

Feuille d'exercices n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

12 novembre 2012

Exercice 1 (* à **)

1. On résout l'équation sur \mathbb{R} . L'équation homogène associée $y' - 2y = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $y_h(x) = Ke^{2x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

On peut chercher une solution particulière à l'équation sous la forme $y_p(x) = K(x)e^{2x}$. On a alors $y'(x) = (K'(x) + 2K(x))e^{2x}$, donc y_p est solution si $K'(x) = (\sinh x - 2x \cosh x)e^{-2x} = \frac{e^{-x} - e^{-3x}}{2} - xe^{-x} - xe^{-3x}$, soit par exemple $K(x) = \int_0^x \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{2} - te^{-t} - te^{-3t} dt = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^{-3x} - \frac{1}{6} + [te^{-t}]_0^x - \int_0^x e^{-t} dt + \left[t \frac{e^{-3t}}{3} \right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{-3t}}{3} dt = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{-3x} + xe^{-x} + e^{-x} + \frac{x}{3}e^{-3x} + \frac{e^{-3x}}{9} + A = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + \left(\frac{x}{3} + \frac{5}{18}\right)e^{-3x} + A$, où A est une constante qu'on peut ignorer (on a effectué des intégrations par partie pour les produits de t par des exponentielles).

Les solutions complètes sont donc les fonctions $y(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + \left(\frac{x}{3} + \frac{5}{18}\right)e^{-3x} + Ke^{2x}$.

Autre possibilité pour trouver une solution particulière, écrire le second membre sous la forme $\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x(e^x + e^{-x}) = \left(\frac{1}{2} - x\right)e^x - \left(\frac{1}{2} + x\right)e^{-x}$ et utiliser le principe de superposition. On

cherche d'abord une solution à l'équation $y' - 2y = \left(\frac{1}{2} - x\right)e^x$ sous la forme $y_1(x) = (ax + b)e^x$.

On a alors $y_1'(x) = (ax + a + b)e^x$, donc y_1 est solution si $(-ax + a - b)e^x = \left(\frac{1}{2} - x\right)e^x$, soit $a = 1$

et $b = \frac{1}{2}$. On obtient donc $y_1(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^x$. De même, on cherche une solution à l'équation

$y' - 2y = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x}$ sous la forme $y_2(x) = (cx + d)e^{-x}$. On a alors $y_2'(x) = (-cx - d + c)e^{-x}$, et

y_2 est solution si $(-3cx + c - 3d)e^{-x} = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x}$, soit $c = -\frac{1}{3}$ et $d = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{18}$.

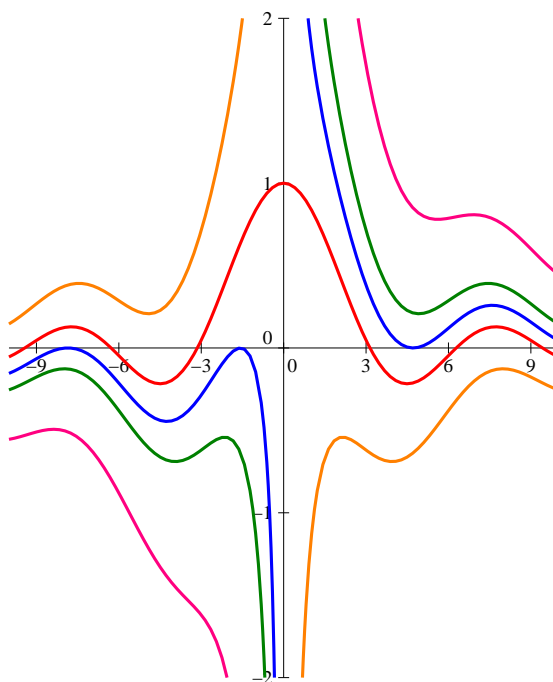
On obtient donc $y_2(x) = -\frac{x}{3} - \frac{5}{18}$, ce dont on déduit la même solution particulière que ci-dessus (et bien sûr les mêmes solutions générales).

2. Comme il faut diviser par t pour mettre l'équation sous forme usuelle, la résolution s'effectuera sur les intervalles \mathbb{R}^{+*} et \mathbb{R}^{-*} . On a alors $y' + \frac{y}{t} = \frac{\cos t}{t}$. L'équation homogène associée est $y' + \frac{y}{t} = 0$, dont les solutions sont les fonctions $t \mapsto Ke^{\ln|t|} = \frac{K}{t}$, $K \in \mathbb{R}$ (on peut enlever la valeur absolue quitte à changer le signe de la constante sur \mathbb{R}^{-*}).

On cherche ensuite une solution particulière de la forme $y_p(t) = \frac{K(t)}{t}$, d'où on tire $\frac{K'(t)}{t} = \frac{\cos t}{t}$. Une solution particulière est donc la fonction $\frac{\sin t}{t}$, et les solutions générales de l'équation

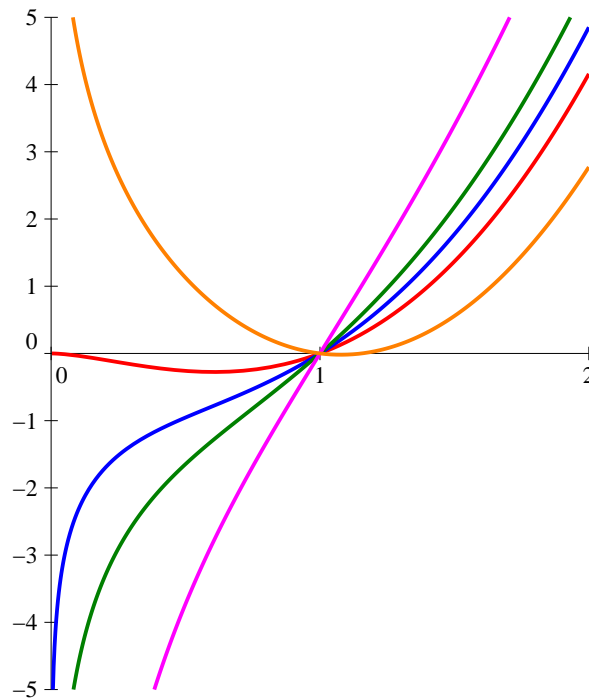
sont de la forme $y(t) = \frac{\sin t + K}{t}$. Pour tenter de recoller les solutions sur \mathbb{R} , il faut savoir que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ (c'est par exemple une conséquence du fait qu'il s'agit du taux d'accroissement de la fonction sinus en 0, qui tend donc vers $(\sin)'(0) = \cos(0) = 1$). Il faut alors avoir $K = 0$ pour obtenir une fonction prolongeable en 0 en posant $f(0) = 1$. En admettant que la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est dérivable en 0, on obtient donc une unique solution définie sur \mathbb{R} .

Quelques courbes de solutions : en rouge pour $K = 0$ (donc la solution définie sur \mathbb{R} , en bleu $K = 1$, en vert $K = 2$, en rose $K = 5$ et en orange $K = -2$ (les valeurs négatives de K donnent des courbes symétriques par rapport à l'axe des ordonnées de celles obtenues pour les valeurs positives) :



3. On résout l'équation sur \mathbb{R} . L'équation homogène associée $y' + y = 0$ a pour solutions les fonctions $y_h : t \mapsto K e^{-t}$, on recherche donc y_p sous la forme $K(t)e^{-t}$, ce qui nous donne $K'(t)e^{-t} = \frac{1}{1+e^t}$, soit $K'(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$. Le membre de droite étant de la forme $\frac{u'}{u}$, on peut prendre comme primitive $K(t) = \ln(1+e^t)$. Les solutions de l'équation complète sont donc de la forme $y : t \mapsto (\ln(1+e^t) + K)e^{-t}$, $K \in \mathbb{R}$.
4. Pour les solutions de l'équation homogène, cf l'équation précédente. Plutôt que d'utiliser la méthode de variation de la constante (qui amène un calcul de primitive par intégration par parties peu agréable), nous allons directement chercher une solution de la forme $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$. On a donc $y_p'(x) = (2ax^2 + (2a+2b)x + b+2c)e^{2x}$, et y_p est solution, en factorisant par e^{2x} , si et seulement si $3ax^2 + (2a+3b)x + b+3c = x^2 - 2x + 2$, soit $a = \frac{1}{3}$; $2a+3b = -2$, donc $b = -\frac{8}{9}$; et enfin $b+3c = 2$, donc $c = \frac{26}{27}$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto K e^{-x} + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{26}{27}\right) e^{2x}$.
5. Comme il faut diviser par $x \ln x$, on va résoudre sur les intervalles $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$ (l'équation ne peut pas avoir de sens ailleurs que sur \mathbb{R}^{+*} à cause du \ln). On obtient donc $y' + \frac{y}{x \ln x} = 3x \ln x$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto K e^{\ln|\ln|x||} = K \ln x$ (à un

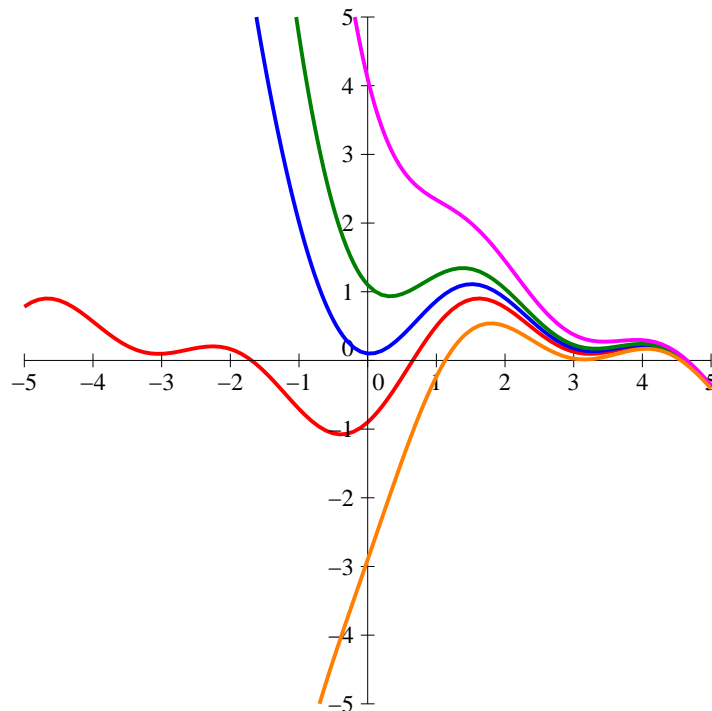
changement de constante près, cette formule est valable sur les deux intervalles de résolution). On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = K(x) \ln x$, donc $y_p'(x) = K'(x) \ln(x) + \frac{K(x)}{x}$. En reprenant l'équation, y_p est solution si $K'(x) \ln x = 3x \ln x$, on peut donc prendre $K(x) = \frac{3}{2}x^2$ et les solutions générales sont les fonctions $y : x \mapsto \left(\frac{3}{2}x^2 + K\right) \ln x$. Toutes les solutions se prolongent en 1 en posant $y(1) = 0$. De plus, les solutions sont dérivables sur \mathbb{R}^{+*} , de dérivée $y'(x) = 3x \ln(x) + \frac{3}{2}x + \frac{K}{x}$, qui prend donc la valeur $\frac{3}{2} + K$ en 1. On obtient ainsi un recollement uniquement si la constante sur $]0; 1[$ est la même que sur $]1; +\infty[$. Des allures de courbes avec les mêmes conventions pour les couleurs que dans la deuxième équation ci-dessus :



6. Du classique, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-2x}$. On cherche directement une solution particulière de la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. On aura donc $y_p'(x) = 2ax + b$, et y_p sera solution si $2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2$, ce qui impose $a = \frac{1}{2}$; $2a + 2b = 0$ donc $b = -\frac{1}{2}$; et $b + 2c = 0$ donc $c = \frac{1}{4}$. On obtient $y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, et les solutions de l'équation complète sont les fonctions $y : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + Ke^{-2x}$.
7. On résout sur \mathbb{R} . L'équation homogène a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-\frac{x^3}{3}}$. On ne cherche pas de solution particulière puisqu'il y en a une qui nous saute aux yeux : la fonction constante égale à -1 . Les solutions générales sont donc les fonctions $y : x \mapsto Ke^{-\frac{x^3}{3}} - 1$. Si on veut de plus $y(0) = 0$, il faut avoir $K - 1 = 0$, donc $K = 1$. La solution unique au problème de Cauchy posé est donc la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{x^3}{3}} - 1$.
8. On ne peut résoudre que sur l'intervalle $] -1; 1[$. L'équation homogène $y' - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0$ a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-\arcsin x}$. Encore une fois, la fonction constante égale à -1 est une solution particulière donc les solutions générales sont de la forme $x \mapsto Ke^{-\arcsin x} - 1$.
9. On résout sur les intervalles \mathbb{R}^{+*} et \mathbb{R}^{-*} . L'équation homogène associée $y' + \frac{y}{2t} = 0$ a pour

solutions les fonctions $y_h : t \mapsto Ke^{-\ln|\frac{t}{2}|} = \frac{K}{\sqrt{|t|}}$. On cherche y_p sous la forme $\frac{K(t)}{\sqrt{|t|}}$, soit $y_p'(t) = \frac{K'(t)}{\sqrt{|t|}} - \frac{K(t)}{2t\sqrt{|t|}}$, et on obtient $\frac{K'(t)}{\sqrt{|t|}} = \frac{t^{n-1}}{2}$, donc $K'(t) = \frac{1}{2}|t|^{n-\frac{1}{2}}$. Finalement, $y_p(t) = \frac{t^n}{2n+1}$ convient (sur chacun des deux intervalles), et les solutions générales de l'équation sont les fonctions $y : t \mapsto \frac{t^n}{2n+1} + \frac{K}{\sqrt{|t|}}$. Si on souhaite recoller les morceaux en 0, seule la valeur $K = 0$ est possible, et la fonction $t \mapsto \frac{t^n}{2n+1}$ est la seule solution définie sur \mathbb{R} .

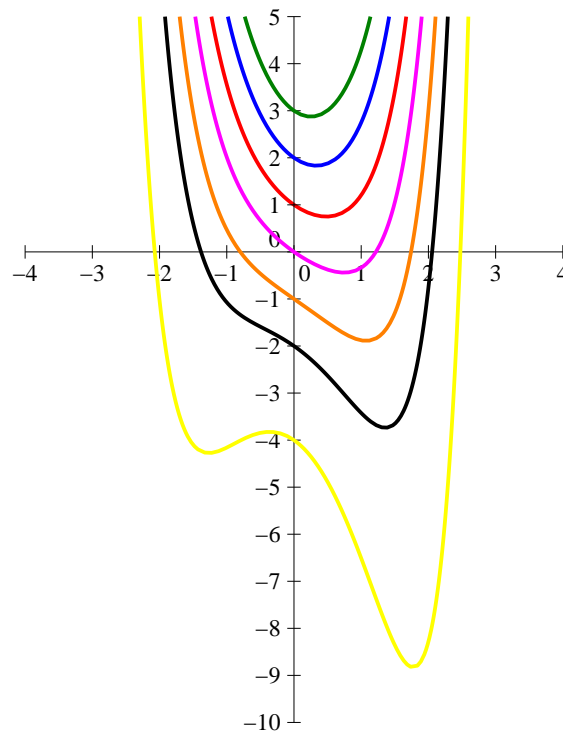
10. L'équation homogène a pour solutions les fonctions $x \mapsto Ke^{-x}$. On va ici utiliser le principe de superposition et commencer par chercher une solution à l'équation $y' + y = \sin(x)$ sous la forme $y_1(x) = a \sin(x) + b \cos(x)$. On a $y_1'(x) = a \cos(x) - b \sin(x)$, donc y_1 est solution si $(a+b)\cos(x) + (a-b)\sin(x) = \sin(x)$. Il suffit donc d'avoir $a+b=0$ et $a-b=1$, soit $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$, donc $y_1(x) = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))$. De même, on cherche à trouver une solution de l'équation $y' + y = \sin(2x)$ sous la forme $y_2(x) = a \sin(2x) + b \cos(2x)$, ce qui donne $y_2'(x) = 2a \cos(2x) - 2b \sin(2x)$. On obtient comme tout à l'heure un système, en l'occurrence $a-2b=1$ et $b+2a=0$. Comme $b = -2a$, $5a = 1$ donc $a = \frac{1}{5}$, puis $b = -\frac{2}{5}$, et $y_2(x) = \frac{1}{5} \sin(2x) - \frac{2}{5} \cos(2x)$. Finalement, les solutions de l'équation complète sont les fonctions $y : x \mapsto \frac{1}{2} \sin(x) - \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{1}{5} \sin(2x) - \frac{2}{5} \cos(2x) + Ke^{-x}$. Allez, ça fait un moment que je n'ai pas fait joujou avec des tracés de courbes colorées :



11. L'équation homogène associée a des solutions de la forme Ke^{3x} . On utilise ensuite le principe de superposition en cherchant d'abord une solution à l'équation $y' - 3y = x^2e^x$ sous la forme $y_1(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$. On a alors $y_1'(x) = (2ax + b + ax^2 + bx + c)e^x$, donc y_1 est solution si $((a-3a)x^2 + (2a+b-3b)x + (b+c-3c))e^x = x^2e^x$. Les conditions imposées sont $-2a = 1$, donc $a = -\frac{1}{2}$; $2a - 2b = 0$, donc $b = -\frac{1}{2}$; et $b - 2c = 0$, donc $c = -\frac{1}{4}$, ce qui donne

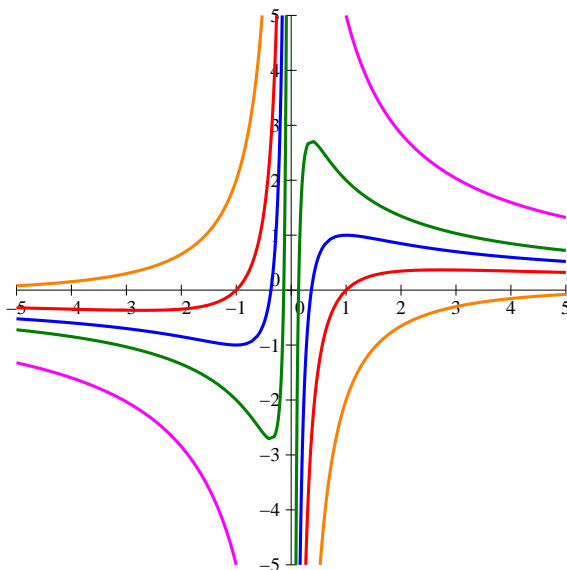
$y_1(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x$. De même, on cherche une solution à l'équation $y' - 3y = xe^{3x}$ sous la forme $y_2(x) = (ax^2 + bx + c)e^{3x}$ (il faut prendre un polynôme du second degré car on est dans le cas particulier où l'exponentielle est la même que celle de l'équation homogène). On a donc $y_2'(x) = (2ax + b + 3ax^2 + 3bx + 3c)e^{3x}$, donc y_2 est solution si $((3a - 3a)x^2 + (2a + 3b - 3b)x + b + 3c - 3c)e^{3x} = xe^{3x}$. Les seules conditions sont donc $2a = 1$ et $b = 0$. On peut choisir $y_2(x) = \frac{1}{2}x^2e^{3x}$, et on en déduit que les solutions de l'équation complète sont les fonctions $x \mapsto \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 + K\right)e^{3x}$. Comme $y(0) = -\frac{1}{4} + K$, la solution recherchée est celle obtenue pour $K = \frac{5}{4}$, soit $y(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}\right)e^{3x}$.

12. La fonction ch ne s'annulant jamais, cette dernière équation peut se résoudre sur \mathbb{R} . Il faut trouver une primitive de la fonction $\tanh : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Ce quotient est de la forme $\frac{u'}{u}$, il a donc pour primitive $\ln(e^x + e^{-x})$, ou encore (elles ne diffèrent que d'une constante) $\ln(\cosh(x))$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $y_h : x \mapsto K \cosh(x)$. On va chercher une solution particulière à l'équation complète de la forme $y_p(x) = K(x) \cosh(x)$, ce qui implique $y_p'(x) = K'(x) \cosh(x) + K(x) \sinh(x)$. La fonction est solution de l'équation si $K'(x) \cosh(x) = \frac{\sinh^3(x)}{\cosh(x)}$, soit $K'(x) = \frac{\sinh^3(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{(\cosh^2(x) - 1) \sinh(x)}{\cosh^2(x)} = \sinh(x) - \frac{1}{\cosh^2(x)}$. On en déduit qu'on peut prendre $K(x) = \cosh(x) - \tanh(x)$, soit $y_p(x) = \cosh^2(x) - \sinh(x)$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto \cosh^2(x) - \sinh(x) + K \cosh(x)$. Une dernière série de courbes pour terminer en beauté l'exercice, de haut en bas les courbes correspondant à $K = 2, K = 1, K = 0, K = -1, K = -2, K = -3$ et $K = -5$:



Exercice 2 (*)

Sur les intervalles précisés, aucun problème : l'équation homogène $y' + \frac{y}{x} = 0$ a pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto e^{-\ln|x|} = \frac{K}{x}$ (quitte à changer le signe de K sur \mathbb{R}^{-*}), et on cherche y_p sous la forme $\frac{K(x)}{x}$. On obtient $y'_p(x) = \frac{xK'(x) - K(x)}{x^2}$, d'où la condition $\frac{xK'(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}$, soit $K(x) = \ln|x|$, donc les solutions générales sont de la forme $y(x) = \frac{K + \ln|x|}{x}$. Ces fonctions ne sont jamais prolongeables par continuité en 0, il n'y a donc pas de solution définie sur \mathbb{R} . Une allure de quelques courbes intégrales de cette équation (comme dans le premier exercice, rouge pour $K = 0$, bleu pour 1, vert pour 2, rose pour 5 et orange pour -2) :



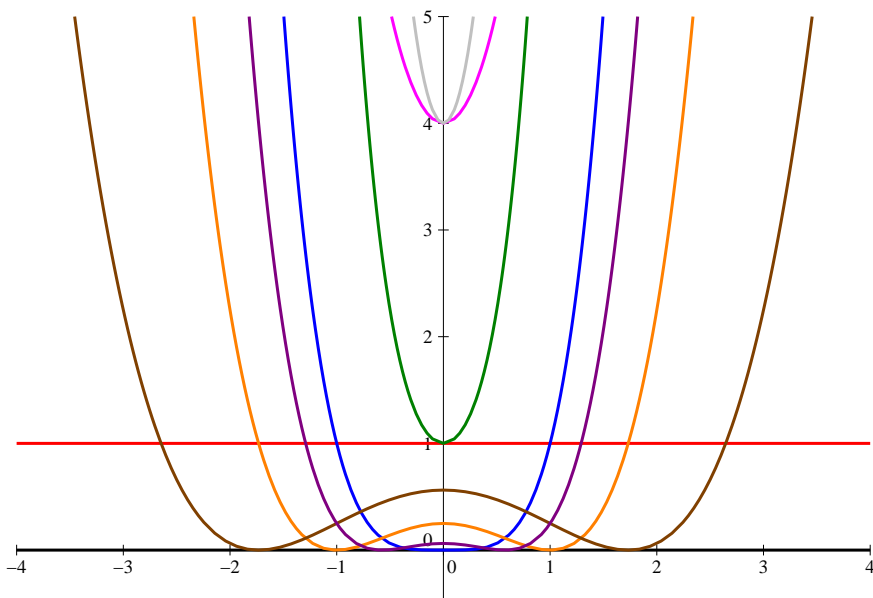
Exercice 3 (**)

Toutes les solutions sont des fonction dérivables sur \mathbb{R} , puisque le membre de droite de l'équation est dérivable. On peut par ailleurs écrire l'équation $f(x) = \sin(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt$, et dériver pour obtenir $f'(x) = \cos(x) + 2e^x \times e^{-x} f(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt$. En reprenant l'équation initiale, on a donc $f'(x) = \cos(x) + 2f(x) + (f(x) - \sin(x))$, soit $f'(x) - 3f(x) = \cos(x) - \sin(x)$. On est retombé sur une équation linéaire du premier ordre qu'on sait résoudre. L'équation homogène a pour solutions $y_h : x \mapsto Ke^{3x}$, et on peut chercher une solution particulière de la forme $y_p(x) = a \sin(x) + b \cos(x)$, ce qui donne $y'_p(x) = a \cos(x) - b \sin(x)$. La fonction y_p est donc solution si $(a - 3b) \cos(x) - (b + 3a) \sin(x) = \cos(x) - \sin(x)$, ce qui fonctionne si $a - 3b = 1$ et $b + 3a = 1$, soit $b = -\frac{1}{5}$ et $a = \frac{2}{5}$. On peut donc prendre $y_p(x) = \frac{2}{5} \cos(x) - \frac{1}{5} \sin(x)$, ce qui donne comme solutions de l'équation complète les fonctions $f(x) = \frac{2}{5} \cos(x) - \frac{1}{5} \sin(x) + Ke^{3x}$. Le travail n'est pas fini car on a obtenu simplement les fonctions f dont la dérivée vérifie une condition nécessaire pour être solutions du problème initial. Il faut donc vérifier par exemple que $f(0)$ prend la valeur donnée par l'équation initiale pour que nos solutions soient valables. Ici, on doit avoir $f(0) = \sin(0) + \int_0^0 e^{x-t} f(t) dt = 0$, donc $K + \frac{2}{5} = 0$. cela impose la valeur $K = -\frac{2}{5}$, soit $f(x) = \frac{2}{5} \cos(x) - \frac{1}{5} \sin(x) - \frac{2}{5} e^{3x}$. On vérifie si on le souhaite que cette fonction est effectivement solution, et c'est donc la seule.

Exercice 4 (**)

Posons donc $z = \sqrt{y}$ (ce qui est possible car y doit être à valeurs positives pour satisfaire l'équation), on a alors $y = z^2$, donc $y' = 2zz'$, d'où $2(1+t^2)zz' = 4tz^2 + 4tz$. On doit donc avoir, pour les points où z ne s'annule pas, $2(1+t^2)z' - 4tz = 4t$. Il y a une solution particulière évidente à cette équation qui est la fonction constante égale à -1 , et l'équation homogène associée $z' - \frac{2t}{1+t^2}z = 0$ a pour solutions les fonctions de la forme $t \mapsto Ke^{\ln(1+t^2)} = K(1+t^2)$, donc on obtient $z(t) = K(1+t^2) - 1$, et $y(t) = (K(1+t^2) - 1)^2$. Se pose désormais le problème de savoir ce qui se passe lorsque ces solutions s'annulent. On constate que $z(t) = 0$ si $t^2 = \frac{1-K}{K}$ (si $K = 0$, y est la fonction constante égale à 1). Si $K \notin]0, 1]$, pas de problème, z et y ne s'annulent jamais et on obtient donc des solutions définies sur \mathbb{R} . Il existe d'ailleurs une autre solution définie partout, la solution nulle. Regardons maintenant les cas où les fonctions n'annulent. Commençons par le cas particulier $K = 1$, où $y(t) = t^4$. Cette fonction s'annule une seule fois, pour $t = 0$, et elle est solution de l'équation sur \mathbb{R} tout entier (on le vérifie facilement, la dérivée en 0 étant nulle). Si $0 < K < 1$, z et y s'annulent pour $K = \pm \sqrt{\frac{1-K}{K}}$, et l'équation initiale devient pour les valeurs où y s'annule $(1+t^2)y' = 0$, donc la dérivée de y doit s'annuler à ces endroits pour que la fonction y reste solution. Or, $y'(t) = 2z(t)z'(t)$ s'annule toujours aux endroits où y s'annule. Les solutions sont donc en fait valables sur \mathbb{R} , mais peut-on effectuer des recollements (issus de valeurs différentes de la constante K ? En constatant que, lorsque K varie entre 0 et 1, $\sqrt{\frac{1-K}{K}}$ est bijective vers \mathbb{R}^{+*} (je vous le laisse en exercice), il existe une seule solution passant par chacun des deux points où notre solution s'annule. Ou plutôt non, il y en a deux, car la solution nulle convient également. On peut donc effectuer des recollements de ce genre : $y(t) = (K(1+t^2) - 1)^2$ sur $\left] -\infty; -\sqrt{\frac{1-K}{K}} \right]$, puis $y(t) = 0$ sur $\left[-\sqrt{\frac{1-K}{K}}; \sqrt{\frac{1-L}{L}} \right]$, et enfin $y(t) = (L(1+t^2) - 1)^2$ sur $\left[\sqrt{\frac{1-L}{L}}; \infty \right[$. On peut même ajouter à ce type de solutions la partie centrale (entre les deux valeurs d'annulation) de la solution $y(x) = (M(1+t^2) - 1)^2$ si $M > L$ et $M > K$.

Regardons tout cela sur un petit graphique. En noir la solution nulle, en rouge la solution pour $K = 1$ (donc constante égale à 1), en bleu $K = 1$ (celle qui s'annule uniquement en 0), en vert $K = 2$, en rose $K = -1$, en gris $K = 3$ (solutions ne s'annulant pas); en orange $K = \frac{1}{2}$, en marron $K = \frac{1}{4}$ et en violet $K = \frac{3}{4}$. On peut ainsi, comme décrit plus haut, construire une solution sur \mathbb{R} en prenant le morceau de gauche de la courbe marron (jusqu'à la valeur d'annulation négative), en mettant un petit bout de solution noire (donc égale à 0) jusqu'à atteindre le morceau central (entre les deux valeurs d'annulation) de la solution violette, on suit ce morceau central, on remet un peu de 0, et on finit avec le morceau de droite de la courbe orange. En jetant un oeil aux solutions qui ne s'annulent pas, on voit qu'il y a d'autres recollements possibles en 0. En effet, toutes les solutions ont une dérivée nulle en 0, et celles correspondant à des fonctions z prenant des valeurs opposées auront la même valeur en 0 (à cause du passage au carré). Pour chaque valeur de K supérieure à 1 correspondra une valeur de K négative pour lesquelles on pourra recoller en 0. Ainsi, par exemple, la fonction correspondant à $K = -1$ (courbe rose) sur \mathbb{R}^- et $K = 3$ (courbe grise) sur \mathbb{R}^+ est une solution définie sur \mathbb{R} de l'équation.



Exercice 5 (**)

Posons donc $z = \frac{1}{y}$, on a alors $y = \frac{1}{z}$, donc $y' = -\frac{z'}{z^2}$, ce qui nous donne l'équation $-\frac{3z'}{z^2} + \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$, soit en mettant tout au même dénominateur et en simplifiant par z : $3z' - 3z = 1$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme Ke^t , et la fonction constante égale à $-\frac{1}{3}$ est solution particulière évidente, donc $z(t) = Ke^t - \frac{1}{3}$. Ces fonctions ne s'annulent pas lorsque $K \leq 0$ (elles sont alors toujours négatives), ce qui donne des solutions définies sur \mathbb{R} pour l'équation initiale de la forme $y(t) = \frac{1}{Ke^t - \frac{1}{3}}$, où $K \in \mathbb{R}^-$. On pourrait s'intéresser au recollement des solutions qui s'annulent avec la solution nulle, mais comme ce n'est pas demandé, pourquoi se fatiguer ?

Exercice 6 (**)

En posant $u = \frac{y'}{y}$, on a $u' = \frac{y''y - y'^2}{y^2}$, donc l'équation devient $y^2(u' \sin^2(x) + 1) = 0$. La fonction y n'ayant pas trop le droit de s'annuler pour que notre changement de variable soit valable, on a $u'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\frac{\cos^2(x)}{\tan^2(x)}$, donc $u(x) = \frac{1}{\tan x} + K$ (vous pouvez ajouter cette primitive à votre tableau de primitives usuelles si vous le souhaitez). Revenons à notre changement de variable : $y' - uy = 0$, donc $y' - \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + K\right)y = 0$. L'équation est homogène, il suffit de trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + K$, on peut prendre $\ln|\sin(x)| + Kx$, et obtenir ainsi pour solutions de l'équation initiale les fonctions $y(x) = L|\sin(x)|e^{-Kx}$. Les plus courageux pourront se demander s'il y a des recollements possibles entre différentes valeurs des constantes K et L .

Exercice 7 (*)

On devrait reconnaître que la fonction y est la fonction tangente. Par la méthode d'Euler avec pas $\frac{1}{4}$, on a $y'(0) = 1$, donc la tangente en 0 a pour équation $y = x$, donc $y\left(\frac{1}{4}\right) \simeq \frac{1}{4}$, puis $y'\left(\frac{1}{4}\right) \simeq \frac{17}{16}$

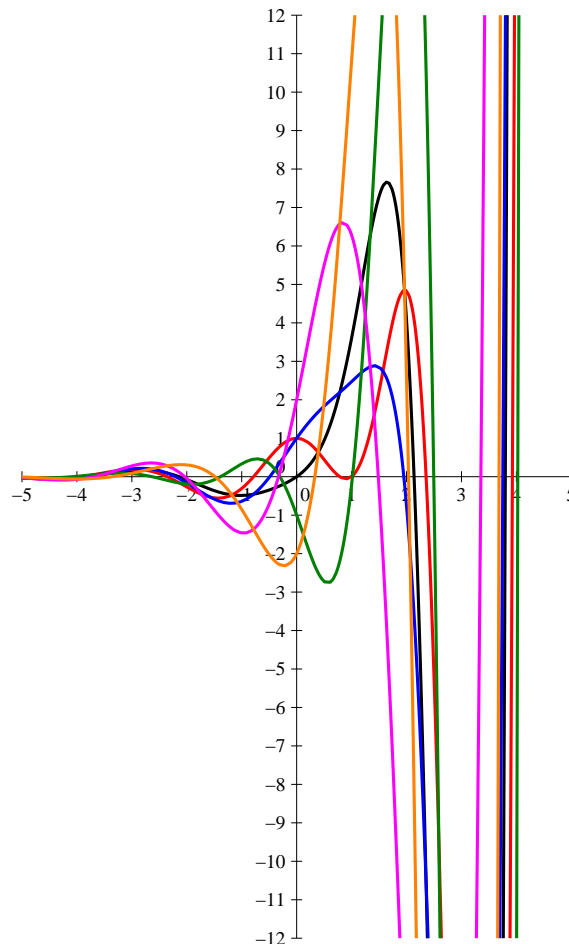
etc. En fait, en notant $u_k = f\left(\frac{k}{n}\right)$, en prenant comme pas $\frac{1}{n}$, on a $u_{k+1} = \frac{1}{n}(u_k^2 + 1) + u_k$ (c'est une conséquence de la forme de l'équation différentielle). Pour $n = 4$, on a donc $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{17}{16}$, $u_4 \simeq 1.255$. Pour $n = 10$, on a $u_1 = \frac{1}{10}$, $u_2 = \frac{201}{1000}$ puis $u_{10} \simeq 1.396$. Sachant que $\tan 1 \simeq 1.557$, les approximations ne sont pas vraiment extrêmement satisfaisantes.

Exercice 8 (* à ***)

1. L'équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$ ayant pour solution $2i$ et $-2i$, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y_h : x \mapsto A \cos(2x) + B \sin(2x)$. On cherche une solution particulière y_p de la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, on a donc $y_p'' = 2a$, et y_p est solution si $4ax^2 + 4bx + 4c + 2a = x^2 - x + 1$, soit $a = \frac{1}{4}$; $4b = -1$ donc $b = -\frac{1}{4}$; et $4c + 2a = 1$ donc $c = \frac{1}{8}$. On obtient finalement comme solutions de l'équation complète les fonctions $y(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x) + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$.
2. L'équation caractéristique $r^2 + r = 0$ a pour solution 0 et 1, les solutions homogènes sont donc de la forme $y(x) = A + Be^{-x}$ (c'est une fausse équation du second ordre, on a en fait une équation du premier ordre en y'), il faut chercher une solution particulière de la forme $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$, donc $y_p'(x) = (2ax + b + c)e^x$, et $y_p''(x) = (2a + 2bx + 2c + b)e^x$. Cette fonction est solution si, après simplification par e^x , $2ax^2 + (6a + 2b)x + 2a + 3b + 2c = 4x^2$, ce qui nous donne $a = 2$; $6a + 2b = 0$ donc $b = -6$; et $2a + 3b + 2c = 0$ donc $c = 7$. On a donc des solutions générales de la forme $y(x) = A + Be^{-x} + (2x^2 - 6x + 7)e^x$. Si on impose de plus $y(0) = A + B + 7 = e$ et $y'(0) = -B + 1 = 0$, on obtient $B = 1$ et $A = e - 8$, et la solution est bien unique.
3. L'équation homogène a pour équation caractéristique $r^2 + r + 2 = 0$, dont le discriminant est $\Delta = 1 - 8 = -7$, et les solutions $r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}$, et $r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2}$. Les solutions sont donc de la forme $y_h(x) = \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) \right) e^{-\frac{x}{2}}$. Pour la solution particulière, on va chercher sous la forme $y_p(x) = (ax + b)e^x$, donc $y_p'(x) = (ax + a + b)e^x$ et $y_p''(x) = (ax + 2a + b)e^x$, qui est solution si $4ax + 3a + 4b = 8x + 1$, soit $a = 2$ et $b = -\frac{5}{4}$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $y : x \mapsto \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{7}x}{2}\right) \right) e^{-\frac{x}{2}} + \left(2x - \frac{5}{4} \right) e^x$.
4. Ici, l'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ a pour solution -1 et 1 , donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $y_h : x \mapsto Ae^x + Be^{-x}$. Pour la solution particulière, utilisons le principe de superposition : comme $\sinh(x) = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$, on va chercher une solution particulière avec second membre $\frac{e^x}{2}$, puis $\frac{e^{-x}}{2}$. Dans les deux cas, l'exposant de l'exponentielle est racine de l'équation caractéristique, il faut donc prendre un polynôme de degré 1 en facteur. Posons donc $y_1(x) = (ax + b)e^x$, on a $y_1''(x) = (ax + 2a + b)e^x$, et y_1 est solution pour $\frac{e^x}{2}$ si $a = \frac{1}{4}$ (et on prend par exemple $b = 0$) donc $y_1(x) = \frac{1}{4}xe^x$. De même, on obtient $y_2(x) = -\frac{1}{4}xe^{-x}$, donc en faisant la différence des deux, une solution particulière de l'équation complète est $y_p : x \mapsto \frac{1}{2}x \cosh(x)$. Finalement, nos solutions de l'équation complète sont les fonctions

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{2}x \cosh(x).$$

5. L'équation caractéristique a pour racines évidentes $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme $Ae^t + Be^{2t}$. Il faut chercher y_p de la forme $(at^3 + bt^2 + ct + d)e^t$ (un peu de courage!), donc $y'_p(t) = (at^3 + (3a + b)t^2 + (2b + c)t + c + d)e^t$ et $y''_p(t) = (at^3 + (6a + b)t^2 + (6a + 4b + c)t + 2b + 2c + d)e^t$. Cette fonction est solution si $(a - 3a + 2a)t^3 + (6a + b - 9a - 3b + 2b)t^2 + (6a + 4b + c - 6b - 3c + 2c)t + 2b + 2c + d - 3c - 3d + 2d = -3t^2 + 10t - 7$, soit $-3at^2 + (6a - 2b)t + 2b - c = -3t^2 + 10t - 7$. On obtient $a = 1$; $6a - 2b = 10$ donc $b = -2$; et $2b - c = -7$ donc $c = 3$. Les solutions de l'équation complète sont de la forme $y(t) = (t^3 - 2t^2 + 3t + A)e^t + Be^{2t}$.
6. L'équation caractéristique $r^2 - 2r + 5$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 20 = (4i)^2$ et pour racines $r_1 = 1 + 2i$ et $r_2 = 1 - 2i$, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto (A \cos(2t) + B \sin(2t))e^t$. Pour la solution particulière, on va en chercher une de l'équation $y'' - 2y' + 5y = 4e^t e^{2it} = 4e^{(1+2i)t}$ sous la forme $y_p(t) = (at + b)e^{(1+2i)t}$. On a donc $y'_p(t) = ((a + 2ia)t + b + 2ib + a)e^{(1+2i)t}$ et $y''_p(t) = ((a + 4ia - 4a)t + b + 2ib + a + 2ib - 4b + 2ia + a + 2ia)e^{(1+2i)t}$. On a une solution si $(a + 4ia - 4a - 2a - 4ia + 5a)t - 3b + 4ib + 2a + 4ia - 2b - 4ib - 2a + 5b = 4$, soit $a = -i$ (quelle simplification spectaculaire!), donc une solution particulière est la fonction $y_p(t) = -ite^{(1+2i)t} = -ie^t(\cos(2t) + i\sin(2t))$. Pour obtenir une solution particulière de notre équation initiale, il suffit de prendre la partie imaginaire de la précédente : $\tilde{y}_p(t) = -t \cos(2t)e^t$. On obtient finalement pour solutions de l'équation complète $y(t) = ((A - t) \cos(2t) + B \sin(2t))e^t$. Je ne donne qu'un exemple de courbes intégrales pour cette dernière équation, avec deux constantes qui peuvent varier indépendamment, c'est beaucoup moins intéressant que dans le cas des équations du premier ordre, mais ça donne une vague idée des allures possibles :



Exercice 9 (**)

On pose donc $y(x) = z(\ln(x))$ (puisqu'on cherche des solutions sur \mathbb{R}^{+*} , c'est toujours possible), d'où $y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln(x))$ et $y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2}z''(\ln(x))$. L'équation devient alors $-z'(\ln(x)) + z''(\ln(x)) + 3z'(\ln(x)) + z(\ln(x)) = \frac{1}{x^2}$, soit en posant $t = \ln(x)$, $z'' + 2z' + z = e^{-2t}$. L'équation caractéristique associée $r^2 + 2r + 1 = 0$ a pour racine double -1 , donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme $z_h(t) = (A + Bt)e^{-t}$, et une solution particulière sera de la forme Ke^{-2t} , avec $4K - 4K + K = 1$, donc $K = 1$ convient, soit $z_p(t) = e^{-2t}$. On a donc comme solutions générales les fonctions $z(t) = (A + Bt)e^{-t} + e^{-2t}$, d'où on tire en remplaçant t par $\ln(x)$, $y(x) = \frac{A + B \ln x}{x} + \frac{1}{x^2}$. En imposant $y(1) = y'(1) = 0$, on a $A + 1 = -A + B - 2 = 0$, d'où $A = -1$ et $B = 1$. La seule fonction solution de ce problème est donc la fonction $x \mapsto \frac{x \ln x - x + 1}{x^2}$.

Exercice 10 (**)

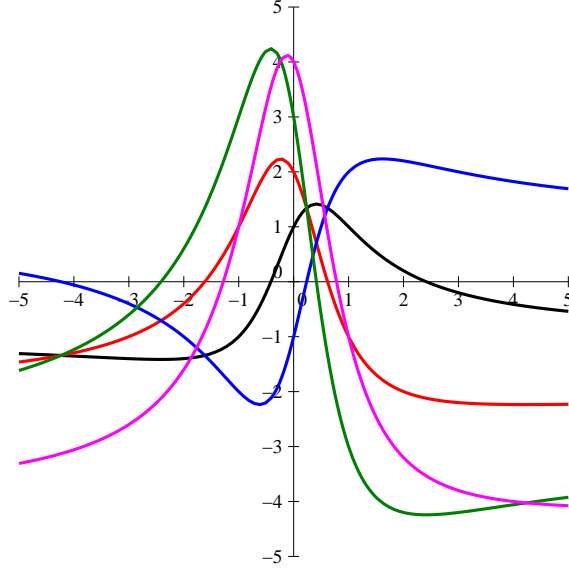
Faisons donc ce que l'énoncé nous conseille, en posant $y(t) = z(t)e^{-t^2}$ (on peut toujours puisque e^{-t^2} ne s'annule jamais), on a alors $y'(t) = (z'(t) - 2tz(t))e^{-t^2}$, puis $y''(t) = (z''(t) - 2z(t) - 2tz'(t))e^{-t^2} - 2t(z'(t) - 2tz(t))e^{-t^2} = (z''(t) - 4tz'(t) + (4t^2 - 2)z(t))e^{-t^2}$. L'équation initiale devient alors, en supprimant le e^{-t^2} en facteur de tous les termes (et qui ne s'annule jamais), $z'' - 4tz' + (4t^2 - 2)z + 4tz' - 8t^2z + (11 + 4t^2)z = 0$, soit $z'' + 9z = 0$. Voilà une équation plus sympathique, dont l'équation caractéristique $r^2 + 9 = 0$ a pour solutions $3i$ et $-3i$. Les solutions sont donc de la forme $A \cos(3t) + B \sin(3t)$, dont on déduit les solutions de l'équation initiale : $y(t) = (A \cos(3t) + \sin(3t))e^{-t^2}$.

Exercice 11 (***)

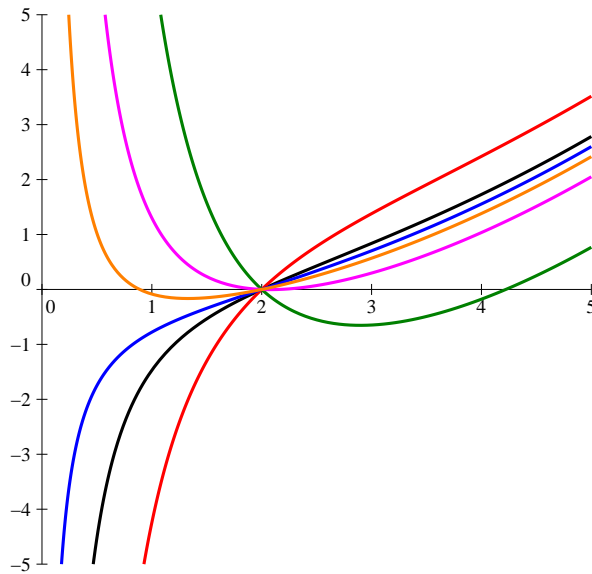
1. L'indication de l'énoncé suppose qu'on travaille sur \mathbb{R}^+ . De toute façon, la normalisation de l'équation obligera à enlever la valeur $x = 0$. Posons donc $y(x) = z(\sqrt{x})$, ce qui donne $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}z'(\sqrt{x})$, puis $y''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}z'(\sqrt{x}) + \frac{1}{4x}z''(\sqrt{x})$. L'équation initiale peut alors s'écrire $-\frac{1}{\sqrt{x}}z'(\sqrt{x}) + z''(\sqrt{x}) + \frac{1}{\sqrt{x}}z'(\sqrt{x}) - z(\sqrt{x}) = 0$, soit $z''(t) - z(t) = 0$. Cette équation homogène a coefficients constants a pour équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$, et les fonctions solutions sont donc $z : t \mapsto Ae^t + Be^{-t}$. On en déduit que $y(x) = Ae^{\sqrt{x}} + Be^{-\sqrt{x}}$.

Les plus courageux regarderont ce qui se passe sur \mathbb{R}^{-} , où on pose cette fois $t = -\sqrt{x}$ et on obtient par un calcul très similaire à celui effectué ci-dessus $z'' + z = 0$, ce qui donne alors $y(x) = C \cos(\sqrt{-x}) + D \sin(\sqrt{-x})$. Existe-t-il des solutions définies sur \mathbb{R} tout entier ? Oui, on peut recoller les deux types de solution quand $C = \frac{A+B}{2}$ (pour avoir la même valeur de y en 0), et $D = \frac{A-B}{2}$ (pour avoir la même dérivée en 0). En fait, on aura dans ce cas $y(x) = C \cosh(x) + D \sinh(x)$ sur $[0; +\infty[$.

2. On peut résoudre cette équation sur \mathbb{R} en posant $y(x) = z(\arctan(x))$, ce qui implique $y'(x) = \frac{1}{1+x^2}z'(\arctan(x))$ puis $y''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}z''(\arctan(x)) - \frac{2x}{(1+x^2)^2}z'(\arctan(x))$. En remplaçant dans l'équation initiale, $z''(\arctan(x)) - 2xz'(\arctan(x)) + 2xz'(\arctan(x)) + 4z(\arctan(x)) = 0$, soit $z''(t) + 4z(t) = 0$. On résout sans difficulté l'équation caractéristique $r^2 + 4 = 0$ (solutions $2i$ et $-2i$) pour prouver que $z(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t)$, donc $y(x) = A \cos(2 \arctan(x)) + B \sin(2 \arctan(x))$. Quelques exemples de courbes intégrales de cette équation (encore une fois, ça n'a pas grand intérêt) :



3. Faisons donc : $y(x) = z(\ln(x))$ implique $y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln(x))$ puis $y''(x) = \frac{1}{x^2}z''(\ln(x)) - \frac{1}{x^2}z'(\ln(x))$, donc en reportant dans l'équation initiale $z''(\ln(x)) - z'(\ln(x)) + 3z'(\ln(x)) + z(\ln(x)) = x^2$, soit $z''(t) + 2z'(t) + z(t) = e^{2t}$. L'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1$ admet -1 comme racine double donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $z_h : t \mapsto (A + Bt)e^{-t}$. On cherche une solution particulière sous la forme $z_p(t) = Ke^{2t}$. On aura alors $z'_p(t) = 2Ke^{2t}$, puis $z''(t) = 4Ke^{2t}$, donc on veut $4K + 4K + K = 1$, soit $K = \frac{1}{9}$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $z : t \mapsto (A + Bt)e^{-t} + \frac{1}{9}e^{2t}$. On retrouve alors $y(x) = \frac{A + B \ln(x)}{x} + \frac{1}{9}x^2$. Pour changer un peu, essayons de tracer les courbes intégrales correspondant aux solutions prenant une valeur particulière, par exemple $y(2) = 0$, ce qui implique $\frac{A + B \ln(2)}{2} + \frac{4}{9} = 0$, soit $A = -\frac{8}{9} - B \ln(2)$. On obtient ce genre de courbes :



Exercice 12 (***)

Comme $f'(x) = 2f(-x) + x$, f' est elle-même dérivable, donc f est deux fois dérivable. Dérivons donc l'équation, on obtient $f''(x) = -2f'(-x) + 1 = -2(2f(x) - x) + 1 = -4f(x) + 2x + 1$. La fonction f est donc solution de l'équation différentielle $f'' + 4f = 2x + 1$, qui se résout sans difficulté : les solutions homogènes sont de la forme $A \cos(2x) + B \sin(2x)$ et une solution particulière évidente est la fonction $x \mapsto \frac{2x+1}{4}$, donc $f(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$.

Exercice 13 (***)

Commençons par remarquer qu'en prenant $x = y = 0$, on a $2f(0) = 2f(0)^2$, donc $f(0)$ ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. Mais si $f(0) = 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, en prenant $y = 0$, $2f(x) = 0$, donc f est la fonction nulle. Pour la suite, on peut supposer que $f(0) = 1$. Fixons désormais y et dérivons par rapport à x , on obtient $f'(x+y) + f'(x-y) = 2f(y)f'(x)$, puis en dérivant à nouveau $f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(y)f''(x)$. De même, en dérivant deux fois par rapport à y , on obtient $f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$ (il y a deux changements de signe qui se compensent quand on dérive deux fois $f(x-y)$). Puisque le membre de gauche est le même dans les deux équations, on en déduit que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$, soit en posant $y = 0$, $f''(x) = Kf(x)$, avec $K = f''(0)$.

Si $K = 0$, les solutions possibles sont de la forme $f(x) = ax + b$, avec $b = 1$ puisque $f(0) = 1$. Pour vérifier l'équation fonctionnelle, on doit alors avoir $a(x+y) + 1 + a(x-y) + 1 = 2(ay+1)(ax+1)$, soit $2(ax+1) = 2(a^2xy + ax + ay + 1)$. Cette équation est vérifiée si $ax(ay+1) = 0$ quelles que soient les valeurs de x et y , ce qui impose manifestement $a = 0$. On trouve donc comme solution possible la fonction constante égale à 1.

Si $K > 0$, l'équation $f'' = Kf$ a pour équation caractéristique $r^2 - K = 0$, qui a deux solutions réelles $\pm\sqrt{K}$, f est alors de la forme $Ae^{Lx} + Be^{-Lx}$, où $L = \sqrt{K} > 0$. La condition $f(0) = 1$ impose $A + B = 1$, et l'équation fonctionnelle devient $Ae^{Lx+Ly} + Be^{-Lx-Ly} + Ae^{Lx-Ly} + Be^{-Lx+Ly} = 2(Ae^{Lx} + Be^{-Lx})(Ae^{Ly} + Be^{-Ly}) = 2(A^2e^{Lx+Ly} + ABe^{Lx-Ly} + ABe^{-Lx+Ly} + B^2e^{-Lx-Ly})$. Cela fonctionne bien si $2A^2 = A$, $2AB = A = B$ et $2B^2 = B$, ce qui donne $A = B = \frac{1}{2}$ (seule possibilité compatible avec $A + B = 1$). On obtient alors $f(x) = \frac{e^{Lx} + e^{-Lx}}{2} = \cosh(Lx) = \cosh(\sqrt{K}x)$.

Enfin, si $K < 0$, l'équation caractéristique a pour solutions $i\sqrt{-K}$ et $-i\sqrt{-K}$, donc en notant $L = \sqrt{-K}$, on aura $f(x) = A \cos(Lx) + B \sin(Lx)$. La condition $f(0) = 1$ impose immédiatement $A = 1$, puis l'équation devient, en posant par exemple $y = 0$, $2 \cos(x) + 2B \sin(x) = 2 \cos(x)$, ce qui impose assez clairement $B = 0$. On obtient une dernière famille de solutions de la forme $f(x) = \cos(Lx) = \cos(\sqrt{-K}x)$.