorphisme, de réciproque $id - u$.

2. Commençons par constater que $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ est toujours vrai (si $u(x) = 0$, alors certainement $u(u(x)) = 0$). De même, on aura toujours $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$. Supposons alors que $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$, et choisissons $x \in \ker(u^2)$, on peut donc écrire $u(u(x)) = 0$. Autrement dit, $u(x) \in \ker(u)$. Mais comme $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$, nécessairement $u(x) = 0$, ce qui prouve que $\ker(u^2) = \ker(u)$. Réciproquement, supposons que $\ker(u) = \ker(u^2)$, et choisissons $x \in \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$. On peut donc écrire $x = u(y)$, avec $u(x) = 0$. cela implique $u(u(y)) = u(x) = 0$, mais comme $\ker(u) = \ker(u^2)$, $y \in \ker(u)$, donc $x = u(y) = 0$.

   Passons à la deuxième équivalence. Supposons d'abord $\ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E$, et choisissons $x \in \mathrm{Im}(u)$. On peut donc écrire $x = u(y)$, avec par ailleurs $y = z + w$, où $z \in \ker(u)$, et $w = u(\alpha) \in \mathrm{Im}(u)$ d'après l'hypothèse effectuée. Alors $x = u(z+w) = u(z)+u(w) = u(u(\alpha))$, ce qui prouve que $x \in \mathrm{Im}(u^2)$. Réciproquement, supposons $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$, et choisissons $x \in E$. Par hypothèse, $u(x) \in \mathrm{Im}(u^2)$, donc $u(x) = u(u(z))$. Posons alors $x = u(z) + (x - u(z))$. Par construction, $u(z) \in \mathrm{Im}(u)$, mais par ailleurs $u(x-u(z)) = u(x) - u(u(z)) = 0$, donc $x - u(z) \in \ker(u)$. Nous avons bien prouvé que $x \in \mathrm{Im}(f) + \ker(f)$ et achevé notre démonstration.

Exercice 10 (**)

Si z et z' sont deux nombres et λ une constante réelle, alors $f(z + \lambda z') = z + \lambda z' + a\overline{z + \lambda z'} = z + \lambda z' + a\overline{z} + \lambda a\overline{z'} = f(z) + \lambda f(z')$. Le noyau est constitué de tous les nombres complexes vérifiant $f(z) = 0$, soit $z + a\overline{z} = 0$. Autrement dit, en notant $z = x + iy$, et $a = b + ic$, $f(z) = x + iy + (b + ic)(x - iy) = x + bx + cy + i(y + cx - by)$. Il faut donc que $(1 + b)x = cy$ et $(1 - b)y = cx$. Cela implique $(1 - b^2)y = c^2y$, soit $(1 - b^2 - c^2)y = 0$. Si a n'est pas de module 1, on trouve $y = 0$, puis $(1 + b)x = cx = 0$. On a déjà exclu la possibilité $1 + b = c = 0$ (qui correspond au nombre $a = -1$ qui est de module 1), donc dans ce cas, $\ker(f) = \{0\}$ et l'application est injective (et même bijective car le système donnant le noyau est de Cramer, ce qui suffit à prouver l'existence d'antécédents par f de tout nombre complexe). Dans le cas très particulier où $a = -1$, le système se résume à $2y = 0$, soit $y = 0$, et $\ker(u) = \mathbb{R}$ (l'application n'est alors bien sûr pas bijective). Si a est de module 1 (et différent de -1), on doit avoir $x = \dfrac{c}{1+b}y$. Dans ce cas, $cx = \dfrac{c^2}{1+b}y = \dfrac{1-b^2}{1+b}y = (1-b)y$, donc la deuxième équation est automatiquement vérifiée. Autrement dit, $\ker(f) = \mathrm{Vect}\left(\dfrac{c}{1+b} + i\right)$. On peut écrire si on préfère $\dfrac{c}{1+b} = \dfrac{1-b}{c}$, mais il n'y a pas vraiment de façon complètement évidente d'exprimer ceci en fonction de a.r

Exercice 11 (**)

Les sous-ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, et leur intersection est constituée des vecteurs de la forme (a, a, a) vérifiant $2a + a - a = 0$. seul le vecteur nul convient. Essayons désormais de décomposer un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Pour cela, écrivons plutôt $G = \{(x, y, 2x + y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1, 0, 2); (0, 1, 1))$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on cherche donc trois réels a, b et c tels que $(x, y, z) = a(1, 1, 1) + b(1, 0, 2) + c(0, 1, 1)$. Autrement dit, on veut résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & & & = & x \\ a & & & + & c & = & y \\ a & + & 2b & + & c & = & z \end{array}\right.$. Procédons, pour une fois, par substitution : $b = x - a$ et $c = y - a$, donc $a + 2x - 2a + y - a = z$, ce qui donne $x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}z = a$; puis $b = -\dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}z$ et $c = -x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}z$. Puisqu'il y a toujours une solution au système, on peut écrire tout vecteur comme sous la forme $x_F + x_G$, avec $x_F = a(1, 1, 1) \in F$ et $x_G = b(1, 0, 2) + c(0, 1, 1) \in G$. Ce qui prouve que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$. On a déjà effectué tous les calculs nécessaires à l'expression de la projection. Si on la note p, par définition, $p(x, y, z) = x_F = a(1, 1, 1) = \left(x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}z; x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}z; x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}z\right)$. De même pour la symétrie s : $s(x, y, z) = x_G - x_F = b(1, 0, 2) + c(0, 1, 1) - a(1, 1, 1) = (-x - y + z; -2x + z; -2x - y + 2z)$.

Exercice 12 (*)

Pour se simplifier la vie, écrivons la matrice de l'application : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, et calculons $A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = A$, ce qui prouve que $p \circ p = p$, et donc que p est un projecteur. Pour déterminer son noyau, on résout le système (en multipliant tout par 3) : $\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$. La somme des deux dernières équations donne la même chose que la première, le système ne sera pas de Cramer (sans surprise pour un projecteur). En soustrayant ces deux mêmes équations, $3y - 3z = 0$, donc $y = z$. On reporte alors dans la première pour trouver $2x + 2y = 0$, soit $y = -x$, donc $\ker(p) = \{(x, -x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1, -1, -1))$. Pour l'image, plutôt que de calculer comme d'habitude les images des vecteurs de la base canonique, on peut utiliser le fait que les éléments de l'image d'un projecteur sont caractérisés par la condition $p(u) = u$, ou $p(u) - u = 0$. Ici, on se ramène alors au système (en multipliant à nouveau tout par 3) : $\left\{ \begin{array}{ccccccc} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$. Les trois équations sont équivalentes, l'image de p est donc le plan d'équation $x = y + z$, ou si on préfère $\mathrm{Vect}((1, 1, 0); (1, 0, 1))$.

Exercice 13 (***)

1. Il suffit de constater que $(p \circ q) \circ (p \circ q) = p^2 \circ q^2 = p \circ q$ en faisant commuter p et q. D'après la caractérisation des projecteurs, $p \circ q$ est donc un projecteur.
2. Procédons par double inclusion. Soit $x \in \mathrm{Im}(p \circ q)$, donc $x = p \circ q(y)$. Le vecteur x est donc l'image par p de $q(y)$, il appartient à $\mathrm{Im}(p)$. Mais pusique p et q commutent, on peut aussi écrire $x = q \circ (p(y))$, et $x \in \mathrm{Im}(q)$. Ceci prouve que $\mathrm{Im}(p \circ q) \subset \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$, on sait que, pour des projecteurs, on peut le traduire par $p(x) = x$ et $q(x) = x$. Mais alors $p \circ q(x) = p(x) = x$, donc $x \in \mathrm{Im}(p \circ q)$ puisqu'il est laissé stable par $p \circ q$.
3. Procédons de même. Si $x \in \ker(p) + \ker(q)$, alors $x = y + z$, avec $p(y) = q(z) = 0$, donc $p \circ q(x) = p \circ q(y) + p \circ q(z) = q \circ p(y) + 0 = 0$, donc $x \in \ker(p \circ q)$. Réciproquement, si $x \in \ker(p \circ q)$, on peut écrire $x = q(x) + (x - q(x))$, avec $p(q(x)) = 0$ puisque $x \in \ker(p \circ q)$, et $q(x - q(x)) = q(x) - q^2(x) = 0$ puisque q est un projecteur. On vient de prouver que $x \in \ker(p) + \ker(q)$, ce qui achève notre démonstration.

Exercice 14 (***)

On se place dans le sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonction continues $F = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{ch}(x); x \mapsto \mathrm{sh}(x); x \mapsto x\,\mathrm{ch}(x); x \mapsto x\,\mathrm{sh}(x))$.

1. Supposons donc qu'une combinaison linéaire de la famille s'annule : $a\,\mathrm{ch}(x) + b\,\mathrm{sh}(x) + cx\,\mathrm{ch}(x) + dx\,\mathrm{sh}(x)$. Pour $x = 0$, cela implique directement $a = 0$ (tous les autres termes s'annulent). En additionnant les conditions $b\,\mathrm{sh}(x) + cx\,\mathrm{ch}(x) + dx\,\mathrm{sh}(x) = 0$ et $b\,\mathrm{sh}(-x) + c \times (-x)\,\mathrm{ch}(-x) + d \times (-x)\,\mathrm{sh}(-x) = 0$, les fonctions sh et $x \mapsto x\,\mathrm{ch}(x)$ étant impaires (mais la dernière étant paire), on trouve $d = 0$. Il ne reste plus qu'à constater que les deux dernières fonctions ne sont pas proportionnelles (par exemple en disant que l'une est équivalente à $\frac{1}{2}e^x$ et l'autre à $\frac{1}{2}xe^x$ en $+\infty$) pour conclure que $b = c = 0$, et donc que la famille est libre.

2. L'application φ est linéaire car la dérivation l'est. Pour montrer que c'est un endomorphisme, et obtenir par la même occasion la matrice, on va simplement calculer l'image par φ de chacune des quatre fonctions de notre famille, et vérifier que leur image est dans F. Allons-y : $\varphi(\mathrm{ch}) = \mathrm{ch}''' - 2\,\mathrm{ch}'' + \mathrm{ch}' - \mathrm{ch} = \mathrm{sh} - 2\,\mathrm{ch} + \mathrm{sh} - \mathrm{ch} = 2\,\mathrm{sh} - 3\,\mathrm{ch}$; $\varphi(\mathrm{sh}) = 2\,\mathrm{ch} - 3\,\mathrm{sh}$ (calcul identique) ; en écrivant les dérivées en ordre inverse, $\varphi(x \mapsto x\,\mathrm{ch}(x)) = -x\,\mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}(x) + x\,\mathrm{sh}(x) - 4\,\mathrm{sh}(x) - 2x\,\mathrm{ch}(x) + 3\,\mathrm{ch}(x) + x\,\mathrm{sh}(x) = 4\,\mathrm{ch}(x) - 4\,\mathrm{sh}(x) - 3x\,\mathrm{ch}(x) + 2x\,\mathrm{sh}(x)$; de même (on inverse simplement le rôle de sh et de ch), $\varphi(x \mapsto x\,\mathrm{sh}(x)) = -4\,\mathrm{ch}(x) + 4\,\mathrm{sh}(x) + 2x\,\mathrm{ch}(x) - x\,\mathrm{sh}(x)$. Toutes les images obtenues sont dans F, et la matrice de l'endomorphisme φ dans notre base est $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Si on veut juste prouver que φ est un automophisme, on peut se contenter de transformer M en matrice triangulaire supérieure (ce quise fait en deux opérations) et de constater qu'elle est inversible). Mais comme on nous demande ensuite explicitement l'inverse, autant se lancer immédiatement dans un pivot complet :

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_3 + L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 4L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 5L_2 - 8L_3 \\ L_4 \leftarrow 5L_4 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 10L_1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 15 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 25L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} -25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 15 & 10 & 4 & -4 \\ 10 & 15 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 25L_1 - L_2$$

Après ce calcul ébouriffant, il ne reste plus qu'à diviser tout par les bonnes valeurs pour trouver que $M^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -15 & -10 & -4 & 4 \\ -10 & -15 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -15 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & -15 \end{pmatrix}$. La matrice étant inversible, on a en particulier prouvé que φ était un automorphisme.

4. Il suffit pour cela de déterminer une fonction f telle que $\varphi(f) = \operatorname{sh}(x) + x\operatorname{ch}(x)$. On en connait justement une, c'est $\varphi^{-1}(\operatorname{sh}(x) + x\operatorname{ch}(x))$. On détermine explicitement cette fonction en calculant $M^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -14 \\ -11 \\ -15 \\ -10 \end{pmatrix}$. La solution recherchée (qui n'est pas unique, il existe simplement une unique solution à l'équation différentielle **dans F**) est $g : x \mapsto -\frac{1}{25}(14\operatorname{ch}(x) + 11\operatorname{sh}(x) + 15x\operatorname{ch}(x) + 10x\operatorname{sh}(x))$ (oui, je sais, on frise la crise cardiaque tellement c'est beau).

Exercice 15 (**)

1. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, on cherche à écrire $P = x(X^2+1) + y(X+1) + z(2X^2 - X)$, ce qui revient au système $\begin{cases} x + y = c \\ y - z = b \\ x + 2z = a \end{cases}$. En effectuant l'opération $L_3 + L_2 - L_1$, on trouve $z = a + b - c$, puis on en déduit aisément que $y = z + b = a + 2b - c$ puis $x = c - y = -a - 2b + 2c$. Puisque le système a toujours une solution, la famille est génératrice. Puisque la solution est unique (en particulier lorsque $a = b = c = 0$), la famille est libre. il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. D'après la question précédente, la matrice de passage dans l'autre sens est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (attention quand même, les coefficients notés a, b et c dans la première question ne sont pas dans l'ordre de la base canonique).
3. Il suffit de calculer $P^{-1} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ pour en déduire que $P = 5(X^2+1) - 3(X+1) - 2(2X^2 - X)$.
4. Pour la base canonique, on calcule $\varphi(1) = 0$; $\varphi(X) = X$ et $\varphi(X^2) = 2X^2$ pour en déduire la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice sera donc $M' = P^{-1}MP = P^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 16 (**)

1. On calcule et on constate que $A^2 = A$. L'application f vérifie donc $f^2 = f$, c'est un projecteur.
2. Pour le noyau, on résout le système $\begin{cases} 3x - 2y - 4z = 0 \\ x - 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$. En prenant la deuxième équation, $x = 2z$, puis en reportant dans la troisième $2z - y - z = 0$, donc $y = z$. Reste

à reprendre la première équation : $6z - 2z - 4z = 0$, qui est toujours vérifiée. Conclusion : $\ker(f) = \{(2z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((2, 1, 1))$. Pour l'image, le plus simple est de chercher les vecteurs invariants par f, et donc de résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & - & 4z & = & x \\ x & & & - & 2z & = & y \\ x & - & y & - & z & = & z \end{array}\right.$. Les équations se ramènent toutes à $x - y - 2z = 0$, donc $\text{Im}(f) = \{(y + 2z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 1, 0); (2, 0, 1))$.

3. La famille $((2, 1, 1); (1, 1, 0); (2, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (en effet, si $a(2, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(2, 0, 1) = 0$, en composant par f, on obtient $b(1, 1, 0) + c(2, 0, 1) = 0$, ce qui implique très rapidement $b = c = 0$, puis $a = 0$; la matrice de passage de la base canonique à notre famillee est inversible, la famille est donc une base). Dans cette base, le premier vecteur a une image nulle par f, les deux autres ont pour image eux-même, la matrice de f est donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Problème (extrait des Petites Mines 2009) (***)

1. Pour φ, c'est quasiment évident : $\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda P(1) + \mu Q(1)$. En fait, pour f, c'est pareil, peut importe que ce qui se trouve dans P ne soit pas constant, $f(\lambda P + \mu Q) = \frac{1}{2}\lambda P\left(\frac{X}{2}\right) + \frac{1}{2}\lambda P\left(\frac{X+1}{2}\right) + \frac{1}{2}\mu Q\left(\frac{X}{2}\right) + \frac{1}{2}\mu Q\left(\frac{X+1}{2}\right) = f(\lambda P + \mu Q)$.
2. Calculons donc $P(1) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$; $P(X) = \frac{1}{2}\left(\frac{X}{2} + \frac{X+1}{2}\right) = \frac{X}{2} + \frac{1}{4}$; et $P(X^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{4} + \frac{(X+1)^2}{4}\right) = \frac{X^2}{4} + \frac{X}{4} + \frac{1}{8}$. Aussi extraordinaire que ça puisse paraître, la matrice de f dans la base canonique est exactement la matrice A introduite dans l'énoncé. Comme c'est curieux, comme c'est étrange et quelle coïncidence ! (Ionesco, pour ceux qui n'auraient pas reconnu).
3. Le noyau de φ est constitué des polynômes s'annulant en 1, donc factorisables par $X - 1$. Si on se restreint comme ici au degré 2, $\ker(\varphi) = \{(X-1)(aX+b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(X-1, X^2-X)$. L'application φ n'est donc pas injective. Par contre, elle est sûrement surjective puisque par exemple $\varphi(1) = 1$, ce qui suffit à prouver que $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ (la seule autre possibilité quand l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$ serait d'avoir une image nulle donc une application nulle).
4. C'est une famille échelonnée de trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$, donc une base.
5. On va exceptionnellement noter M la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$ pour éviter la confusion avec les polynômes. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Inverser cette matrice est très facile, on effectue les deux opérations $L_1 \leftarrow 6L_1 + 3L_2 + 2L_3$ puis $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ pour la transformer en matrice diagonale, et il ne reste plus qu'à diviser les trois lignes respectivement par 6, -2 et 6 pour obtenir $M^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
6. On peut bien évidemment calculer $Q = M^{-1}AM = M^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.
Autre possibilité, on devine que la matrice va être diagonale, et on calcule directement $f(1) = 1$ (déjà fait plus haut) ; $f(-2X+1) = \frac{1}{2}(-X+1-X) = \frac{1}{2}(-2X+1)$; et enfin $f(6X^2-6X+1) =$

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}X^2-3X+1+\dfrac{3}{2}(X+1)^2-3X-3+1\right)=\dfrac{3}{2}X^2-\dfrac{3}{2}X+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}(6X^2-6X+1)$, ce qui permet de retrouver la même matrice.

7. Puisque $A=MQM^{-1}$, on prouve par une récurrence triviale que $A^n=MQ^nM^{-1}$ (c'est vrai au rang 1, et en le supposant au rang n, $A^{n+1}=A^n\times A=MQ^nM^{-1}MQM^{-1}=MQ^{n+1}M^{-1}$). La matrice Q étant diagonale, $Q^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2^n}&0\\0&0&\frac{1}{4n}\end{pmatrix}$, il ne reste plus qu'à calculer $MQ^n=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2^n}&\frac{1}{4^n}\\0&-\frac{1}{2^{n-1}}&-\frac{6}{4^n}\\0&0&\frac{6}{4^n}\end{pmatrix}$, puis $A^n=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}&\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{6\times4^n}\\0&\frac{1}{2^n}&\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}\\0&0&\frac{1}{4^n}\end{pmatrix}$.

8. Si $P=aX^2+bX+c$, il suffit de multiplier la matrice A^n par la matrice-colonne $\begin{pmatrix}c\\b\\a\end{pmatrix}$ (attention à l'ordre des coefficients) pour obtenir les coefficients de $f^n(P)$. On trouve $f^n(P)=\dfrac{a}{4^n}X^2+\left(\dfrac{b}{2^n}+\dfrac{a}{2^n}-\dfrac{a}{4^n}\right)X+c+\dfrac{b}{2}-\dfrac{b}{2^{n+1}}+\dfrac{a}{3}-\dfrac{a}{2^{n+1}}+\dfrac{a}{6\times4^n}$, puis $\varphi(f^n(P))=\dfrac{a}{4^n}+\dfrac{b}{2^n}+\dfrac{a}{2^n}-\dfrac{a}{4^n}+c+\dfrac{b}{2}-\dfrac{b}{2^{n+1}}+\dfrac{a}{3}-\dfrac{a}{2^{n+1}}+\dfrac{a}{6\times4^n}$. inutile de s'embêter à simplifier, on peut se contenter de constater que $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(f^n(P))=c+\dfrac{b}{2}+\dfrac{a}{3}$. Or, $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt=\int_0^1 at^2+bt+c\,dt=\left[\frac{at^3}{3}+\frac{bt^2}{2}+ct\right]_0^1=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c$, qui coïncide bien avec la limite calculée.