Feuille d'exercices n°20 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

19 juin 2013

Exercice 1 (*)

1. En passant en coordonnées polaires, $f(x,y) = \dfrac{\rho\cos(\theta)(\rho^2\cos^2(\theta) - \rho^2\sin^2(\theta))}{\rho^2} = \rho\cos(\theta)\cos(2\theta)$, qui a une limite nulle quand ρ tend vers 0. La fonction est donc prolongeable en posant $f(0,0) = 0$.
2. En passant en coordonnées polaires, $f(x,y) = 1 + \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = 1 + \dfrac{2\rho\cos(\theta)\rho\sin(\theta)}{\rho^2} = 1+\sin(2\theta)$. Cette expression n'ayant pas une limite unique quand ρ tend vers 0, la fonction n'est pas prolongeable. Plus précisément, on peut appliquer la caractérisation séquentielle de la limite : $f\left(0, \dfrac{1}{n}\right) = 1$ (qui a évidemment pour limite 1 quand n tend vers $+\infty$), mais $f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{4}{2} = 2$, la fonction ne peut donc pas avoir de limite en $(0,0)$.
3. Ici, c'est vraiment facile en utilisant la caractérisation séquentielle : $f\left(\dfrac{1}{n}, 0\right) = 1$, et $f\left(0, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{3}{4}$, donc la fonction n'a pas de limite en $(0,0)$ et n'est pas prolongeable.
4. En passant à l'exponentielle et en coordonnées polaires, $f(x,y) = e^{\rho\cos(\theta)\ln(\rho^2)}$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{\rho\to 0} \rho\ln(\rho^2) = 0$, donc a fortiori, $\rho\cos(\theta)\ln(\rho^2)$ tend vers 0, et $f(x,y)$ est donc prolongeable par continutié en posant $f(0,0) = 1$.
5. Et si on utilisait un peu de développements limités ? Si x et y tendent tous les deux vers 0, le produit xy également. On peut donc écrire $\cosh(xy) - \cos(xy) = 1 + \frac{1}{2}x^2y^2 - 1 + \frac{1}{2}x^2y^2 + o(x^2y^2)$, soit $\cosh(xy) - \cos(xy) \sim x^2y^2$. On en déduit immédiatement que f a pour limite 1 en $(0,0)$, et est donc prolongeable par continuité.
6. Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{(1+x)(1+y)} = 1$, il suffit de chercher la limite éventuelle de $g : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x+y}$. On peut par exemple calculer $g\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n}$, qui a pour limite 0, et $g\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}, -\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})}{\frac{2}{n^2}} \sim \dfrac{1}{2}$ (notons ici que la fonction g, tout comme f n'est pas définie sur toute la droite d'équation $y = -x$). La fonction g et la fonction f ne sont donc pas prolongeables en $(0,0)$.
7. La fonction arctan étant bornée, on auran, partout où f est définie, $|f(x,y)| \leqslant \dfrac{\pi}{2}|x|$, qui tend vers 0 en $(0,0)$. On peut donc prolonger f en posant $f(0,0) = 0$.

Exercice 2 (**)

1. • On calcule d'abord $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

- Par symétrie, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (puisque x et y sont interchangeables dans l'équation de f).
- On obtient ensuite $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.
- Par symétrie $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.
- Enfin, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = -\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, et la formule pour l'autre dérivée croisée est sans surprise la même.

2. Calculs faciles ici :
   - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y\sin(xy)$.
   - $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x\sin(xy)$.
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^2\cos(xy)$.
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2\cos(xy)$.
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\sin(xy) - xy\cos(xy)$ (même formule pour la deuxième dérivée croisée).
3. Allons-y, en utilisant une fois de plus la symétrie du rôle joué par x et y :
   - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^3 - yx^2}{(x^2+y^2)^2}$.
   - $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}$.
   - Il faut un peu plus de courage pour les dérivées secondes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{-2xy(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2)(y^3-yx^2)}{(x^2+y^2)^4} = \dfrac{-2x^3y - 2xy^3 - 4xy^3 + 4x^3y}{(x^2+y^2)^3} = \dfrac{2x^3y - 6xy^3}{(x^2+y^2)^3}$.
   - De même $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{2xy^3 - 6x^3y}{(x^2+y^2)^3}$.
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2+y^2)(y^3-yx^2)}{(x^2+y^2)^4} = \dfrac{3y^2x^2 + 3y^4 - x^4 - x^2y^2 - 4y^4 + 4y^2x^2}{(x^2+y^2)^3} = \dfrac{-x^4 - y^4 + 6x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$ (encore une fois, la deuxième dérivée croisée est identique, il suffit d'échanger le rôle de x et y pour s'en rendre compte).
4. Vous commencez à connaitre la routine :
   - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 \times \dfrac{1}{y}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right) = y\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
   - $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) - x\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
   - Ensuite, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{2x}{y}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{x^2}{y^2}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{x}{y}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
   - Pour une fois l'égalité des deux dérivées croisées n'est pas évidente, faisons donc un dernier

calcul : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2\cos\left(\dfrac{x}{y}\right) - \cos\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{x}{y}\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$, ce qui donne bien la même formule que ci-dessus.

5. Un peu de révisions de dérivées classiques ici :
   - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(x+y)^2}}$.
   - Par symétrie, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(x+y)^2}}$ (les deux dérivées partielles sont donc identiques).
   - Puis $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\dfrac{\frac{2x+2y}{2\sqrt{1+(x+y)^2}}}{1+(x+y)^2} = -\dfrac{x+y}{(1+(x+y)^2)^{\frac{3}{2}}}$, et les trois autres dérivées partielles secondes sont identiques.
6. Puisque $f(x,y) = e^{e^{x\ln(y)}\ln(x)}$, on peut calculer :
   - $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\ln(y)e^{x\ln(y)}\ln(x) + \dfrac{e^{x\ln(y)}}{x}\right)e^{e^{x\ln(y)}\ln(x)}$.
   - $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{y}e^{x\ln(y)}\ln(x)e^{e^{x\ln(y)}\ln(x)}$.
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \left(\ln^2(y)e^{x\ln(y)}\ln(x) + \dfrac{\ln(y)}{x}e^{x\ln(y)} + \dfrac{\ln(y)xe^{x\ln(y)} - e^{x\ln(y)}}{x^2} + \left(\ln(y)e^{x\ln(y)}\ln(x) + \dfrac{e^{x\ln(y)}}{x}\right)^2\right)e^{e^{x\ln(y)}\ln(x)}$ (un volontaire pour simplifier ?).
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \left(-\dfrac{x}{y^2}e^{x\ln(y)}\ln(x) + \dfrac{x^2}{y^2}e^{x\ln(y)}\ln(x) + \dfrac{x^2}{y^2}e^{2x\ln(y)}\ln^2(x)\right)e^{e^{x\ln(y)}\ln(x)}$.
   - $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \left(\dfrac{e^{x\ln(y)}\ln(x)}{y} + \dfrac{x}{y}\ln(y)\ln(x)e^{x\ln(y)} + \dfrac{1}{y}e^{x\ln(y)} + \dfrac{x}{y}\ln(y)\ln^2(x)e^{2x\ln(y)} + \dfrac{1}{y}\ln(x)e^{x\ln(y)}\right)f(x,y)$.
   - On constate, quoiqu'assez péniblement, que l'autre dérivée croisée donne exactement les mêmes termes.

Exercice 3 (*)

Soit donc un vecteur non nul $h = (k,l)$, le taux d'accroissement dans la direction de h vaut $\dfrac{t^3k^2l}{t(t^4k^4+t^2l^2)} = \dfrac{k^2l}{t^2k^4+l^2}$. Si k ou l est nul, le taux d'accroissement est tout le temps nul, donc a pour limite 0 quand t tend vers 0. Sinon, il a pour limite $\dfrac{k^2}{l}$. dans tous les cas, la fonction est dérivable dans la direction de h. Pourtant $f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \dfrac{1}{2}$, qui ne va sûrement pas tendre vers 0 quand n tend vers $+\infty$. La fonction f n'est donc pas continue en $(0,0)$.

Exercice 4 (**)

1. On calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y-3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y+x-6$. Les points critiques ont donc des coordonnées solutions du système $\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 3 \\ x & + & 2y & = & 6 \end{array}\right.$. La somme des deux équations donne $x+y=3$, d'où $x = 3-(x+y) = 0$ et $y = 3$. Pour déterminer la nature de l'unique point critique, on constate que $f(0,3) = -9$, et on essaie de déterminer le signe de $f(x,y) - f(0,3) =$

$x^2+y^2+xy-3x-6y+9 = \left(x+\frac{y}{2}-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{9}{4} + \frac{3}{2}y + y^2 - 6y + 9 = \left(x+\frac{y}{2}-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{9}{2}y + \frac{27}{4} = \left(x+\frac{y}{2}-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$. Puisque cette expression est toujours positive, f admet un minimum global de valeur -9 en $(0,3)$.

2. Les dérivées sont $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2+y^2+2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy-2y$. L'annulation de la deuxième dérivée partielle se produit lorsque $y=0$ ou $x=1$. Si $x=1$, la première équation devient $5+y^2=0$, ce qui ne va pas être vérifié très souvent. Par contre, la condition $y=0$ amène à $3x^2+2x$, soit $x=0$ ou $x=-\frac{2}{3}$. Il y a donc deux points critiques pour f : $(0,0)$ et $\left(-\frac{2}{3},0\right)$. L'application ne peut pas avoir d'extremum local puisque l'application partielle $x\mapsto x^3+x^2$ obtenue en fixant $y=0$ n'est pas bornée. On peut tout de même se demander si les points critiques correspondent à des extrêma locaux. Comme $f(0,0)=0$, on cherche le signe de $f(x,y)$ au voisinage de 0. On constate aisément que $f\left(0,\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^2} < 0$ alors que $f\left(\frac{1}{n},0\right) = \frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2} > 0$. Il n'y a donc pas d'extremum local en $(0,0)$. Pour le deuxième point critique, on calcule $f\left(-\frac{2}{3},0\right) = -\frac{8}{27}+\frac{4}{9} = \frac{4}{27}$, puis on cherche le signe au voisinage de $(0,0)$ de $f\left(-\frac{2}{3}+h,k\right) - f\left(-\frac{2}{3},0\right) = \left(-\frac{2}{3}+h\right)^3 + k^2\left(h-\frac{2}{3}\right) + \left(h-\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{27} = h^3+\frac{1}{3}h^2-\frac{8}{9}h+k^2h-\frac{2}{3}k^2$. Lorsque $k=0$, l'application partielle $h\mapsto h^3+\frac{1}{3}h^2-\frac{8}{9}h$ s'annule en 0 en changeant de signe (il ne peut pas y avoir d'extremum local puisque sa dérivée ne s'annule pas en 0). La fonction f ne peut donc pas avoir d'extremum local en $\left(-\frac{2}{3},0\right)$.

3. On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y+ye^x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y+e^x$. L'annulation de la première dérivée donne $e^y=-ye^x$, ce qui reporté dans la deuxième conduit à $-xye^x+e^x=0$, soit $xy=1$ (l'exponentielle ne pouvant évidemment pas s'annuler). On doit alors avoir $y=-\frac{e^y}{e^x} = -e^{y-x} = -e^{y-\frac{1}{y}}$, et de même $x=-e^{x-y}=-e^{x-\frac{1}{x}}$. Autrement dit, x et y annulent la fonction $g : x\mapsto x+e^{x-\frac{1}{x}}$. Cette dernière est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ puisque $g'(x) = 1+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)e^{x-\frac{1}{x}} > 0$. Elle ne peut donc s'annuler au maximum qu'une seule fois, ce qui est le cas en -1. On en déduit que le seule point critique de la fonction f est $(-1,-1)$. On calcule $f(-1,-1) = -\frac{2}{e}$, puis on tente de trouver le signe de $f(-1+h,-1+k)+\frac{2}{e} = (h-1)e^{k-1}+(k-1)e^{h-1}+\frac{2}{e} = \frac{h-1}{e}e^k+\frac{k-1}{e}e^h+\frac{2}{e}$. Malheureusement, nous ne disposons pas de méthode évidente pour connaître ce signe, on peut constater (je vous laisse faire les calculs) que les deux applications partielles admettent un maximum global au point critique, mais ça ne suffit pas à conclure. Pour un calcul supplémentaire, on peut par exemple étudier le cas où $h=k=\frac{1}{n}$, c'est-à-dire chercher le signe de $\frac{1-n}{ne}e^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{e}$ (quitte à diviser tout par 2), qui donne en utilisant un développement limité de l'exponentielle $\left(\frac{1}{ne}-\frac{1}{e}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\frac{1}{e} = \frac{1}{ne}+\frac{1}{n^2e}-\frac{1}{e}-\frac{1}{ne}-\frac{1}{2n^2e}+\frac{1}{e}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2e}$, qui est positif. La fonction f ne peut donc pas admettre d'extremum local en $(-1,-1)$ (le calcul qu'on vient d'effectuer nous indique que la courbe obtenue en coupant la surface représentative de f par un plan vertical contenant le vecteur $(1,1)$ aura un minimum en $(-1,-1)$).

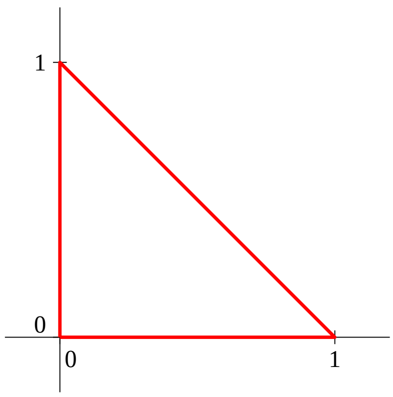
4. On peut toujours développer f sous la forme $f(x,y) = 2x^2+2y^2+2xy-2x-2y+1$, et calculer

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x+2y-2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y+2x-2$. En divisant tout par 2, on obtient comme conditions pour les coordonnées des points critiques $2x+y = x+2y = 1$. La différence des deux équations mène à $x = y$, ce qui donne comme unique point critque $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$. On calcule $f\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{3}$, puis on cherche le signe (au moins au voisinage de $(0,0)$) de $\left(\dfrac{1}{3}+h\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}+k\right)^2+\left(h+k-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{3}h+h^2+\dfrac{1}{9}+\dfrac{2}{3}k+k^2+h^2+k^2+\dfrac{1}{9}+2hk-\dfrac{2}{3}h-\dfrac{2}{3}k-\dfrac{1}{3} = 2h^2+2k^2+2hk = h^2+k^2+(h+k)^2$. Comme cette expression est toujours positive, notre point critique correspond à un minimum global.

5. Ce piège honteux n'est pas du tout un exercice sur les fonctions à deux variables, mais un petit exercice de géométrie du plan : en notant $M(x,y)$, $A(2,0)$ et $B(0,1)$, on a $f(M) = MA+MB$. Cette fonction atteint un minimum global en un point qui est le milieu de $[AB]$, donc pour $x = 1$ et $y = \dfrac{1}{2}$. La valeur du minimum en question vaut $AB = \sqrt{5}$. On peut bien sûr retrouver ces résultats par des calculs très moches à base de dérivées partielles.

Exercice 5 (* à ***)

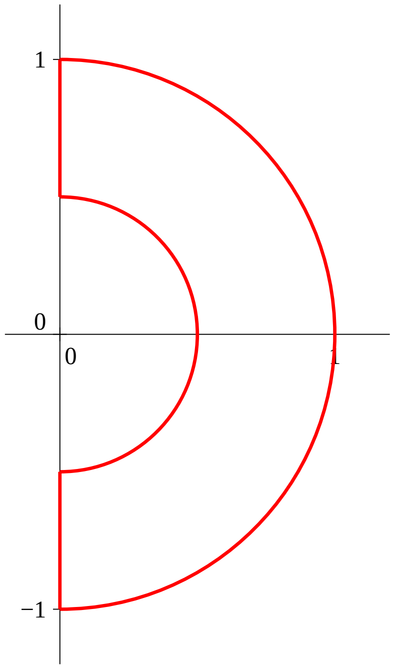
1. Il s'agit simplement de calculer $\displaystyle\int_1^2 \int_0^2 (x+y)e^{x+y}\ dx\ dy$. On peut très bien faire une intégration par parties dans la première intégrale en ponsant $u(x) = x+y$ donc $u'(x) = 1$, et $v'(x) = e^{x+y}$, soit $v(x) = e^{x+y}$, pour obtenir $I = \displaystyle\int_1^2 [(x+y)e^{x+y}]_0^2 - \int_0^2 e^{x+y}\ dx\ dy = \int_1^2 (2+y)e^{2+y} - ye^y - [e^{x+y}]_0^2\ dy = \int_1^2 (1+y)e^{2+y}+(1-y)e^y\ dy$. Et une deuxième IPP pour finir (avec les conventions évidentes pour u et v') : $I = [(1+y)e^{2+y}]_1^2 - \displaystyle\int_1^2 e^{2+y}\ dy + [(1-y)e^y]_1^2 + \int_1^2 e^y\ dy = 3e^4-2e^3-e^4+e^3-e^2+e^2-e = 2e^4-e^3-e$.
2. Commençons par faire un petit schéma pour visualiser le domaine d'intégration :



Il suffit donc de calculer $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} xy\ dy\ dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{2}\ dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2}\ dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$.
3. On ne va pas refaire un schéma cette fois-ci, le domaine d'intégration est un triangle similaire au précédent, et $I = \displaystyle\int_0^\pi \int_0^{\pi-x} \sin(x+y)\ dy\ dx = \int_0^\pi [-\cos(x+y)]_0^{\pi-x}\ dx = \int_0^\pi -\cos(x)-1\ dx =$

$[-\sin(x) - x]_0^\pi = -\pi$.

4. Le domaine d'intégration est une demi-couronne circulaire, située entre le cercle trigonométrique, et le cercle d'équation $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$, qui n'est autre que le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{1}{2}$:



Il est évidemment préférable de passer en coordonnées polaires, le domaine étant aisément décrit par les condition $\rho \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On obtient alors $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\rho^2 \cos^2(\theta)}{\rho^2} \times \rho \, d\rho \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) \, d\theta \times \int_{\frac{1}{2}}^{1} \rho \, d\rho$. Comme on sait que $\cos^2(\theta) = \dfrac{1 + \cos(2\theta)}{2}$, on calcule directement $I = \left[\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \times \left[\dfrac{\rho^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \dfrac{\pi}{2} \times \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{3\pi}{16}$.

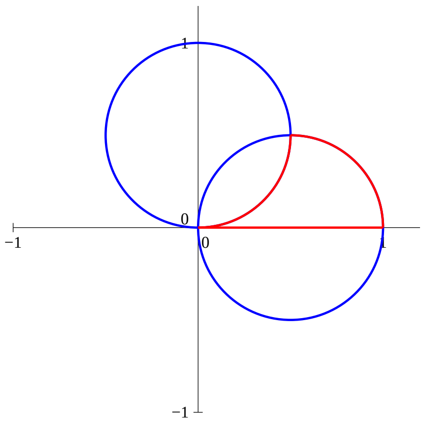
5. Il faut bien sûr lire dans l'énoncé $x^2 + \dfrac{1}{4}y^2 = 1$ pour l'équation de l'ellipse. On peut se contenter de calculer l'intégrale sur un quart d'ellipse et de la multiplier par 4, ce qui donne $I = 4 \displaystyle\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} x^2 \, dy \, dx = 8 \int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} \, dx$. Posons $x = \sin(\theta)$, donc $dx = \cos(\theta) d\theta$, pour obtenir $I = 8 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \, d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2\theta) \, d\theta$. Comme on sait que $\cos(4\theta) = 1 - 2\sin^2(2\theta)$, on peut écrire $\sin^2(2\theta) = \dfrac{1 - \cos(4\theta)}{2}$, et $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos(4\theta) \, d\theta = \left[\theta - \frac{1}{4}\sin(4\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$.

6. On va bien sûr passer en coordonnées polaires : $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^3 \cos(\rho^2) \rho \, d\rho \, d\theta = 2\pi \times \left[\frac{1}{2}\sin(\rho^2)\right]_0^3 = \pi \sin(9)$.

7. Encore un passage en coordonnées polaires assez évident : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{\rho^2}{\rho\cos(\theta) + \rho} \times \rho \, d\rho \, d\theta =$

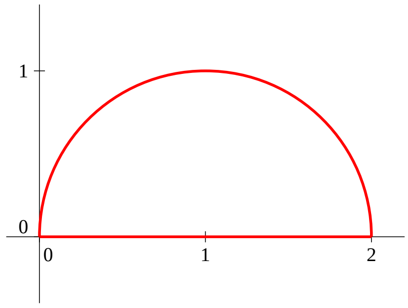
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(\theta)}\ d\theta \times \int_0^1 \rho^2\ d\rho$. La deuxième intégrale vaut facilement $\frac{1}{3}$. Pour la première, on peut constater que $1+\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2(\frac{\theta}{2})}\ d\theta = \left[\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. Finalement, $I = \frac{1}{3}$.

8. Commençons par tenter de visualiser le domaine d'intégration. La condition $y \geqslant 0$ ne pose évidemment pas de problème, les deux autres inégalités correspondent à des équations de cercle : $x^2+y^2-y=0$ donne $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, ce qui est l'équation du cercle de centre $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$. Pour avoir $x^2+y^2 \geqslant y$, on doit se trouver à l'extérieur du disque correspondant. De même, la condition $x^2+y^2 \leqslant x$ revient à dire qu'on est à l'intérieur du disque de rayon $\frac{1}{2}$ centré en $\left(\frac{1}{2},0\right)$. Une petite figure pour illustrer (le domaine d'intégration est délimité en rouge) :



Encore une fois, un passage en polaires est nécessaire. Le premier cercle a pour équation polaire $\rho\sin(\theta) = \rho^2$, soit $\rho)\sin(\theta)$, et le deuxième a pour équation $\rho = \cos(\theta)$. On observe que dans le domaine d'intégration, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$ (l'intersection des deux cercles autre que l'origine étant située sur la première bissectrice), et donc $\sin(\theta) \leqslant \rho \leqslant \cos(\theta)$, donc $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sin(\theta)}^{\cos(\theta)} (\rho\cos(\theta)+\rho\sin(\theta))^2 \rho\ d\rho\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(\theta)+\sin(\theta))^2 \int_{\sin(\theta)}^{\sin(\theta)} \rho^3\ d\rho\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)+2\cos(\theta)\sin(\theta) \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_{\sin(\theta)}^{\cos(\theta)}\ d\rho = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\sin(2\theta))(\cos^4(\theta)-\sin^4(\theta))\ d\theta$. Ce n'est pas si ignoble que ça : $\cos^4(\theta)-\sin^4(\theta) = (\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta))(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)) = \cos(2\theta)$, puis $I = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta)+\frac{1}{2}\sin(4\theta)\ d\theta = \left[\frac{1}{8}\sin(2\theta) - \frac{1}{32}\cos(4\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32} = \frac{3}{16}$.

9. La condition $x^2+y^2 = 2x$ correspond à un cercle d'équation $(x-1)^2+y^2 = 1$, donc de rayon 1 et de centre $(1,0)$. Ce qui donne un domaine d'intégration qui ressemble à ceci :



On peut le décrire en coordonnées polaires à l'aide des inégalités $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $0 \leqslant \rho \leqslant 2\cos(\theta)$ (on passe l'équation de cercle en polaires), donc $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos(\theta)} \frac{\rho^3 \cos^3(\theta)}{\rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos(\theta)} \rho^2 \cos^3(\theta) \, d\rho \, d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6(\theta) \, d\theta$. Cette dernière intégrale est un intégrale de Wallis. Rappelons qu'on peut les obtenir par récurrence sur n : en ponsant $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t) \, dt$, alors $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(t)(1 - \sin^2(t)) \, dt = I_{n-1} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(t) \sin(t) \sin(t) \, dt$. On peut faire une IPP en dérivant l'un des sinus et en reconnaissant dans $\cos^{2n-2}(t)\sin(t)$ la dérivée de $-\frac{\cos^{2n-1}(t)}{2n-1}$ pour obtenir $I_n = I_{n-1} + \left[\frac{\cos^{2n-1}(t)}{2n-1}\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n-1}(t)}{2n-1} \cos(t) \, dt = I_{n-1} + 0 - \frac{1}{2n-1} I_n$. On en déduit que $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$. Comme $I_0 = \frac{\pi}{2}$, on obtient en particulier $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6(\theta) \, d\theta = I_3 = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{5\pi}{32}$. Il ne reste plus qu'à conclure : $I = \frac{8}{3} \times \frac{5\pi}{32} = \frac{5\pi}{12}$.

10. Le domaine d'intégration est simplement le quart de disque trigonométrique constitué des angles compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. En passant en coordonnées polaires, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{\rho^2 \sin(\theta)\cos(\theta)}{1+\rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin(2\theta) \, d\theta \times \int_0^1 \frac{\rho^3}{1+\rho^2} \, d\rho$. La première intégrale vaut $\left[-\frac{1}{4}\cos(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$, pour la deuxième on écrit $\frac{\rho^3}{1+\rho^2} = \frac{\rho^3+\rho}{1+\rho^2} - \frac{\rho}{1+\rho^2}$, donc $\int_0^1 \frac{\rho^3}{1+\rho^2} \, d\rho = \int_0^1 \rho - \frac{\rho}{1+\rho^2} \, d\rho = \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\ln(1+\rho^2)}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2}$, puis $I = \frac{1 - \ln(2)}{4}$.