Feuille d'exercices n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

8 janvier 2012

Exercice 1 (*)

- Commençons par constater que $|x| \leqslant 5 \Leftrightarrow -5 \leqslant x \leqslant 5$, donc $B = [-5; 5]$.
- Sans difficulté, $A \cup B = [4; 7] \cup [-5; 5] = [-5; 7]$.
- L'ensemble $A \cap C$ est constitué des nombres entiers naturels appartenant à A, donc $A \cap C = \{4; 5; 6; 7\}$.
- Un exemple élémentaire de complémentare, on fait attention au sens des crochets : $\mathbb{R}\backslash B = \mathbb{R}\backslash[-5; 5] =]-\infty; -5[\cup]5; +\infty[$.
- Pour déterminer $A \cap \overline{C}$, il faut enlever dans l'ensemble A tous les nombres qui appartiennent à C, c'est-à-dire qui sont des entiers naturels : $A \cap \overline{C} =]4; 5[\cup]5; 6[\cup]6; 7[$
- L'ensemble $(A \cup B) \cap C$ est contitué des entiers relatifs appartenant à $A \cup B$, ensemble calculé plus haut, donc $(A \cup B) \cap C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.
- $A \cup (B \cap C) = [4; 7] \cup \{0; 1; 2; 3\}$ (inutile d'inclure les entiers 4 et 5 dans le deuxième ensemble puisque ceux-ci sont déjà inclus dans le premier intervalle).
- $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C) = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap C) =]-\infty; -5[\cup]7; +\infty[\cup\{0; 1; 2; 3\}$ (inutile d'inclure une deuxième fois les entiers strictement plus grands que 7).

Exercice 2 (***)

1. Un petit dessin permet de se convaincre que les deux expressions correspondent effectivement au même ensemble. Pour une démonstration rigoureuse, le plus simple est de procéder par double inclusion. Considérons donc un élément x appartenant à $(A\backslash B) \cup (B\backslash A)$. On a donc deux possibilités : soit $x \in A$ et $x \notin B$; soit $x \in B$ et $x \notin A$. Dans les deux cas, x appartient à l'un des deux ensembles A ou B, donc $x \in A \cup B$, mais on sait aussi que x n'appartient pas à l'un des deux ensembles, donc il ne peut pas appartenir à leur intersection. Autrement dit, $x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$, et on a prouvé que $(A\backslash B) \cup (B\backslash A) \subset (A \cup B)\backslash(A \cap B)$. Faisons maintenant le raisonnement en sens inverse, en considérant un élément $y \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$. Comme $y \in A \cup B$, on a soit $y \in A$, soit $y \in B$. Dans le permier cas, y ne peut pas appartenir à B car il n'est pas dans $A \cap B$, donc $y \in A\backslash B$. De même, dans le deuxième cas, $y \in B\backslash A$. Dans tous les cas, $y \in (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$, ce qui prouve la deuxième inclusion. On a donc bien $(A \cup B)\backslash(A \cap B) = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

   Autre méthode, purement calculatoire, en utilisant le fait que $A\backslash B = A \cap \overline{B}$.
   On a donc $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})$. Or, $A \cup \overline{A} = \overline{B} \cup B = E$, on peut enlever ces deux ensembles de notre intersection ; et via les lois de Morgan, $\overline{B} \cup \overline{A} = \overline{B \cap A}$. Finalement, $A\Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.

2. Essayons donc d'écrire, à défaut de plus simplement, plus élémentairement, le membre de gauche : $(A\Delta B)\Delta C = ((A\Delta B) \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A\Delta B})$ (en utilisant la définition et en écrivant des intersections avec les complémentaires plutôt que des différences d'ensembles). On peut développer tout ça pour obtenir $(((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) \cap \overline{C}) \cup (C \cap (\overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{B \cap \overline{A}})) = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (C \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}))$. Dans le développement de la toute dernière

parenthèse, on peut enlever le $\overline{A} \cap A$ et le $B \cap \overline{B}$ pour obtenir enfin ceci : $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$. Vous allez me dire, s'il faut recommencer un même calcul pour le membre de droite de l'égalité qu'on essaye de prouver, on est pas encore sortis de l'auberge. En fait, inutile, le membre de droite peut aussi s'écrire $(B\Delta C)\Delta A$ (la commutativité est évidente au vu de la défintion), c'est-à-dire que par rapport au calcul que nous venons de faire, on remplace A par B, B par C et C par A. Faites-le dans l'expression obtenue à la fin, vous verrez qu'elle reste identique, seul l'ordre des quatre ensembles de la réunion étant changé. Ouf, l'égalité est donc vraie !

3. Faisons un simple calcul ensembliste : $A \cap (B\Delta C) = A \cap ((B\backslash C) \cup (C\backslash B)) = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$. Or, $(A \cap B)\Delta(A \cap C) = ((A \cap B)\backslash(A \cap C)) \cup ((A \cap C)\backslash(A \cap B)) = (A \cap B \cap \overline{A \cap C}) \cup (A \cap C \cap \overline{A \cap B}) = (A \cap B \cap (\overline{A} \cup \overline{C})) \cup (A \cap C \cap (\overline{A} \cup \overline{B}))$. on a utilisé les lois de Morgan pour la dernière égalité. On peut maintenant oublier dans chaque parenthèse le $\overline{A}$, puisque son intersection avec $A \cap B$ ou $A \cap C$ sera de toute façon vide. Il reste alors $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$, ce qui est bien la même chose que ce qu'on avait obtenu plus haut. L'égalité est donc vérifiée.
4. Prenons la deuxième expression de la différence symétrique : si $A\Delta B = \emptyset$, alors $(A \cup B)\backslash(A \cap B) = \emptyset$. cela ne peut se produire que si $A \cup B = A \cap B$ (il faut enlever tout le monde pour ne plus rien avoir au final). Or, quel que soit l'ensemble B, on a toujours $A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset A$. il faut donc avoir simultanément $A \cap B = A = A \cup B$ pour que $A \cup B$ et $A \cap B$ soient égaux. Dire que $A \cup B = A$ signifie qu'on n'ajoute personne en faisant l'union avec B, autrement dit que $B \subset A$. Au contraire, dire que $A = A \cap B$ signifie que tous les éléments de A appartiennent aussi à B (puisqu'ils sont dans $A \cap B$), donc que $A \subset B$. Conclusion, on a nécessairement $A \subset B$ et $B \subset A = A$. Le seul ensemble vérifiant $A\Delta B = \emptyset$ est donc l'ensemble A lui-même.
5. Même méthode : on a $(A \cup B)\backslash(A \cap B) = E$, donc on doit avoir $A \cup B = E$ (sinon on n'obtiendra pas tout le monde en enlevant les éléments de $A \cap B$) et $A \cap B = \emptyset$. Autrement dit, A et B sont disjoints et ont pour union l'ensemble E, ce n'est possible que si $B = \overline{A}$.
6. On doit avoir cette fois-ci $A\Delta B = X$, A et X étant fixés, c'est-à-dire $(A \cup B)\backslash(A \cap B) = X$. En particulier, $A \cup B$ doit inclure X, c'est-à-dire que $X \subset A \cup B$, ou encore $X\backslash A \subset B$ (tous les éléments qui sont dans X et ne sont pas dans A doivent nécessairement appartenir à B pour être dans $A \cup B$). De même, on aura $A\backslash X \subset B$. En utilisant les deux dernières inclusions obtenues, on a donc $A\Delta X \subset B$. Prenons désormais un élément dans B. S'il appartient aussi à A, alors il appartient à $A \cap B$, donc pas à X. Au contraire, s'il n'appartient pas à A, il appartient à $A \cup B$ (puisqu'il est dans B), mais pas à $A \cap B$, donc il est dans X. Autrement dit, il appartient soit à $A\backslash X$, soit à $X\backslash A$, et dans tous les cas à $A\Delta X$ qui est l'union de ces deux ensembles. Conclusion, $B \subset A\Delta X$, ce qui combiné au résultat obtenu précédemment, nous donne nécessairement $B = A\Delta X$. On vérifie facilement que cet ensemble B convient effectivement.

Exercice 3 (**)

- L'application f_1 est injective puisque, si n et p sont deux entiers naturels, $n+5 = p+5 \Rightarrow n = p$ (ce serait d'ailleurs tout aussi vrai avec des réels quelconques), mais pas surjective car 0 par exemple n'a pas d'antécédent par f_1 (si l'application était définie sur $\mathbb{R}$ ou même sur $\mathbb{R}$, 0 aurait évidemment pour antécédent -5, mais en tant qu'application de $\mathbb{N}$ dans lui-même, elle n'est pas surjective).
- L'application f_2 est injective : en effet, $n^2 = p^2 \Rightarrow n = p$ quand n et p sont positifs (si vous préférez, on peut dire qua l'application carré est injective sur $\mathbb{R}_+$, donc a fortiori sur $\mathbb{N}$. Par contre, elle n'est pas surjective, 2 par exemple n'ayant pas d'antécédent par f_2 (il aurait deux antécédents dans $\mathbb{R}$, à savoir $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, mais ces nombres ne sont pas vraiment entiers).
- L'application f_3 est un peu plus pénible à étudier que les autres mais elle est en fait bijective. Les entiers pairs sont envoyés sur les entiers impairs et veci-versa donc un entier pair ne peut pas

avoir la même image qu'un entier impair. Comme la restriction de f aux entiers pairs, et celle aux entiers impairs, sont facilement injectives, f_3 est injective. Elle est également surjective car si p est pair, $p+1$ est un antécédent de p, et si p est impair, c'est $p-1$ qui marche. En fait, on peut faire plus rapide en prouvant que f_3 est bijective et que sa réciproque est f_3 elle-même (on parle alors d'application **involutive**). En effet, si n est pair, $f_3(n) = n+1$ est un nombre impair, donc $f_3(f_3(n)) = f_3(n+1) = n+1-1 = n$. De même, si n est impair, $n-1$ est pair, donc $f_3(f_3(n)) = f_3(n-1) = n-1+1 = n$. Dans tous les cas, $f_3(f_3(n)) = n$, ce qui signifie bien que $f_3^{-1} = f_3$ (et au passage que f_3 est bijective).

- L'application f_4 n'est pas surjective car 1 et 2 ont par exemple la même image. Par contre, elle est surjective, $3p$ étant toujours un antécédent de p (il n'est pas très compliqué de constater que chaque entier a en fait trois antécédents par f_4, qui sont $3p$, $3p+1$ et $3p+2$).
- Cette dernière application n'est pas injective, 3 et 17 ayant par exemple la même image. Par contre, elle est surjective car $p+10$ est toujours un antécédent de p.

Exercice 4 (*)

1. On reconnait bien sûr la fonction tanh, dont on sait qu'elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$. Elle ne l'est par contre pas de E dans F, elle est injective mais pas surjective puisque les réels de valeur absolue plus grande que 1 n'ont pas d'antécédents par f.
2. La fonction g est évidemment définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = 3x^2+1$, strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc injective. De plus, le limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$ sont respectivement égales à $+\infty$ et $-\infty$ (ce sont les mêmes que celles de $x \mapsto x^3$), donc la fonction prend toutes les valeurs réelles. Autrement dit, g est surjective et injective, c'est-à-dire bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Commençons par déterminer l'ensemble de définition de h. Le trinôme $x^2 - x - 2$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$. Le trinôme étant positif à l'extérieur de ses racines, $\mathcal{D}_h = E$. Sur cet ensemble (ou presque, la fonction n'est pas dérivable en -1 ni en 2), h a pour dérivée $h'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$. Cette dérivée est du signe de $2x-1$, donc positive si $x \geqslant 2$ et négative si $x \leqslant -1$. La fonction h est donc décroissante sur $]-\infty;-1]$ et croissante sur $[2;+\infty[$. Les images de -1 et 2 par h sont toutes les deux nulles. Quant aux limites à l'infini, elles sont toutes les deux égales à $+\infty$ puisque le trinôme à l'intérieur de la racine tend vers $+\infty$ des deux côtés. La fonction h est donc surjective sur $\mathbb{R}_+$ (tous les réels positifs ont bien des antécédents pas la fonction), mais pas injective pusique par exemple $g(-1) = g(2) = 0$. En fait, tout réel positif a exactement deux antécédents par h, un dans l'intervalle $]-\infty;-1]$ et un autre dans l'intervalle $[2;+\infty[$.
4. La fonction i est bien dérivable sur l'ensemble E, et sa dérivée vaut $\dfrac{3(x-1)-(3x+2)}{(x-1)^2} = \dfrac{-5}{(x-1)^2}$. Cette dérivée est négative partout où elle existe, la fonction i est donc strictement décroissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$. On ne peut bien sûr PAS en déduire que i est injective sur E car celui-ci est constitué de deux intervalle disjoints. Calculons donc les limites de i. Du côté des infinis, on prend le quotient des termes de plus haut degré, ce qui donne pour limite 3 à chaque fois. En 1, le numérateur tend vers 5, et le dénominateur vers 0, en étant positif à droite et négatif à gauche de 1. Autrement dit, $\lim_{x\to 1^-} i(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 1^+} i(x) = +\infty$. Résumons tout ceci dans un beau tableau :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3

On peut constater que la fonction est injective puisqu'elle ne reprend jamais sur $]1;+\infty[$ une valeur déjà prise sur $]-\infty;1[$ (et qu'elle est injective sur chaque intervalle puisque strictement décroissante). Elle est également surjective sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, puisque tous les réels de l'intervalle $]-\infty;3[$ ont un antécédent dans $]-\infty;1[$, et tous les réels de l'intervalle $]3;+\infty[$ ont un antécédent dans $]1;+\infty[$. Conclusion, la fonction i réalise une bijection de E vers F.

Exercice 5 (***)

Supposons donc dans un premier temps que f est injective, et essayons de prouver qu'elle est surjective. Pour cela, prenons un élément $y \in E$ et essayons de lui trouver un antécédent. On sait par hypothèse que $f(f(f(y))) = f(y)$. Les deux éléments $f(f(y))$ et y ont donc la même image par f, ce qui implique, l'application étant injective, qu'ils sont égaux, c'est-à-dire que $f(f(y)) = y$. On vient de trouver un élément qui est un antécédent de y par f : c'est $f(y)$! En effet, $f(f(y)) = y$. L'application f est donc surjective.

Supposons désormais que l'application f est surjective, et essayons de prouver qu'elle est injective. pour cela, considérons deux éléments x et x' dans E qui ont la même image par f. Comme f est surjective, ces deux éléments ont des antécédents, que nous nommerons z et z', par f. on a donc $f(f(z)) = f(x) = f(x') = f(f(z'))$. De même, z et z' ont des antécédents w et w' par f, qui vérifieront cette fois-ci $f(f(f(w))) = f(f(f(w')))$. mais, d'après l'énoncé, $f(f(f(w))) = f(w)$ et $f(f(f(w'))) = f(w')$. On en déduit donc que $f(w) = f(w')$, c'est-à-dire que $z = z'$. Mais alors on a certainement $f(z) = f(z')$, soit $x = x'$. On a bien prouvé l'injectivité de l'application.

Dans le cas où f est bijective, on peut composer la relation initiale par f^{-1} pour obtenir $f^{-1} \circ f \circ f \circ f = f^{-1} \circ f$, c'est-à-dire $f \circ f = id_E$. Cela signifie que f est alors sa propre réciproque (ce qui découle aussi du calcul effectué dans la première partie de la démonstration, où l'antécédent trouvé pour y n'est autre que son image par f).

Exercice 6 (** à *****)

1. Une application fort simple suffit à notre bonheur, celle qui à un entier naturel n associe son double $2n$. Il est assez évident que f est à valeurs dans l'ensemble des entiers pairs, qu'elle est injective et surjective vers cet ensemble, donc bijective.
2. Si vous avez bien compris le cas précédent, celui-ci parait relativement naturel, mais l'application est un peu plus difficile à construire. L'idée est, par exemple, d'envoyer les naturels pairs sur les entiers positifs, et les impairs sur les négatifs. Une façon de le faire est de poser $f(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair, et $f(n) = -\frac{n+1}{2}$ si n est impair. Si n est pair, $f(n) \geqslant 0$, et si n est impair, $f(n) < 0$. Comme par ailleurs, $\frac{n}{2} = \frac{p}{2} \Rightarrow n = p$, et $-\frac{n+1}{2} = -\frac{p+1}{2} \Rightarrow n = p$, l'application f est injective. Ne reste plus qu'à prouver qu'elle est surjective : soit $p \in \mathbb{Z}$, si $p \geqslant 0$, $2p$ est un antécédent de p ; si $p < 0$, $-2p-1$ est un antécédent de p. Finalement, f est bien bijective.
3. Ça se complique de plus en plus, alors plutôt que de vous donner une formule affreuse pour la bijection, je vais expliquer comment ça marche et j'espère que vous serez convaincus. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ peut être représenté sous forme d'un tableau à deux dimensions, et donner une bijection de $\mathbb{N}$ vers ce tableau revient en fait à numéroter les éléments de ce tableau (à partir de 0) en

essayant de ne pas en oublier au passage. L'idée est de faire cette numérotation diagonale par diagonale : on pose $f(0) = (0;0)$, puis $f(1) = (0;1)$ et $f(2) = (1;0)$ (première diagonale), puis $f(3) = (0;2)$, $f(4) = (1;1)$ et $f(5) = (2;0)$ etc. Le couple $(p;q)$ se trouve sur la diagonale numéro $p+q$, il est même le $(p+1)$ème élément de la diagonale avec la numérotation choisie, et on a déjà numéroté $1 + 2 + \cdots + (p+q)$ éléments sur les diagonales précédentes, soit $\dfrac{(p+q)(p+q+1)}{2}$ éléments. Autrement dit, on a $f(n) = (p;q)$ pour $n = \dfrac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p$ (on commence à numéroter à 0, ce qui explique qu'on ajoute p et pas $p+1$ à la fin). On a donc décrit la réciproque de la bijection f (je laisse les plus courageux vérifier que c'est bien une bijection).

4. En fait, l'idée est la même que pour $\mathbb{N}^2$ puisque $\mathbb{Q}$ est « plus petit » que $\mathbb{N}^2$: on peut toujours représenter un rationnel par un couple d'entiers (le numérateur et le dénominateur de la fraction) sauf qu'on impose en plus que la fraction en question ne soit pas simplifiable. Il suffit donc de reprendre le principe de la numérotation précédente, mais en sautant tous les couples correspondant à des fractions déjà numérotées (ainsi, on attribuera un numéro au couple $(1;1)$ mais pas au couple $(2;2)$, ni à $(3;3)$ etc.). Trouver une formule explicite pour cette bijection est impossible, et justifier correctement que ça fonctionne bien est délicat. On se contentera donc de constater que trouver une application injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}^2$ est facile (on associe à tout élément de $\mathbb{Q}$, mis sous forme irréductible, le numérateur et le dénominateur de la fraction), et qu'en composant cette application avec les bijections déjà construites de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{N}^2$ et de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, on aura une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$, ce qui est suffisant d'après le théorème de Cantor-Bernstein démontré à l'exercice suivant.
5. Pour le fait que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, il faut passer par un raisonnement par l'absurde. Supposons donc qu'il existe une bijection f qui « numérote » tous les réels. Un réel peut s'écrire sous forme décimale, avec éventuellement une infinité de chiffres après la virgule (cette écriture pose en fait quelques problèmes théoriques que nous allons passer sous silence). Notons donc x_1 l'image de 0 par f, qui sera donc pour nous un nombre décimal, x_2 l'image de 1, x_3 l'image de 2 etc. Construisons désormais un nouveau nombre décimal x de la façon suivante : $x = 0,\dots$, en choisissant comme première décimale un chiffre différent de la première décimale de x_1 (on peut certainement, puisqu'il y a 10 chiffres possibles pour chaque décimale !), comme deuxième décimale un chiffre différent de la deuxième décimale de x_2, comme troisième décimale un chiffre différent de la troisième décimale de x_3 etc. Un tel nombre x est certainement différent de x_1 (ils ont au moins une décimale différente), de x_2, x_3, et de tous les x_i. Conclusion, ce nombre x n'a pas d'antécédent par f (il n'apparait nulle part dans notre liste numérotée), qui ne peut donc pas être surjective, et encore moins bijective, ce qui est absurde ! Cet argument est connu sous le nom de « diagonale de Cantor ».
6. On a vu à l'exercice 7 une bijection tanh de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$. Il suffit de poser $g(x) = \dfrac{1+f(x)}{2}$ pour obtenir une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$ (je vous laisse comprendre pourquoi).
7. Dessinez un demi-cercle sur une feuille, une droite un peu en-dessous, et placez le centre O du demi-cercle. On considère ensuite l'application suivante : à un point P du demi-cercle, on associe le point de la droite qui est sur la droite (OP). Il n'est pas très dur de se convaincre que cette application est bijective (en excluant les deux points extrêmes du demi-cercle).

Exercice 7 : théorème de Cantor-Bernstein (****)

Il y avait de graves confusions dans les ensembles dans l'énoncé de cet exercice (pourtant repompé sur un camarade censé être fiable, on se demande où va le monde, ma bonne dame). Pour ceux qui voudraient tenter de faire cet exercice, apportez donc les modifications suivantes :

- les notations et les question 1 et 2 peuvent être inchangées.
- dans la question 3, on ne touche pas aux définitions de B et de C, ni au premier morceau de la question. On prouve par contre ensuite que tout élément de B (et pas de C) possède un

unique antécédent par g, qui **appartient** à A (c'est le contraire dans l'énoncé).

- Il faut alors inverser les deux définitions de h dans la dernière question : $h(x) = g^{-1}(x)$ si $x \in B$, et $h(x) = f(x)$ si $x \in C$.

Avec ces corrections, on peut donc donner la correction (de l'exercice cette fois-ci) suivante :

1. Procédonc par l'absurde et supposons qu'un élément y (on est dans l'ensemble Y) appartienne à la fois à A_i et à A_j, pour des valeurs distinctes de i et de j (par exemple $i < j$). Si $i = 0$, $y \in Y \backslash f(X)$, donc $Y \notin f(X)$. Or, si ce même y appartient à $A_j = \varphi(A_{j-1})$ (puisque $j > 0$), on a donc $y \in f \circ g(A_{i-1})$, qui est certainement inclus dans $f(X)$. Ce n'est pas possible. Le cas général est similaire : on a d'un côté $y \in A_i$, donc $y = \varphi^i(\alpha)$, avec $\alpha \in A_0$ (par construction des ensembles A_i), et d'autre part $y = \varphi^j(\beta)$, avec $\beta \in A_0$ également. Mais alors $\varphi^i(\varphi^{j-i}(\beta)) = y = \varphi^i(\alpha)$. Or, l'application φ est injective (c'est la composée de deux injections) donc φ^i aussi. On peut alors affirmer que $\alpha = \varphi^{j-i}(\beta)$, ou si l'on préfère que $\alpha \in A_0 \cap A_{j-i}$. D'après ce qui précède, c'est impossible. Les ensembles sont donc tous disjoints.
2. Soit $y \in A$, il existe donc un entier n pour lequel $y \in A_n$, alors $\varphi(y) \in A_{n+1} \subset A$, donc $\varphi(A) \subset A$.
3. Comme $f(B) = \varphi(A)$, $f(B) \subset A$ d'après ce qui précède. Par ailleurs, $g(A_i) \subset B$, donc $\varphi(A_i) \subset f(B)$, soit $A_{i+1} \subset B$. Cela signifie que tous les ensembles A_i à l'exception de A_0 sont inclus dans $f(B)$, qui contient donc $A \backslash A_0$. Reste à prouver qu'un élément de A_0 ne peut pas appartenir à $f(B)$. C'est en fait évident pusique dans le cas contraire il serait dans $f(X)$. On a bien $f(B) = 1 \backslash A_0$.

   Par construction, tout élément de B est image d'un élément de A par g, la fin de la question modifiée est donc triviale (l'unicité découlant de l'injectivité de g).
4. L'application h est bien définie. Sa restriction à B est injective par construction (si $g^{-1}(x) = g^{-1}(x')$, alors $x = x'$ en appliquant g). Sa restriction à C est également injective puisqu'elle coïncide avec f. Reste à vérifier qu'un élément x de B et un élément x' de C ne peuvent pas avoir la même image par h. En effet, $h(x) = g^{-1}(x) \in A$ d'après la question précédente, et $h(x') = f(x') \notin A$ puisque A est le complémentaire de $f(X)$ dans Y. L'application h est donc injective. Elle est également surjective : tout élément y de A admet un antécédent dans B (il s'agit de $g(y)$), et tout élément y' dans $Y \backslash A$ appartient par définition à $f(X)$ donc admet un antécédent x par f dans X. Cet antécédent ne peut appartenir à B puisque $f(B) \subset A$, il appartient donc à C et constitue un antécédent de y' par h. Finalement, l'application h est bijective de X dans Y.

Exercice 8 (* à **)

1. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $2^n \leqslant n!$. Puisque l'énoncé nous indique que n doit être plus grand que 4, initialisons pour $n = 4$: on a alors $2^4 = 16$ et $4! = 24$, donc l'inégalité est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée, c'est-à-dire que $2^n \leqslant n!$. On peut alors en déduire que $2^{n+1} \leqslant 2n! \leqslant (n+1)n! = (n+1)!$ puisque 2 est certainement inférieur à $n+1$ quand n est plus grand que 4. La propriété P_{n+1} est donc vraie, et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 4.
2. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$. Pour $n = 0$, la propriété P_0 stipule que $(1+x)^0 \geqslant 1$, ce qui est vrai puisque $(1+x)^0 = 1$. Supposons désormais l'inégalité vérifiée au rang n, on a alors $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx)$ par hypothèse de récurrence. Or, $(1+x)(1+nx) = 1 + x + nx + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x$ puisque nx^2 est toujours un nombre positif. On en déduit que $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x$, ce qui est la propriété P_{n+1}. La propriété P_n est donc vraie pour tout entier n. On peut remarquer que cette propriété est très facile à prouver sans récurrence, à l'aide de la formule du binôme : $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k =$

$1+nx+\sum_{k=2}^{k=n}\binom{n}{k}x^k \geqslant 1+nx$ (on vérifie à la main les cas $n=0$ et $n=1$).

3. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $\sum_{k=1}^{k=n} k\times k! = (n+1)!-1$. Pour $n=1$, $\sum_{k=1}^{k=1} k\times k! = 1\times 1! = 1$ et $2!-1=2-1=1$, donc P_1 est vraie. Supposons désormais P_n vraie pour un certain entier n, on a alors $\sum_{k=1}^{k=n+1} k\times k! = \sum_{k=1}^{k=n} k\times k! + (n+1)(n+1)! = (n+1)!-1+(n+1)(n+1)! = (n+1)!(1+n+1)-1 = (n+2)!-1$, donc P_{n+1} est vérifiée et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
4. Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : « Un polygone à n côtés a $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales ». Le premier polygone à avoir des diagonales est le carré (ce qui correspond à $n=4$), qui a deux diagonales. Comme $\frac{4\times 1}{2}=2$, la propriété P_4 est donc vraie. Supposons maintenant la propriété vraie au rang n, et essayons de la prouver au rang $n+1$. Partons donc d'un polygone à n côtés, et rajoutons un sommet entre deux sommets de ce polygone pour obtenir un polygone à $n+1$ côtés. Ce faisant, on crée $n-1$ nouvelles diagonales : $n-2$ reliant le nouveau sommet à tous les anciens, en excluant les deux sommets qui se trouvent à côté de lui ; et une dernière reliant les deux sommets voisins du nouveau sommet (qui étaient auparavant reliés par un côté du polygone, et le sont désormais par une diagonale). Le nombre de diagonales de notre nouveau polygone vaut donc $n-1+\frac{n(n-3)}{2}$ (ce deuxième terme issu de l'hypothèse de récurrence) $=\frac{2n-2+n^2-3n}{2}=\frac{n^2-n-2}{2}=\frac{(n+1)(n-2)}{2}$, ce qui prouve la propriété P_{n+1} et permet de conclure la récurrence.
5. Prouvons donc par récurrence la propriété P_n : $f^{(n)}(x)=(-1)^n(x-n-1)e^{-x}$. Pour $n=0$, la propriété P_0 stipule que $f^{(0)}(x)=(x-1)e^{-x}$, ce qui est vrai. Supposons donc la propriété P_n vérifiée, alors $f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)})'(x)=(-1)^n e^{-x}-(-1)^n(x-n-1)e^{-x}=((-1)^{n+1}(x-n-1)+(-1)^n)e^{-x}=(-1)^{n+1}(x-n-1-1)e^{-x}=(-1)^{n+1}(x-(n+1)-1)e^{-x}$, ce qui prouve P_{n+1}. La formule est donc vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 9 (**)

On calcule $u_3=3\times 2-3\times 0+0=6$, $u_4=3\times 6-3\times 2+0=12$, $u_5=3\times 12-3\times 6+2=20$, $u_6=3\times 20-3\times 12+6=30$, et même avec un peu de motivation $u_7=3\times 30-3\times 20+12=42$. Si on est suffisamment réveillés, on arrive à conjecturer que $u_n=n(n-1)$ (chaque terme est le produit de l'indice par l'entier le précédent). Prouvons donc par récurrence **triple** la propriété P_n : $u_n=n(n-1)$. Il faut initialiser en vérifiant P_0, P_1 et P_2, ce qui ne pose aucun problème puisqu'on a de quoi vérifier jusqu'à P_7 grâce aux calculs précédents. Supposons désormais P_n, P_{n+1} et P_{n+2} vérifiées, on a alors $u_{n+3}=3u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n=3(n+2)(n+1)-3(n+1)n+(n-1)n=3(n^2+3n+2)-3(n^2+n)+n^2-n=3n^2+9n+6-3n^2-3n+n^2-n=n^2+5n+6=(n+3)(n+2)$, ce qui prouve P_{n+3}, et par principe de récurrence triple, P_n est vraie pour tout entier n.

Exercice 10 (*)

1. $S_1=\sum_{i=3}^{i=12} 2^i$
2. $S_2=\sum_{i=1}^{i=10}\frac{i}{2^i}$

3. $S_3 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{a^k}{k}$
4. $S_4 = \sum_{i=1}^{i=25} -2i(-1)^i$

Exercice 11 (**)

1. $\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1)+n = n(n+2)$
2. $\sum_{k=807}^{k=2012} 3 = 3 \times 1\ 206 = 3\ 618$
3. $\sum_{k=1}^{k=n}(6k^2+4k+1) = 6\sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n$
   $= n((n+1)(2n+1)+2(n+1)+1) = n(2n^2+5n+4)$
4. $\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k = \sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^{k+1} = -\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \frac{(-1)^n-1}{2}$
5. $\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2-1) = 2\sum_{k=1}^{k=n} k^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n(n+1)-1)}{2}$
   $= \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$
6. $\sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{k=18}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{k=18}\left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 = \frac{1-\frac{1}{3^{19}}}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{19}}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{18}}\right)$
7. $\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k} = \sum_{k=1}^{k=n} 9^k = \sum_{k=0}^{k=n} 9^k - 1 = \frac{1-9^{n+1}}{1-9} - 1 = \frac{9^{n+1}-1}{8} - 1 = \frac{9^{n+1}-9}{8}$
8. $\sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2 = \sum_{k=1}^{k=n} 2^k + \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + \sum_{k=1}^{k=n} 2 = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k - 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n$
   $= 2^{n+1} - 2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 2(2^n+n-1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
9. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

Exercice 12 (**)

1. $S_n = 1+3+5+\cdots+2n+1$. Cette somme est constituée de $n+1$ termes.
2. $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3+12k^2+6k+1 = 8\sum_{k=0}^{k=n} k^3 + 12\sum_{k=0}^{k=n} k^2 + 6\sum_{k=0}^{k=n} k + \sum_{k=0}^{k=n} 1 = 2n^2(n+1)^2+2n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)+n+1 = (n+1)(2n^2(n+1)+2n(2n+1)+3n+1) = (n+1)(2n^3+6n^2+5n+1)$.
3. $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3 = \sum_{k \text{ pair}}^{k\leqslant 2n} k^3 + \sum_{k \text{ impair}}^{k\leqslant 2n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{k=n}(2k)^3 + \sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^3 = T_n + S_n$.

4. On a $U_n = \sum_{k=0}^{k=n} k^3 = \dfrac{(2n+1)^2(2n+2)^2}{4} = (n+1)^2(2n+1)^2$ en utilisant la formule du cours pour la somme des cubes. De même, $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3 = \sum_{k=0}^{k=n} 8k^3 = 8 \times \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = 2n^2(n+1)^2$.
5. Comme $S_n = U_n - T_n$, on a donc $S_n = (n+1)^2(2n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2 = (n+1)^2((2n+1)^2 - 2n^2) = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$. Notons que cette formule est bien la même que la précédente puisque $(n+1)(2n^2+4n+1) = 2n^3+2n^2+4n^2+4n+n+1 = 2n^3+6n^2+5n+1$.
6. Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : \sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$. Pour $n = 0$, on obtient $P_0 : \sum_{k=0}^{k=0}(2k+1)^3 = 1^2 \times 1 = 1$, ce qui est vrai. Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $\sum_{k=0}^{k=n+1}(2k+1)^3 = \sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^3 + (2(n+1)+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1) + (2n+3)^3 = (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1)+8n^3+36n^2+54n+27 = 2n^4+4n^3+n^2+4n^3+8n^2+2n+2n^2+4n+1+8n^3+36n^2+54n+27 = 2n^4+16n^3+47n^2+60n+28$. Ne reste plus qu'à vérifier que ça correspond à la formule annoncée : on devrait obtenir $(n+2)^2(2(n+1)^2+4(n+1)+1) = (n^2+4n+4)(2n^2+8n+7) = 2n^4+8n^3+7n^2+8n^3+32n^2+28n+8n^2+32n+28 = 2n^4+16n^3+47n^2+60n+28$. Ca marche, donc P_{n+1} est vérifiée, et par principe de récurrence, toutes les propriétés P_n sont vraies.

Exercice 13 (**)

- $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij = \sum_{i=1}^{i=n} i \sum_{j=1}^{j=n} j = \sum_{i=1}^{i=n} i \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij = \sum_{j=1}^{j=n} j \sum_{i=1}^{i=j} i = \sum_{j=1}^{j=n} j \dfrac{j(j+1)}{2} = \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=n} j^3 + j^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{8} + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \dfrac{n(n+1)(3n^2+3n+4n+2)}{24} = \dfrac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24} = \dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$.
- $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \dfrac{i}{j} = \sum_{j=1}^{j=n} \dfrac{1}{j} \sum_{i=1}^{i=j} i = \sum_{j=1}^{j=n} \dfrac{1}{j} \times \dfrac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{j=n} \dfrac{j+1}{2} = \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=n} j+1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n(n+1)}{2} + n\right) = \dfrac{n(n+3)}{2}$.
- $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j| = \sum_{j=1}^{j=n}(\sum_{i=1}^{i=j}(j-i) + \sum_{i=j+1}^{i=n}(i-j)) = \sum_{j=1}^{j=n}(j^2 - \dfrac{j(j+1)}{2} + \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{j(j+1)}{2} - (n-j)j) = \sum_{j=1}^{j=n}\left(j^2 - (n+1)j + \dfrac{n(n+1)}{2}\right) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{n(n+1)^2}{2} + \dfrac{n^2(n+1)}{2}$
$= \dfrac{n(n+1)}{2}\left(\dfrac{2n+1}{3} - (n+1) + n\right) = \dfrac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$
- $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i2^j = \sum_{i=1}^{i=n} i \sum_{j=1}^{j=n} 2^j = \dfrac{n(n+1)}{2} \times (\sum_{j=0}^{j=n} 2^j - 1) = \dfrac{n(n+1)}{2} \times (2^{n+1}-1-1) = n(n+1)(2^n-1)$

Exercice 14 (*)

Il y a au total $\binom{21}{5}$ tirages possibles.

- Il y a 17 atouts qui ne sont pas multiples de 5, donc $\binom{17}{5}$ tirages qui ne contiennent aucun multiple de 5. Par passage au complémentaire, il reste donc $\binom{21}{5} - \binom{17}{5}$ tirages avec au moins un multiple de 5.
- Un multiple de cinq et un de trois : il faut distinguer le cas où on tire le 15 (qui est le seul multiple de cinq et de trois à la fois) et celui où les deux multiples sont différents. Sachant qu'il y a onze atouts qui ne sont multiples ni de cinq ni de trois, on a $\binom{11}{4} + \binom{6}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{11}{3}$ tirages possibles.
- Ni le 1 ni le 21 : par passage au complémentaire, $\binom{21}{5} - \binom{19}{5}$ tirages.

Exercice 15 (*)

1. On a assez simplement $|A \backslash B| = |A| - |A \cap B| = 112 - 67 = 45$.
2. Il suffit de faire une somme : $|C| = |A \cap C| + |(B \cap C) \backslash A| + |C \backslash (A \cup B)| = 32 + 5 + 56 = 93$.
3. Ceux qui ont voté pour au moins l'un des trois sont au nombre de $|A \cup B \cup C| = |A| + |B \backslash A| + |C \backslash (A \cup B)| = 112 + 22 + 56 = 190$. Il en reste donc 10 qui n'ont voté pour aucun des trois.
4. $A \backslash (B \cup C) = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 112 - 67 - 32 + 12 = 25$.

Exercice 16 (* à ***)

- Aucune condition : $\binom{32}{5} = 201\ 376$ tirages.
- Deux Rois : $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 19\ 656$ (on choisit deux cartes parmi les quatre Rois et trois parmi les 28 cartes ne sont pas des Rois).
- Au moins un pique : par passage au complémentaire, $\binom{32}{5} - \binom{24}{5} = 158\ 872$
- Un As et deux carreaux : il faut distinguer le cas de l'As de carreau, ce qui fait $\binom{7}{1} \times \binom{21}{3}$ (l'As de carreau ; un autre carreau parmi les sept restants ; et trois cartes parmi les 21 qui ne sont ni des carreaux ni des As) $+\binom{3}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{2}$ (un As qui n'est pas un carreau, deux carreaux qui ne sont pas des As, et trois autres cartes qui ne sont ni des carreaux ni des As), soit 22 540 tirages.
- Pas de carte en-dessous du 9 : $\binom{24}{5} = 42\ 504$ tirages (il y a 24 cartes au-dessus du 9).
- Deux paires : il faut choisir les hauteurs des deux paires (parmi huit possibles), puis les couleurs des deux cartes pour chaque paire, et enfin la dernière carte, soit $\binom{8}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{24}{1} = 24\ 192$ tirages.
- Cinq cartes de la même couleur : 4 choix pour la couleur, puis 5 cartes à choisir parmi les 8 de la couleur, soit $4 \times \binom{8}{5} = 224$ tirages possibles.
- Quinte flush : 16 tirages (là, on peut compter à la main).

Exercice 17 (*)

Du calcul brutal utilisant bien entendu la formule du binôme de Newton : $(x-3)^5 = x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$; $(2x+3y)^3 = 8x^3 + 36xy^2 + 54xy^2 + 27y^3$ et $(x-1)^7 = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$.

Exercice 18 (*)

1. On a k cases à noircir sur un total de np, donc $\binom{np}{k}$ grilles possibles.
2. Il reste $k-4$ cases à noircir parmi $np-4$, donc $\binom{np-4}{k-4}$ (naturellement, on doit avoir $k \geqslant 4$).
3. Il faut choisir les deux coins, puis noircir $k-2$ cases parmi les $np-4$ qui ne sont pas des coins, donc $\binom{4}{2} \times \binom{np-4}{k-2}$ possibilités.
4. Cela suppose que $k \leqslant n$. Il faut alors choisir les k lignes contenant une case parmi les n possibles, puis il reste pour chacune de ces lignes p choix pour la case à noircir, donc $\binom{n}{k} \times p^k$ grilles possibles.
5. La grille a donc n lignes et n colonnes, et on cherche à noircir une case par ligne, sans en mettre deux dans la même colonne. Il y a n choix possibles pour la case à noircir sur la première ligne, $n-1$ choix pour la case de la deuxième ligne (il ne faut pas la mettre dans la même colonne que la première), $n-2$ pour la troisième etc. Quand on arrive à la dernière ligne, on n'a plus le choix pour la dernière case à noircir (il ne reste qu'une seule colonne vierge). On a donc $n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$ grilles possibles.
6. On aurait 9! choix s'il n'y avait pas la condition supplémentaire sur les petits carrés. Le mieux est de recommencer une raisonnement similaire à celui de la question précédente :
   - il y a 9 possibilités pour le 1 de la première ligne.
   - il y a seulement 6 possibilités ensuite pour le 1 de la deuxième ligne (trois cases à éviter qui sont dans le même petit carré que le premier 1).
   - plus que 3 possibilités pour la troisième ligne (un seul petit carré vierge en haut de la grille).
   - à nouveau 6 possibilités pour la quatrième ligne (plus de problème de petit carré, mais tout de même trois colonnes à éviter).
   - 4 pour la cinquième ligne (deux colonnes libres dans deux petits carrés).
   - 2 pour la sixième (deux colonnes dans le dernier petit carré médian).
   - 3 sur la septième ligne (plus que trois colonnes libres).
   - 2 et 1 pour les deux dernières.

   Soit $9 \times 6 \times 3 \times 6 \times 4 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 46\ 656$ façons de placer les 1.
7. Au total, il y a $\binom{81}{9}$ façons de placer neuf 1 dans une grille de 81 cases, soit 260 887 834 350 possibilités. La proportion de placements « Sudoku-compatibles » est donc extrêmement faible !