Feuille d'exercices n°16 : Dimension

PTSI B Lycée Eiffel

24 avril 2013

Exercice 1 (*)

Déterminer le rang de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) & \cos(2\theta) \\ \cos(\theta) & \cos(2\theta) & \cos(3\theta) \\ \cos(2\theta) & \cos(3\theta) & \cos(4\theta) \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (*)

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère la famille $\mathcal{F} = ((1,2,0,1); (2,1,3,-1); (4,5,3,1))$.

1. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F}$, et donner une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
2. Décrire $\mathcal{F}$ comme ensemble des solutions d'un système d'équations à déterminer.
3. On note G l'ensemble des solutions du système $\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & & & + & z & - & t & = & 0 \end{array} \right.$. Déterminer une base de G, ainsi que sa dimension.
4. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G$. Déterminer la décomposition dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \oplus G$ du vecteur $(6,10,8,2)$.

Exercice 3 (***)

Soient f et g deux applications linéaires de E dans F, où E et F sont de dimension finie. Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$, et qu'il y a égalité si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$ et $\ker(f) + \ker(g) = E$.

Exercice 4 (**)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie. On pose, pour tout entier naturel n, $N_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$.

1. Montrer que la suite (N_k) est croissante et la suite (I_k) décroissante (au sens de l'inclusion des ensembles).
2. Montrer qu'il existe un entier p pour lequel $N_p = N_{p+1}$, puis que la suite (N_k) stationne à partir du rang p.
3. Montrer que la suite (I_k) stationne à partir du même rang p.
4. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$.

Exercice 5 (***)

On se place dans $\mathbb{C}_3[X]$, et on note $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$. On désigne par f l'application qui, à un polynôme P, associe le reste de la division de AP par B.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(f)$? Montrer que $\mathrm{Im}(f) = (X-1)\mathbb{C}_2[X]$.
4. Déterminer les quatre racines z_1, z_2, z_3 et z_4 de B.
5. Montrer qu'en posant $P_k = \dfrac{B}{X - z_k}$, la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est une base de $\mathbb{C}_3[X]$.
6. Montrer que $f(P_k) = (z_k - 1)P_k$. À quoi ressemble la matrice de f dans cette base ? Et dans la base canonique ?

Exercice 6 (**)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même espace E de dimension finie, qui vérifient $\dim(F) = \dim(G)$.

1. Montrer que $F \cap G$ admet un supplémentaire F' dans F et un supplémentaire G' dans G qui sont de même dimension.
2. Montrer que F' et G' ont une intersection réduite au vecteur nul.
3. En considérant des bases de F' et G', construire un supplémentaire commun à F et G dans $F + G$.
4. Montrer qu'il existe un supplémentaire commun à F et G dans E.

Exercice 7 (**)

Soit $f \in \mathcal{E}$ un endomorphisme nilpotent, où E est de dimension finie n.

1. Montrer que $\ker(f) \neq \{0\}$, et que $\mathrm{rg}(f) \leqslant n - 1$.
2. Soit p le plus petit entier pour lequel $f^p = 0$. Prouver qu'il existe un $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$, et montrer que $(x, f(x), \dots, f^{q-1}(x))$ est une famille libre.
3. En déduire que $p \leqslant n$ et que $f^n = 0$.
4. On suppose que $p = n$. Déterminer toutes les applications linéaires commutant avec f.

Exercice 8 (***)

On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{S}$ le sous-espace constitué des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ celui constitué des matrices antisymétriques.

1. Donner la dimension de $\mathcal{S}$ et celle de $\mathcal{A}$, ainsi qu'une base de chacun de ces sous-espaces.
2. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices de trace nulle. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donner sa dimension, ainsi qu'une base.
3. On note désormais M l'ensemble des matrices dont la somme des coefficients sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est la même. Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Déterminer la dimension et une base de M.
5. Déterminer la dimension de $\mathrm{M} \cap \mathcal{S}$, donner un exemple de matrice symétrique appartenant à M, dont le coefficient sur la première ligne, première colonne vaut 1.
6. Déterminer la dimension de $\mathrm{M} \cap \mathcal{A}$, donner un exemple de matrice antisymétrique appartenant à M, dont le coefficient sur la première ligne, troisième colonne vaut 1.
7. Montrer qu'il n'existe qu'une seule matrice dans M dont la première ligne est constituée des nombres 1, 2 et 3 (dans cet ordre), et donner cette matrice.