Feuille d'exercices n°16 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

24 avril 2013

Exercice 1 (*)

- Par opérations sur les lignes (on soustrait la première ligne aux deux denrières), $\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$ (les deux dernières lignes sont proportionnelles, mais pas les deux premières).
- En ajoutant les deux premières lignes de B et en soustrayant la troisième, on tombe sur la quatrième. Commes les trois premières lignes forment une famille qui est manifestement de rang 3 (en regardant chacune des trois dernières colonnes, il est clair qu'on ne peut pas trouver de combinaison linéaire les annulant), $\text{rg}(B) = 3$.
- Les trois premières colonnes de la matrice C forment clairement une famille libre (en effet, si $a(2,1,1) + b(1,1,0) + c(0,0,1) = (0,0,0)$, alors $c = -a$ en regardant la troisième coordonnée, $b = -a$ avec la deuxième, et la première coordonnée ne peut s'annuler que si $a = b = 0$, donc $c = 0$). La matrice ne peut pas être de rang plus grand que trois puisqu'elle n'a que trois lignes, donc $\text{rg}(C) = 3$.
- Il vaut mieux connaître évidemment un peu ses formules trigonométriques. essayons de simplifier la première colonne par des soustractions de colonnes : $\text{rg}(D) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) & \cos(2\theta) \\ 0 & \cos(2\theta) - \cos^2(\theta) & \cos(3\theta) - \cos(\theta)\cos(2\theta) \\ 0 & \cos(3\theta) - \cos(2\theta)\cos(\theta) & \cos(4\theta) - \cos^2(2\theta) \end{pmatrix}$. Or, $\cos(2\theta) - \cos^2(\theta) = -\sin^2(\theta)$, et de même $\cos(4\theta) - \cos^2(2\theta) = -\sin^2(2\theta)$. Enfin, $\cos(3\theta) - \cos(\theta)\cos(2\theta) = -\sin(\theta)\sin(2\theta)$ puisque $\cos(\theta)\cos(2\theta) - \sin(\theta)\sin(2\theta) = \cos(\theta + 2\theta) = \cos(3\theta)$. On en déduit que $\text{rg}(D) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) & \cos(2\theta) \\ 0 & -\sin^2(\theta) & -\sin(\theta)\sin(2\theta) \\ 0 & -\sin(2\theta)\sin(\theta) & -\sin^2(2\theta) \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) & \cos(2\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \sin(2\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \sin(2\theta) \end{pmatrix}$ en divisant les lignes par $-\sin(\theta)$ et $-\sin(2\theta)$ (on étudiera ensuite les cas où ces nombres sont nuls). Les deux dernières lignes obtenues étant identiques, la matrice est au plus de rang 2. Elle sera même exactement de rang 2 sauf si la deuxième ligne est nulle, ce qui n'est pas possible sauf dans les cas particuliers déjà écartés. On aura donc $\text{rg}(D) = 2$ si $\theta \not\equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$ (condition pour que les sinus ne s'annulent pas). Si $\theta = 0$, la matrice D ne contient que des 1, elle est de rang 1. Si $\theta = \pi$, les trois lignes sont proportionnelles (la deuxième est l'opposé des deux autres) donc elle est aussi de rang 1. Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, les deux lignes extrêmes sont opposées et la deuxième ligne ne leur est pas proportionnelle donc la matrice est de rang 2. De même si $\theta = \frac{3\pi}{2}$, on trouve une matrice de rang 2 (c'est la même matrice par parité du cos !).

Exercice 2 (*)

1. Comme on est un peu paresseux et qu'on n'a pas envie de retravailler sur une matrice, on se contente de constater que $2 \times (1,2,0,1) + (2,1,3,-1) = (4,5,3,1)$, donc $\text{Vect}(\mathcal{F}) =$

Vect$((1,2,0,1);(2,1,3,-1))$. Les deux vecteurs restants n'étant certainement pas proportionnels, la famille $\mathcal{F}$ est de rang 2, et on vient d'exhiber une base de Vect$(\mathcal{F})$.

2. Il fallait bien sûr comprendre Vect$(\mathcal{F})$ et pas seulement $\mathcal{F}$ dans l'énoncé de la question. On peut écrire $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \{(a+2b, 2a+b, 3b, a-b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Il suffit de trouver deux équations reliant les quatre coordonnées pour décrire le sous-espace qu'on sait déjà être de dimension 2. Par exemple, en notant (x,y,z,t) les quatre coordonnées, $y-x = 2a+b-a-2b = a-b = t$, et $x+y = 3a+3b = 3(a-b)+6b = 3t+2z$. Il y a évidemment énormément d'autres possibilités, mais le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & - & 2z & - & 3t & = & 0 \\ x & - & y & & & + & t & = & 0 \end{array}\right.$ en est une.
3. Il suffit de « résoudre » le système : $t = x+z$, puis $y = -2x-z-t = -3x-2z$, donc $G = \{(x,-3x-2z,z,x+z) \mid (x,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1,-3,0,1);(0,-2,1,1))$. Manifestement, $\dim(G) = 2$.
4. Puisque les deux sous-espaces sont de dimension 2, la somme des dimensions vaut 4, il suffit par exemple de prouver que $F \cap G = \{0\}$ pour prouver la supplémentarité. On peut par exemple choisir $u = (a+2b, 2a+b, 3b, a-b) \in F$ et imposer que $u \in G$, ce qui donne les deux équations $2(a+2b)+2a+b+3b+a-b = 0$ et $a+2b+3b-a+b = 0$, soit $5a+7b = 6b = 0$, qui n'a manifestement comme unique solution que $a = b = 0$, donc $\text{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G = \mathbb{R}^4$. Pour la décomposition du vecteur, il faut écrire $(6,10,8,2) = (a+2b+x, 2a+b-3x-2z, 3b+z, a-b+x+z)$, soit $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a & + & 2b & + & x & & & = & 6 \\ 2a & + & b & - & 3x & - & 2z & = & 10 \\ & & 3b & & & + & z & = & 8 \\ a & - & b & + & x & + & z & = & 2 \end{array}\right.$. On sait déjà quelles combinaisons effectuer : en écrivant $2L_1+L_2+L_3+L_4$, il reste $5a+7b = 32$, et en faisant $L_1+L_3-L_4$, on trouve $6b = 12$, ce qui donne $b = 2$ puis $a = \dfrac{18}{5}$. Pour éliminer les a et les b, on a aussi des combinaisons toutes prêtes : $L_1+L_2-2L_3-3L_4$ donne $-5x-7z = -6$; et $L_1-L_2+L_4$ donne $5x+3z = -2$. La somme de ces deux conditions nous donne maintenant $-4z = -8$ soit $z = 2$, puis $x = -\dfrac{8}{5}$. Reste à calculer $(a+2b, 2a+b, 3b, a-b) = (7.6, 9.2, 6, 1.6) = x_F \in \text{Vect}(\mathcal{F})$, et $(x, -3x-2z, z, x+z) = (-1.6, 0.8, 2, 0.4) = x_G \in G$. La somme de ces deux vecteurs est égale à $(6,10,8,2)$, ce qui répond à la question posée.

Exercice 3 (***)

En utilisant la formule de Grassmann, $\dim(\text{Im}(f)+\text{Im}(g)) = \text{rg}(f)+\text{rg}(g)-\dim(\text{Im}(f)\cap\text{Im}(g)) \leqslant \text{rg}(f)+\text{rg}(g)$. Or, $\text{rg}(f+g) = \dim(\text{Im}(f+g)) \leqslant \dim(\text{Im}(f)+\text{Im}(g))$ puisque $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}(f)+\text{Im}(g)$ (un élément qui peut s'écrire $(f+g)(y) = f(y)+g(y)$ appartient à $\text{Im}(f)+\text{Im}(g)$). La combinaison de ces deux inégalités prouve que $\text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg}(f)+\text{rg}(g)$. Pour qu'il y ait égalité, il faut que chacune des deux inégalités soit une égalité. Il faut donc d'abord avoir $\dim(\text{Im}(f)\cap\text{Im}(g)) = 0$, soit $\text{Im}(f)\cap\text{Im}(g) = \{0\}$. Il faut ensuite avoir $\text{Im}(f+g) = \text{Im}(f)+\text{Im}(g)$. Supposons dans un premier temps que la deuxième condition $\ker(f)+\ker(g) = E$ soit vérifiée, et choisissons $x \in \text{Im}(f)+\text{Im}(g)$, on souhaite prouver que $x \in \text{Im}(f+g)$ (rappelons que l'inclusion dans l'autre sens est toujours vraie). On peut donc écrire $x = f(y)+g(z) = (f+g)(y)+g(z-y)$. Comme $z-y \in E$, on peut écrire $z-y = \alpha+\beta$, avec $\alpha \in \ker(f)$ et $\beta \in \ker(g)$, alors $g(z-y) = g(\alpha+\beta) = g(\alpha) = g(\alpha)+f(\alpha)$ (on peut bien rajouter ce terme qui est nul), d'où $x = (f+g)(y)+(f+g)(\alpha) = (f+g)(y+\alpha) \in \text{Im}(f+g)$, ce qui prouve l'égalité du rang de $f+g$ avec $\text{rg}(f)+\text{rg}(g)$. Réciproquement, supposons maintenant $\text{Im}(f+g) = \text{Im}(f)+\text{Im}(g)$, alors $\dim(\ker(f)+\ker(g)) = \dim(\ker(f))+\dim(\ker(g))-\dim(\ker(f)\cap\ker(g)) = n-\text{rg}(f)+n-\text{rg}(g)-\dim(\ker(f)\cap\ker(g))$. Or, sous l'hypothèse $\text{Im}(f)\cap\text{Im}(f) = \{0\}$, on peut prouver que $\ker(f+g) = \ker(f)\cap\ker(g)$. En effet, l'inclusion $\ker(f)\cap\ker(g) \subset \ker(f+g)$ est toujours vraie (si $f(x) = g(x) = 0$, alors $(f+g)(x) = 0$), et dans l'autre sens, si $f(x)+g(x) = 0$, alors $f(x) = -g(x) = 0$ car le membre de gauche appartient à l'image de f et celui de droite à celle de g. On peut continuer notre calcul de dimension : $\dim(\ker(f)+\ker(g)) = 2n-(\text{rg}(f)+\text{rg}(g)+\dim(\ker(f+g))$. Comme $\text{rg}(f)+\text{rg}(g)$

est supposé égal à $\text{rg}(f+g)$ et que le théorème du rang assure que $\text{rg}(f+g)+\dim(\ker(f+g))=n$, on trouve $\dim(\ker(f)+\ker(g))=2n-n=n$, donc $\ker(f)+\ker(g)=E$, ce qui achève notre démonstration.

Exercice 4 (**)

1. Si $x \in N_k$, alors $f^k(x)=0$, donc $f^{k+1}(x)=f(0)=0$ et $x \in N_{k+1}$. Autrement dit, $N_k \subset N_{k+1}$. De même, si $x \in I_{k+1}$, $x=f^{k+1}(y)=f^k(f(y)) \in I_k$, donc $I_{k+1} \subset I_k$.
2. D'après la question précédente, $\dim(N_k) \leqslant \dim(N_{k+1})$. La suite $(\dim(N_k))$ est donc une suite croissante d'entiers naturels, comme elle ne peut pas prendre une infinité de valeurs (elle est majorée par $\dim(E)$), il existe nécessairement un entier p pour lequel $\dim(N_p)=\dim(N_{p+1})$. Ceci combiné à l'inclusion démontrée précédemment prouve que $N_p=N_{p+1}$. Supposons alors, pour un certain entier $i \geqslant 1$, $N_{p+i} \neq N_{p+i+1}$. Cela signifierait l'existence d'un vecteur x tel que $f^{p+i+1}(x)=0$ mais $f^{p+i}(x) \neq 0$ (l'inclusion dans l'autre sens étant toujours vraie). Mais alors $f^{p+1}(f^i(x))=0$ et $f^p(f^i(x)) \neq 0$, donc $f^i(x) \in N_{p+1}(x)$ et $f^i(x) \notin N_p(x)$, ce qui contredit l'égalité de ces deux noyaux. La suite est donc constante à partir du rang p.
3. En appliquant le théorème du rang, quel que soit l'entier i =, $\dim(I_{p+i+1})=\dim(E)-\dim(N_{p+i+1})=\dim(E)-\dim(N_{p+i})=\dim(I_{p+i})$. Au vu de l'inclusion démontrée à la première question, $I_{p+i}=I_{p+i+1}$, donc la suite (I_k) stationne aussi à partir du rang p.
4. D'après le théorème du rang, la sommes des dimensions de N_p et de I_p est égale à la dimension de E, il suffit donc de prouver que leur intersection est réduite à 0. Supposons donc $x \in N_p \cap I_p$. On peut donc écrire $x=f^p(y)$, avec $f^p(x)=0$. En découle que $f^{2p}(y)=0$, soit $y \in N_{2p}=N_p$, donc $f^p(y)=x=0$. C'est suffisant pour affirmer que $N_p \oplus I_p=E$.

Exercice 5 (***)

1. Commençons par prouver que $f(\mathbb{C}_3[X]) \subset \mathbb{C}_3[X]$. En effet, on sait que lors d'une division euclidienne, le degré du reste est toujours strictement inférieur à celui du dividende. Ici, B étant de degré 4, $f(P)$ sera de degré inférieur ou égal à 3 quel que soit le polynôme P (peu importe d'ailleurs que P appartienne à $\mathbb{C}_3[X]$). Reste à prouver que l'application est linéaire, ce qui n'est pour une fois pas évident. Soient donc deux polynômes P_1 et P_2, alors si on effectue la division euclidienne de AP_1 et de AP_2 par B, on obtient les égalités $AP_1=BQ_1+R_1$, et $AP_2=BQ_2+R_2$. On peut effectuer la combinaison de ces deux équations : $A(\lambda P_1+\mu P_2)=B(\lambda Q_1+\mu Q_2)+(\lambda R_1+\mu R_2)$. Comme $d^\circ(\lambda R_1+\mu R_2) \leqslant \max(d^\circ(R_1),d^\circ(R_2))<4$, on tient nécessairement la division euclidienne de $A(\lambda P_1+\mu P_2)$ par B, donc $f(\lambda P_1+\mu P_2)=\lambda R_1+\mu R_2=\lambda f(P_1)+\mu f(P_2)$. L'application est linéaire, c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$.
2. On peut caractériser les polynômes du noyau par la condition AP est divisble par B, mais ce n'est pas pratique à expliciter. Mieux vaut anticiper un peu et donner la matrice de f dans la base canonique. Comme $A=B+X-1$, $f(1)=X-1$; de même $AX=BX+X^2-X$, donc $f(X)=X^2-X$ puis $f(X^2)=X^3-X^2$. Un tout petit peu plus de réflexion pour la dernière : $AX^3=BX^3+X^4-X^3=BX^3+(X^4-X)+X-X^3+B(X^3+1)+X-X^3$ donc $f(X^3)=X-X^3$. La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$ est donc $M=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Cherchons maintenant le noyau : si $P=a+bX+cX^2+dX^3$, alors $f(P)=-a+(a-b+d)X+(b-c)X^2+(c-d)X^3$, donc P appartient au noyau si $b=c=d$ (à cause des deux derniers coefficients) et $a=0$ (premier coefficient). La deuxième équation est alors toujours vérifiée, donc $\ker(f)=\{bX+bX^2+bX^3\}=\text{Vect}(X+X^2+X^3)$.

3. Puisque $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\dim(\mathbb{C}_3[X]) = 4$, le théorème du rang assure que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$. Comme l'image de f contient $X-1$, $X^2 - X = X(X-1)$ et $X^3 - X^2 = X^2(X-1)$ (qui sont images de trois des polynômes de la base canonique), elle contient tous les polynômes de la forme $(X-1)(a+bX+cX^2)$, donc $(X-1)\mathbb{C}_2[X]$. Comme ce dernier espace est de dimension 3 comme $\mathrm{Im}(f)$, il y a nécessairement égalité entre les deux.
4. Ah tiens, un peu de révision sur les complexes. Il faut donc résoudre l'équation $X^4 - X = 0$, soit $X(X^3-1) = 0$. les quatre racines sont $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_4 = \overline{j} = e^{i\frac{-2\pi}{3}}$ (les trois dernières étant les racines cubiques de l'unité).
5. Écrivons les quatre polynômes : $P_1 = X^3 - 1$; $P_2 = X(X^2+X+1) = X^3 + X^2 + X$; $P_3 = X(X-1)(X-\overline{j}) = X^3 + jX^2 + \overline{j}X$ et $P_4 = X(X-1)(X-j) = X^3 + \overline{j}X^2 + jX$. Pour prouver que c'est une base, supposons $aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4 = 0$, et profitons du fait que ces polynômes ont des racines en commun. Pour $x = 0$, l'équation devient $-a = 0$, ce qui implique $a = 0$; pour $x = 1$, on trouve $3b = 0$, donc $b = 0$; pour $x = j$, $cj(j-1)(j-\overline{j}) = 0$ donc $c = 0$; de même pour $d = 0$, la famille est donc libre. Comme elle contient quatre polynômes, c'est une base de $\mathbb{C}_3[X]$.
6. On peut ruser pour s'éviter de pénibles calculs : $A = B + X - 1$, et $(X - z_k)P_k = B$, donc $AP_k = BP_k + (X-1)P_k = BP_k + (X-z_k)P_k + (z_k - 1)P_k = B(P_k + 1) + (z_k - 1)P_k$. On a sous les yeux la division euclidienne de AP_k par B, donc $f(P_k) = (z_k - 1)P_k$. Pour détailler un peu plus, $f(P_1) = -P_1$; $f(P_2) = 0$; $f(P_3) = (j-1)P_3$ et $f(P_4) = (\overline{j} - 1)P_4$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc diagonale, égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{j}-1 \end{pmatrix}$. La matrice dans la base canonique a déjà été donnée.

Exercice 6 (**)

1. L'existence de chacun des deux supplémentaires, c'est du cours. En appliquant le théorème du rang, on peut par ailleurs écrire $\dim(F \cap G) + \dim(F') = \dim(F)$, donc $\dim(F') = \dim(F) - \dim(F \cap G)$. De même, $\dim(G') = \dim(G) - \dim(F \cap G)$. Comme $\dim(F) = \dim(G)$ par hypothèse, on a bien en effet $\dim(F') = \dim(G')$.
2. Si $x \in F' \cap G'$, en particulier $x \in F \cap G$, puisque $F' \subset F$ et $G' \subset G$. Mais l'intersection de F' et $F \cap G$ est réduite au vecteur nul, puisqu'ils sont supplémentaires dans F, donc $x = 0$.
3. Commençons par constater, en notant $p = \dim(F) = \dim(G)$, que $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = p + p - (p-k) = p + k$. Un supplémentaire de F (ou de G) dans $F+G$ devrait donc avoir pour dimension $p + k - p = k$, la même que celle de F' ou de G'. Notons $(f_1, f_2, \dots, f_k)$ une base de F', et $(g_1, g_2, \dots, g_k)$ une base de G' (elles ont le même nombre d'éléments puisque les deux espaces sont de même dimension), et notons $\mathcal{B} = (f_1 + g_1, f_2 + g_2, \dots, f_k + g_k)$. Cette famille est certainement constituée de vecteurs de $F+G$, et elle est libre car si on suppose $\lambda_1(f_1+g_1) + \cdots + \lambda_k(f_k+g_k) = 0$, alors $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k = -(\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_k g_k)$. D'après la question précédente, chacun des deux membres est alors nul (celui de gauche est dans F', celui de droite dans G'), ce qui implique la nullité de chaque coefficient puisque la famille $(f_1, \dots, f_k)$ est libre comme base de F'. Il suffit désormais de prouver que $\mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ a une intersection nulle avec F et avec G pour qu'il en soit supplémentaire, puisqu'il est de la bonne dimension k. Prouvons par exemple que $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) \cap F = 0$. Soit donc $x = \lambda_1(f_1 + g_1) + \cdots + \lambda_k(f_k + g_k)$ et supposons que $x \in F$. Alors $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots \lambda_k g_k = x - (\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k) \in F$ puisque tout ce qui est dans le membre de droite appartient à F. Mais le membre de gauche, lui, appartient à G', donc à G. Le membre de droite est alors dans $F \cap G$, qui est supplémentaire de G' dans G. Chacun des deux deux membres est alors nécessairement nul, ce qui assure la nullité de tous les coefficients, donc de x. Les espaces $\mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ et F ont dont pour dimensions

respective p et k, ont une intersection nulle, ils sont supplémentaires dans $F+G$ qui est de dimension $p+k$. On démontre exactement de la même façon que $G \oplus \text{Vect}(\mathcal{B}) = F+G$.

4. On considère la base $\mathcal{B}$ précédente, on la complète en une base $(f_1+g_1, \dots, f_k+g_k, h_1, h_2, \dots, h_p)$ de $F+G$, puis on complète encore en une base $(f_1+g_1, \dots, f_k+g_k, h_1, h_2, \dots, h_p, e_1, \dots, e_n)$ de E. La famille $(f_1+g_1, \dots, f_k+g_k, e_1, e_2, \dots, e_n)$ est alors une base d'un supplémentaire commun de F et de G dans E. En effet, par construction, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un supplémentaire de $F+G$ dans E, donc la famille considérée engendre un espace dont l'intersection avec F et G est nulle. Il a par ailleurs une dimension $f+n$ qui est complémentaire de celle de F (qui vaut p) dans E (qui est de dimension $k+p+n$ au vu de la base construite pour E. De même, ce sous-espace est supplémentaire de G.

Exercice 7 (**)

Note : un bug de notation dans l'énoncé, le $\mathcal{E}$ devrait être un $\mathcal{L}(E)$.

1. Si le noyau était réduit à 0, l'application serait injective, donc bijective, donc f^k aussi, quelle que soit la valeur de l'entier k. C'est fort contradictoire avec le fait que f soit nilpotente. Comme $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$, la théorème du rang assure que $\text{rg}(f) \leqslant n-1$.
2. S'il n'existait pas un tel x, f^{p-1} serait l'application nulle, ce qui est contradictoire avec la minimalité de p. Naturellement, le q apparaissant ensuite dans l'énoncé doit être remplacé par un p. Si la famille n'est pas libre, on peut écrire $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0$. En composant par f^{p-1}, et en utilisant que $f^k(x) = 0$ dès que $k \geqslant p$, on en déduit que $\lambda_0 f^{p-1}(x) = 0$ (tous les autres termes s'annulent). Comme $f^{p-1}(x) \neq 0$, on doit avoir $\lambda_0 = 0$. On peut répéter l'opération en composant par f^{p-2} pour montrer que $\lambda_1 = 0$, puis de même pour tous les autres coefficients, et aboutir à la conclusion que la famille est libre.
3. Une famille libre dans un espace de dimension n étant toujours de cardinal inférieur ou égal à n, on a en effet $p \leqslant n$. Du coup, $f^n = 0$ puisque toutes les puissances de f à partir de f^p sont nulles.
4. Si $p = n$, la famille construite précédemment est une base de E. Si g est une application linéaire commutant avec f, $g(x)$ peut s'écrire sous la forme $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x)$ (même si g ne commute pas avec f, c'est vrai !). Calculons alors, en exploitant la commutation, les images des autres vecteurs de la base construite : $g(f(x)) = f(g(x)) = f(\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x)) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 f^2(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^n(x) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1 f(f(x)) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(f(x))$. De même, quelle que soit $i \leqslant n-1$, $g(f^i(x)) = f^i(g(x)) = f^i(\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x)) = \lambda_0 f^i(x) + \lambda_1 f(f^i(x)) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(f^i(x))$. autrement dit, g coïncide sur tous les vecteurs de notre base avec $\lambda_0 \,\text{id} + \lambda_1 f + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}$. Les deux applications linéaires sont alors égales (un morphisme est toujours uniquement déterminé par l'image d'une base), et g est donc un polynôme de degré au plus $n-1$ en l'pplication f. réciproquement, tous les polynômes constitués à partir de f commutent évidemment avec f. Notons que l'ensemble des applications linéaires commutant avec f est ici de dimension n (la même que celle de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$), sachant que l'ensemble de tous les endomorphismes de E est lui de dimension n^2.

Exercice 8 (***)

1. Une matrice symétrique s'écrit $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$, donc $\mathcal{S} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\right.$ $\left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. En particulier, $\dim(\mathcal{S}) = 6$. De

même, $\dim(\mathcal{A}) = 3$, et $\mathcal{A} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

2. La trace étant une application linéaire, son noyau $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. D'après le thorème du rang, sa dimension vaut 9 (celle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) moins celle de l'image. Mais l'image de la trace est $\mathbb{R}$, donc de dimension 1. On en déduit que $\dim(\mathcal{T}) = 8$. On trouve facilement une base même si c'est très pénible à expliciter :
$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};\right.$
$\left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

3. C'est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène d'équations, donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. En notant les coefficients d'un matrice de M dans l'ordre alphabétique, on doit avoir $a+b+c = d+e+f = g+h+i = a+d+g = b+e+h = c+f+i = a+e+i = c+e+g$. On obtient facilement $g = b+c-d$; $h = a+c-e$ et $i = a+b-f$, ce qui nous ramène aux conditions suivantes sur les six premiers coefficients (en supprimant les égalités sur les colonnes qu'on vient d'exploiter et en remplaçant dans tout le reste) : $a+b+c = d+e+f = 2(a+b+c)-d-e-f = 2a+b+e-f = b+2c+e-d$. On peut supprimer le troisième nombre qui est toujours égal aux deux premiers si ceux-ci sont égaux. Reste $a+b+c = d+e+f = 2a+b+e-f = b+2c+e-d$. On en déduit que $f = a-c+e$ (en exploitant $a+b+c = 2a+b+e-f$) et $d = c+e-a$, donc en remplaçant dans la première égalité, $a+b+c = 3e$, soit $e = \dfrac{a+b+c}{3}$. On peut alors tout exprimer en fonction de a, b et c : $d = c+e-a = -\dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b + \dfrac{4}{3}c$; $f = \dfrac{4}{3}a + \dfrac{1}{3}b - \dfrac{2}{3}c$; puis $g = b+c-d = \dfrac{2}{3}a + \dfrac{2}{3}b - \dfrac{1}{3}c$; $h = \dfrac{2}{3}a - \dfrac{1}{3}b + \dfrac{2}{3}c$ et $i = -\dfrac{1}{3}a + \dfrac{2}{3}b + \dfrac{2}{3}c$. Les trois coefficients de la première ligne peuvent être choisis comme on le souhaite, les autres sont alors imposés, donc $\dim(\text{M}) = 3$, on en trouve une base en imposant successivement la valeur 3 (on pourrait prendre 1 mais avec 3 tous les coefficients seront entiers) aux réels a, b et c et 0 à chacun des deux autres. Ainsi, $\text{M} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right)$.

5. Par rapport à la question précédente, si on veut une matrice symétrique, on ajoute les conditions $b = d$; $c = g$ et $f = h$. soit en reprenant les formules précédentes $b = -\dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{3}b + \dfrac{4}{3}c$; $c = \dfrac{2}{3}a + \dfrac{2}{3}b - \dfrac{1}{3}c$ et $\dfrac{4}{3}a + \dfrac{1}{3}b - \dfrac{2}{3}c = \dfrac{2}{3}a - \dfrac{1}{3}b + \dfrac{2}{3}c$. Quitte à tout multiplier par 3 et à tout passer du même côté, ces trois équations deviennent $2a+2b-4c = 2a+2b-4c = 2a+2b-4c = 0$. Les trois équations sont donc identiques et imposent $c = \dfrac{a+b}{2}$. Il reste deux coefficients « libres », donc $\dim(\text{M} \cap \mathcal{S}) = 2$. On peut être plus précis et écrire que $\text{S} \cap \mathcal{S} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$. Si on tient à mettre un 1 en haut à gauche, on peut par exemple prendre $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (mais il y a plein d'autres possibilités, par exemple la première matrice de notre base divisée par 2).

6. On impose cette fois-ci six conditions supplémentaires : $a = e = i = 0$; $b = -d$; $c = -g$ et $f = -h$. Si $a = 0$, $e = \dfrac{b+c}{3}$ donc la condition $e = 0$ impose $c = -b$. La condition $i = 0$ est

alors automatique, et les trois autres aussi : $d = \frac{1}{3}b - \frac{4}{3}b = -b$; $g = \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}b = b = -c$ et $f = \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}c = b = -h$. On peut encore choisir librement la valeur de b, donc $\dim(\mathrm{M} \cap \mathcal{A}) = 1$, et $\mathrm{M} \cap \mathcal{A} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Si on veut un coefficient 1 au bout de la première ligne, on prend l'opposé de la matrice qu'on vient de citer.

7. Cela découle immédiatement des calculs faits pour trouver la dimension de M, on remplit la matrice en respectant les équation trouvées dans la question 4 : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.