Feuille d'exercices n°8 : Ensembles

PTSI B Lycée Eiffel

14 décembre 2012

Exercice 1 (*)

On se place dans $\mathbb{R}$ et on considère les ensembles $A = [4;7]$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqslant 5\}$, et $C = \mathbb{N}$. Donner l'expression la plus simple possible pour chacun des ensembles suivants : $A \cup B$; $A \cap C$; $\mathbb{R} \backslash B$; $A \cap \overline{C}$; $(A \cup B) \cap C$; $A \cup (B \cap C)$; $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C)$.

Exercice 2 (***)

Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E. On appelle différénce symétrique de A et de B l'ensemble noté $A \Delta B$ et défini par $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

1. Montrer qu'on a également $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
2. Montrer que la différence symétrique est associative (c'est-à-dire que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$).
3. Montrer que, si A, B et C sont trois sous-ensembles de E, $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.
4. Montrer que, l'ensemble A étant fixé, il existe un unique ensemble B tel que $A \Delta B = \emptyset$.
5. Montrer de même qu'il existe un unique B tel que $A \Delta B = E$.
6. Plus généralement, montrer que, quel que soit le sous-ensemble X de E, il existe un unique B tel que $A \Delta B = X$ (en terme plus savant, l'application $B \mapsto A \Delta B$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même).

Exercice 3 (**)

Déterminer pour chacune des applications suivantes si elle est injective, surjective ou bijective (ou rien du tout !) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$:

- $f_1(n) = n + 5$
- $f_2(n) = n^2$
- $f_3(n) = n + 1$ si n est pair, et $f_3(n) = n - 1$ si n est impair
- $f_4(n) = Ent\left(\frac{n}{3}\right)$
- $f_5(n) = |n - 10|$

Exercice 4 (*)

Pour chacune des applications suivantes, données avec leur ensemble de départ E et leur ensemble d'arrivée F, déterminer si elles sont injectives, surjectives, bijectives (tous les moyens sont bons, dérivation comprise) :

1. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $E = F = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = x^3 + x - 2$, $E = F = \mathbb{R}$.
3. $h(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$, $E =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$, $F = \mathbb{R}_+$.
4. $i(x) = \dfrac{3x + 2}{x - 1}$, $E = \mathbb{R} \backslash \{1\}$, $F = \mathbb{R} \backslash \{3\}$.

Exercice 5 (***)

Soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective (démontrer chaque implication séparément). Quelle est alors sa réciproque ?

Exercice 6 (** à *****)

Un ensemble est E est dit **dénombrable** s'il existe une application $f : E\mathbb{N}$ bijective. Comme trouver une application bijective est parfois délicat, on pourra admettre le théorème suivant : tout ensemble infini E pour lequel il existe une application injective de E dans $\mathbb{N}$ est dénombrable.

1. Montrer que l'ensemble des entiers pairs est dénombrable.
2. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
3. Montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
5. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (c'est ça qui vaut une difficulté de *****).
6. Montrer qu'il existe une bijection de $]0;1[$ dans $\mathbb{R}$.
7. Montrer qu'il y a « autant de points » dans une droite que dans un demi-cercle (autrement dit qu'il existe une bijection de l'un vers l'autre).

Exercice 7 : théorème de Cantor-Bernstein (****)

Soient X et Y deux ensembles tels qu'il existe deux applications $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ toutes les deux injectives. On veut prouver qu'il existe une bijection de X sur Y. Pour cela, on note $\varphi = f \circ g$. On définit les sous-ensembles A_i de Y par récurrence de la façon suivante : $A_0 = Y \backslash f(X)$, $A_1 = \varphi(A_0)$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_{i+1} = \varphi(A_i)$. On pose enfin $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

1. Montrer que les ensembles A_i sont disjoints.
2. Montrer que l'ensemble A est stable par φ (c'est-à-dire que $\varphi(A) \subset A$).
3. On pose $B = g(A)$, et $C = X \backslash B$. Montrer que $f(B) = A \backslash A_0$, et que tout élément de C possède un unique antécédent par g dans Y. On notera cet antécédent $g^{-1}(x)$. Montrer que $g^{-1}(x) \notin A$.
4. On définit l'application $h : X \to Y$ en posant $h(x) = f(x)$ si $x \in B$, et $h(x) = g^{-1}(x)$ si $x \in C$. Montrer que h est une bijection de X sur Y.

Exercice 8 (* à **)

Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall n \geqslant 4,\ 2^n \leqslant n!$
2. $\forall x \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
3. $\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$
4. Le nombre de diagonales dans un polygône à n côtés est $\dfrac{n(n-3)}{2}$.
5. La dérivée n-ème de la fonction $f : x \mapsto (x-1)e^{-x}$ est donnée par $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n-1)e^{-x}$.

Exercice 9 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n, puis la prouver par récurrence.

Exercice 10 (*)

Exprimer à l'aide du symbole Σ les expressions suivantes :

1. $S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{12}$
2. $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{10}{1\ 024}$
3. $S_3 = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \cdots + \frac{a^n}{n}$
4. $S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$

Exercice 11 (**)

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{k=n} (2k+1)$
2. $\sum_{k=807}^{k=2012} 3$
3. $\sum_{k=1}^{k=n} (6k^2 + 4k + 1)$
4. $\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k$
5. $\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2 - 1)$
6. $\sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k}$
7. $\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k}$
8. $\sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2$
9. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}}$

Exercice 12 (**)

Le but de cet exercice est de calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1)^3$ de trois façons différentes.

1. Écrire S_n sans utiliser de symbole somme. De combien de termes cette somme est-elle composée ?
2. Calculer S_n en développant $(2k+1)^3$.
3. On pose $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} (2k)^3$ et $U_n = \sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3$. Expliquer pourquoi $U_n = S_n + T_n$ (à l'aide d'une phrase si vous n'arrivez pas à le faire par le calcul).
4. Calculer T_n et U_n.
5. Retrouver la valeur de S_n à l'aide des deux questions précédentes.
6. Prouver par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$.

Exercice 13 (**)

Calculer les sommes doubles suivantes :
$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$; $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$; $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$; $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j|$ et $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i2^j$

Exercice 14 (*)

Dans un jeu de tarot, il y a 21 atouts. On en tire (simultanément) cinq au hasard. Combien y a-t-il de tirages pour lesquels :

- Au moins un atout est un multiple de cinq ?
- Il y a exactement un multiple de cinq et un multiple de trois ?
- On a tiré le 1 ou le 21 ?

Exercice 15 (*)

Une assemblée est constituée de 200 membres. Elle doit élire une commission constituée de trois parlementaires (chaque membre vote donc pour trois personnes). On s'intéresse au nombre de membres ayant voté pour au moins un parmi trois candidats qu'on désignera par A, B et C (et qui ne sont pas les seuls candidats). On sait que 112 membres ont voté pour A, 67 pour A et B, 32 pour A et C, 12 pour A, B et C, 5 pour B et C mais pas pour A, 56 pour C mais pas pour A ni B, et 22 pour B mais pas pour A.

1. Combien ont voté pour A mais pas pour B ?
2. Combien ont voté pour C ?
3. Combien n'ont voté pour aucun des trois candidats ?
4. Combien ont voté uniquement pour A ?

Exercice 16 (* à ***)

On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes usuel. Combien y a-t-il de tirages possibles vérifiant les conditions suivantes :

- Aucune condition.
- Il y a deux Rois parmi les cinq cartes tirées.
- Il y a au moins un pique parmi les cartes tirées.
- Il y a un As et deux carreaux parmi les cartes tirées.
- Il n'y a pas de cartes en-dessous du 9 parmi les cartes tirées.
- Les cinq cartes tirées forment deux paires (mais pas de brelan).
- Les cinq cartes tirées sont de la même couleur.
- Les cinq cartes tirées forment une quinte flush (cinq cartes qui se suivent dans la même couleur).

Exercice 17 (*)

Développer les expressions suivantes : $(x-3)^5$; $(2x+3y)^3$; $(x-1)^7$.

Exercice 18 (*)

Une grille de mots croisés est un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes, (et donc constitué de $n \times p$ cases), parmi lesquelles un certain nombre k (inférieur ou égal à np) sont noircies (et les autres blanches).

1. Combien y a-t-il de grilles différentes possibles ?
2. Combien ont les quatre coins noirs ?
3. Combien ont exactement deux coins noirs ?
4. Combien ont au plus une case noire sur chaque ligne ?
5. On suppose pour cette question $n = p = k$. Combien y a-t-il alors de grilles ayant exactement une case noire sur chaque ligne et sur chaque colonne ?
6. Calculer le nombre de façons de placer les neuf chiffres 1 sur une grille de Sudoku vierge (pour ceux qui ne maitrisent pas les règles du Sudoko : il s'agit d'une grille à neuf lignes et neuf colonnes, et il doit y avoir un 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne ; de plus, si on découpe la grille en neuf petites grilles de neuf cases en regroupant lignes et colonnes trois par trois, il doit y avoir un 1 exactement dans chacune de ces petites grilles).
7. Comparer ce nombre avec le nombre de façons de répartir 9 chiffres 1 dans la grille sans respecter les règles du Soduko (donner la valeur numérique pour chacun des deux).