

Feuille d'exercices n°20 : Fonctions à deux variables

PTSI B Lycée Eiffel

19 juin 2013

Exercice 1 (*)

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes si elle est prolongeable par continuité en $(0, 0)$:

1. $f(x, y) = \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$

2. $f(x, y) = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + y^2}$

3. $f(x, y) = \frac{x^2 + 3y^2}{x^2 + 4y^2}$

4. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$

5. $f(x, y) = \frac{\cosh(xy) - \cos(xy)}{x^2 y^2}$

6. $f(x, y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$

7. $f(x, y) = x \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Exercice 2 (**)

Calculer les dérivées partielles (premières et secondes) de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. $f(x, y) = \cos(xy)$

3. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

4. $f(x, y) = y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)$

5. $f(x, y) = \operatorname{Argsh}(x + y)$

6. $f(x, y) = x^{y^x}$

Exercice 3 (*)

On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, prolongée par $f(0, 0) = 0$. Vérifier que la fonction f admet des dérivées suivant tout vecteur de \mathbb{R}^2 , mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 4 (**)

Déterminer les points critiques de chacune des fonctions suivantes et, lorsque c'est possible, déterminer la nature de ces points critiques.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$
2. $f(x, y) = x^3 + xy^2 + x^2 - y^2$
3. $f(x, y) = xe^y + ye^x$
4. $f(x, y) = x^2 + y^2 + (x + y - 1)^2$
5. $f(x, y) = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$

Exercice 5 (* à ***)

Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $\iint_D (x + y)e^{x+y} dx dy$, où $D = \{(x, y) \mid x \in [0, 2], y \in [1, 2]\}$.
2. $\iint_D xy dx dy$, où $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.
3. $\iint_D \sin(x + y) dx dy$, où $D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \pi\}$.
4. $\iint_D \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx dy$, où $D = \{(x, y) \mid \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$
5. $\iint_D x^2 dx dy$, où D est l'intérieur de l'ellipse d'équation $x^2 = \frac{y^2}{4} = 1$.
6. $\iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy$, où D est le disque de centre O et de rayon 3.
7. $\iint_D \frac{x^2 + y^2}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, où D est le quart de disque trigonométrique correspondant aux angles compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.
8. $\iint_D (x + y)^2 dx dy$, où $D = \{(x, y) \mid y \geq 0, y \leq x^2 + y^2 \leq x\}$
9. $\iint_D \frac{x^3}{x^2 + y^2} dx dy$, où $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}$
10. $\iint_D \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy$, où $D = \{(x, y) \mid x \in [0, 1], y \in [0, 1], x^2 + y^2 \leq 1\}$.