Feuille d'exercices n°17 : ~~Bourrinage~~ Développements limités

PTSI B Lycée Eiffel

24 avril 2013

Exercice 1 (* à **)

Calculer les développements limités suivants (on utilisera la notation $DL_n(a)$ pour indiquer le développement limité à l'ordre n au point a) :

- $DL_4(0); f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$
- $DL_6(0); f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$
- $DL_4(1); f(x) = e^x$
- $DL_2(0); f(x) = \sqrt{3+\cos(x)}$
- $DL_4(0); f(x) = \sqrt{\cos(x)}$
- $DL_5(0); f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$
- $DL_3(0); f(x) = \sqrt{x+2}$
- $DL_4(0); f(x) = \ln(1+e^x)$
- $DL_6(0); f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$
- $DL_3(0); f(x) = \sqrt{\cos(x)} - \cos(\sqrt{x})$
- $DL_5(0); f(x) = e^{\sin(x)}$
- $DL_3(2); f(x) = x^4$
- $DL_4(0); f(x) = (1+\sin(x))^x$
- $DL_2(1); f(x) = \arctan(x)$
- $DL_3(1); f(x) = \ln(\sqrt{x})$
- $DL_3(0); f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$
- $DL_3(0; f(x) = \ln(\cos(3x))$
- $DL_3\left(\dfrac{\pi}{3}\right); f(x) = \cos(x)$
- $DL_3(0); f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)}$
- $DL_2(0); f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}$
- $DL_3(0); f(x) = \ln(2e^x + e^{-x})$
- $DL_2(0); f(x) = \dfrac{xe^{-x}}{2x+1}$
- $DL_2(2); f(x) = x^x$
- $DL_2(0); f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$

Exercice 2 (**)

À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$.

Exercice 3 (***)

À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, déterminer un réel A tel que $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|(1+x^2)^{\frac{1}{n}} - 1 - \dfrac{1}{n}\ln(1+x^2)\right| \leqslant \dfrac{A}{n^2}$. En déduire deux réels a et b tels que $\displaystyle\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}}\,dx \underset{n\to+\infty}{=} a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 4 (* à **)

Calculer à l'aide de développements limités les limites suivantes.

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - \cos(x)}{x^2}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x+2} - x$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3(x)}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\cosh\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$

Exercice 5 (** à ***)

Étudier le comportement des fonctions suivantes (existence d'asymptote ou de tangente et position relative) à l'endroit indiqué :

1. $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ au voisinage de 0.
2. $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ au voisinage de 0.
3. $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$.
4. $f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ en $+\infty$.
5. $f(x) = x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ en $+\infty$.
6. $f(x) = \dfrac{\arctan(x)}{\sin^3(x)} - \dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de 0.
7. $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, dt$ en $+\infty$ (on donnera un développement asymptotique avec trois termes).
8. $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x^2 - 1}$ sur $\mathbb{R}$.
9. $f(x) = x^{1 - \frac{1}{x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 (***)

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{1}{k}\right)$ et $v_n = u_n + \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ sont adjacentes (au moins à partir d'un certain rang).

Exercice 7 (**)

Étudier les courbes paramétrées suivantes, en utilisant des développements limités pour l'étude des points stationnaires :

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & t^2 - 2t \\ y(t) & = & t^2 = \dfrac{1}{t^2} \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & e^{t-1} - t \\ y(t) & = & t^3 - 3t \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & t - \mathrm{th}(t) \\ y(t) & = & \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)} \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos(t) + \dfrac{1}{2}\cos(2t) \\ y(t) & = & \sin(t) - \dfrac{1}{2}\sin(2t) \end{array}\right.$