

Feuille d'exercices n°14 : Espaces vectoriels

PTSI B Lycée Eiffel

2 avril 2013

Exercice 1 (*)

On se place dans l'ensemble E des fonctions \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (il s'agit bien d'un espace vectoriel). Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E ?

- fonctions paires
- fonctions admettant un minimum global
- fonctions s'annulant une infinité de fois sur \mathbb{R}
- fonctions vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x^2)$
- fonctions admettant une tangente horizontale en $x = 5$
- fonctions vérifiant $f''(x) = 3f'(x) - 2f(x)$
- fonctions admettant en $+\infty$ une asymptote (horizontale ou oblique) ou une branche parabolique (de direction (Ox) ou (Oy))
- fonctions Lipschitziennes sur \mathbb{R}

Exercice 2 (**)

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille \mathcal{F} est une base de E , et déterminer si possible les coordonnées de x dans \mathcal{F} .

1. $E = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{F} = ((-1, 1, 1); (1, -1, 1); (1, 1, -1))$ et $x = (2, 3, 4)$.
2. $E = \mathbb{R}_3[X]$; $\mathcal{F} = (1; X; X(X-1); X(X-1)(X-2))$ et $x = X^3$.
3. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} \right)$ et $x = I_4$.
4. $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \geq 4, u_n = 0\}$; $x = (-2, 3, 4, 1, 0, 0, \dots)$ (vous avez le choix pour \mathcal{F} !).

Exercice 3 (*)

On considère dans \mathbb{R}^3 les deux sous-ensembles $F = \{(x, y, z) \mid 2x + y - 3z = 0\}$ et $G = \{(2a + b, a - b, 3a - b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer qu'il s'agit de deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 , et déterminer leur intersection $F \cap G$.

Exercice 4 (**)

Dans un espace vectoriel E , on considère trois sous-espaces vectoriels A , B et C .

1. Montrer que $A \cap (B + C) \supset (A \cap B) + (A \cap C)$. L'égalité est-elle nécessairement vérifiée ?
2. A-t-on toujours $A + (B \cap C) = (A + B) \cap (A + C)$?
3. Montrer que $A + (B \cap (A + C)) = (A + B) \cap (A + C)$.

Exercice 5 (*)

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant

sous la forme $M = aI + bJ + cK + dL$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}^4$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel, et que (I, J, K, L) en forme une base.
2. Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et L^3 appartiennent à E .
3. En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E .
4. Établir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E .

Exercice 6 (**)

Dans chacun des cas suivants, montrer que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E , et qu'ils sont supplémentaires.

- $E = \mathbb{R}^2$; $F = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \mid x - y = 0\}$.
- $E = \mathbb{R}^3$; $F = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((3, 2, 1))$.
- $E = \mathbb{R}_2[X]$; $F = \text{Vect}(X, X^2)$ et $G = \{P \mid P' = 0\}$.
- $E = \mathbb{R}_6[X]$; $F = \{P \in E \mid P \text{ est une fonction paire}\}$ et $G = \{P \in E \mid P \text{ est une fonction impaire}\}$.
- $E = \mathcal{C}_0([-1; 1], \mathbb{R})$; $F = \{f \in E \mid \int_{-1}^1 f(t) dt = 0\}$ et $G = \{\text{fonctions constantes}\}$.
- $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1} + u_n = 0\}$; $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + u_n = 0\}$ et $G = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0\}$.

Exercice 7 (**)

Donner la matrice (dans les bases canoniques à chaque fois) des applications linéaires suivantes, ainsi que leur noyau et leur image :

• $u : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, y - 2x + z) \end{matrix}$

• $u : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y, x + z, y + z) \end{matrix}$

• $u : \begin{matrix} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3), P(4)) \end{matrix}$

• $u : \begin{matrix} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{matrix}$
où on a posé $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 8 (*)

Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que les images des vecteurs de la base canonique soient $(1, -1, 2)$, $(-3, 2, -1)$ et $(-7, 4, 1)$.

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique, ainsi que l'expression de u .
2. Déterminer les antécédents par u de $(-1, 1, 8)$ et de $(-2, 1, 3)$.
3. u est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 9 (***)

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $u^2 = 0$. Montrer que $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$, et que $\text{id}_E + u$ est un automorphisme.
2. Dans le cas général, montrer que $\text{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\} \Leftrightarrow \ker(u^2) = \ker(u)$; et que $\ker(u) + \text{Im}(u) = E \Leftrightarrow \text{Im}(u^2) = \text{Im}(u)$.

Exercice 10 (**)

On considère \mathbb{C} comme un \mathbb{R} -espace vectoriel, et on définit l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par $f(z) = z + a\bar{z}$, où a est un nombre complexe fixé. Montrer que f est linéaire, Déterminer son noyau, et donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que f soit bijective.

Exercice 11 (**)

On se place dans \mathbb{R}^3 et on note $F = \text{Vect}((1, 1, 1))$ et $G = \{(x, y, z) \mid 2x + y - z = 0\}$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ et déterminer l'expression analytique de la projection sur F parallèlement à G et de la symétrie par rapport à G parallèlement à F .

Exercice 12 (*)

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z; \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z; \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \right)$. Montrer que f est un projecteur et déterminer ses éléments caractéristiques (noyau et image).

Exercice 13 (***)

Soient p et q deux projecteurs dans un même espace vectoriel E , vérifiant $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est aussi un projecteur.
2. Montrer que $\text{Im}(p \circ q) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$.
3. Montrer que $\ker(p \circ q) = \ker(p) + \ker(q)$.

Exercice 14 (***)

On se place dans le sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonction continues $F = \text{Vect}(x \mapsto \text{ch}(x); x \mapsto \text{sh}(x); x \mapsto x \text{ch}(x); x \mapsto x \text{sh}(x))$.

1. Montrer que la famille $\text{Vect}(x \mapsto \text{ch}(x); x \mapsto \text{sh}(x); x \mapsto x \text{ch}(x); x \mapsto x \text{sh}(x))$ est une famille libre.
2. Soit $\varphi : f \mapsto f''' - 2f'' + f' - f$, montrer que φ est un endomorphisme de F , et donner sa matrice dans la base de la question précédente.
3. L'application φ est-elle un automorphisme? Si oui, déterminer la matrice de φ^{-1} .
4. En déduire une solution particulière de l'équation différentielle $f''' - 2f'' + f' - f = \text{sh}(x) + x \text{ch}(x)$.

Exercice 15 (**)

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on note \mathcal{B} la famille $(X^2 + 1; X + 1; 2X^2 - X)$.

1. Vérifier que \mathcal{B} est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base canonique vers la base \mathcal{B} , et celle de \mathcal{B} vers la base canonique.
3. Déterminer les coordonnées du polynôme $P = X^2 - X + 2$ dans la base \mathcal{B} .
4. On considère l'endomorphisme de E défini par $\varphi(P) = XP'$. Déterminer sa matrice dans la base canonique, puis dans la base \mathcal{B} .

Exercice 16 (**)

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 . Que peut-on en déduire sur f ?
2. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\text{Im}(f)$.
3. Donner la matrice de f dans une base constituée uniquement de vecteurs de $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Problème (extrait des Petites Mines 2009) (***)

On se place dans tout ce problème sur $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique. On y définit les deux applications $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & \frac{1}{2} \left(P \left(\frac{X}{2} \right) + P \left(\frac{X+1}{2} \right) \right) \end{cases}$; et $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{cases}$.

On note par ailleurs $\mathcal{B} = (1; -2X + 1; 6X^2 - 6X + 1)$, et $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f et φ sont des applications linéaires.
2. Écrire la matrice de f dans la base canonique. L'application f est-elle injective? Surjective?
3. Déterminer une base de $\ker(\varphi)$. L'application φ est-elle injective? Surjective?
4. Justifier que \mathcal{B} est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Écrire la matrice de passage de la base canonique vers \mathcal{B} , et calculer son inverse.
6. Écrire la matrice Q de f dans la base \mathcal{B} .
7. Calculer A^n pour tout entier naturel n , en précisant la valeur des neuf coefficients de la matrice.
8. Pour un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer $f^n(P)$ en fonction de ses coefficients, et montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t) dt.$$