Feuille d'exercices n°4 : Équations différentielles

PTSI B Lycée Eiffel

19 octobre 2012

Exercice 1 (* à **)

Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant à chaque fois le ou les intervalles de résolution choisis :

1. $y' - 2y = \sinh(x) - 2x\cosh(x)$.
2. $ty' + y = \cos(t)$.
3. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^t}$.
4. $y' + y = (x^2 - 2x + 2)e^{2x}$.
5. $xy' \ln x - y = 3x^2 \ln^2 x$.
6. $y' + 2y = x^2$.
7. $y' + x^2 y + x^2 = 0$. Déterminer une solution vérifiant $y(0) = 0$.
8. $\sqrt{1-x^2}\,y' - y = 1$.
9. $2ty' + y = t^n$ $(n \in \mathbb{N})$.
10. $y' + y = \sin(x) + \sin(2x)$.
11. $y' - 3y = x^2 e^x + xe^{3x}$ en imposant de plus $y(0) = 1$.
12. $\cosh(x)y' - \sinh(x)y = \sinh^3(x)$.

Exercice 2 (*)

On cherche les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2 y' + xy = 1$. Commencer par résoudre cette équation sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Conclure.

Exercice 3 (**)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x) + 2\displaystyle\int_0^x e^{x-t} f(t)\ dt$.

Exercice 4 (**)

Résoudre l'équation différentielle $(1+t^2)y' = 4ty + 4t\sqrt{y}$ (on pourra poser $z = \sqrt{z}$ et chercher une équation différentielle plus ordinaire vérifiée par z). Cette équation différentielle est un cas particulier d'équation de Bernoulli.

Exercice 5 (**)

Déterminer les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant jamais et vérifiant $y' + 3y + y^2 = 0$ (on pourra poser $z = \dfrac{1}{y}$). Cette équation est un cas particulier d'équation de Ricatti.

Exercice 6 (**)

Résoudre l'équation différentielle $(yy'' - (y')^2)\sin^2 x + y^2 = 0$ (on pourra poser $u = \dfrac{y'}{y}$).

Exercice 7 (*)

On considère l'équation différentielle $y' = y^2 + 1$, avec comme condition initiale $y(0) = 0$. Déterminer une valeur approchée de $y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler avec pas $h = \dfrac{1}{4}$, puis $h = \dfrac{1}{10}$. Comparez avec la valeur exacte (si, si, vous la connaissez). Qu'en pensez-vous ?

Exercice 8 (* à ***)

Résoudre les équations différentielles du deuxième ordre suivantes :

1. $y'' + 4y = x^2 - x + 1$.
2. $y'' + y' = 4x^2 e^x$, avec $y(0) = e$ et $y'(0) = 0$.
3. $y'' + y' + 2y = (8x + 1)e^x$.
4. $y'' - y = \sinh(x)$.
5. $y'' - 3y' + 2y = (-3t^2 + 10t - 7)e^t$.
6. $y'' - 2y' + 5y = 4e^t \sin(2t)$.

Exercice 9 (**)

On considère l'équation $x^2 y'' + 3xy' + y = \dfrac{1}{x^2}$, qu'on chercher à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$. En posant $z(x) = y(e^x)$, déterminer une équation différentielle du second ordre à coefficients constants vérifiée par z. En déduire les solutions de l'équation initiale, et prouver qu'il en existe une seule vérifiant $y(1) = y'(1) = 0$. Ce type d'équation est appelé équation d'Euler.

Exercice 10 (**)

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4ty' + (11 + 4t^2)y = 0$ en posant $z(t) = e^{t^2} y(t)$.

Exercice 11 (***)

Résoudre les équations suivantes en effectuant le changement de variable proposé :

1. $4xy'' + 2y' - y = 0$ (on posera $t = \sqrt{x}$).
2. $(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + 4y = 0$ (on posera $t = \arctan(x)$).
3. $x^2 y'' + 3xy' + y = x^2$ (on posera $t = \ln(x)$ et on résoudra seulement sur $\mathbb{R}^{+*}$).

Exercice 12 (***)

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2f(-x) + x$.

Exercice 13 (***)

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) + f(x - y) = 2f(y)f(x)$ (utiliser une méthode proche de celle vue en cours pour la caractérisation des exponentielles, mais en dérivant deux fois).