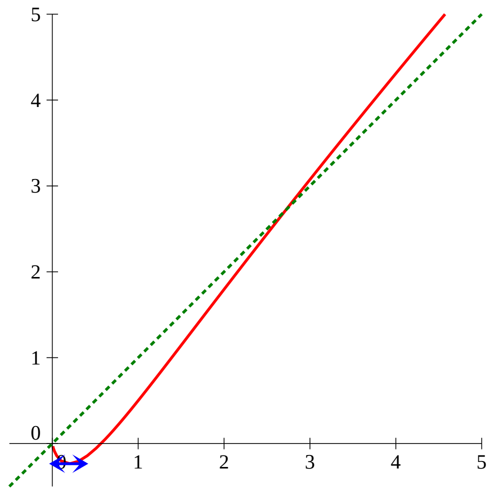
Feuille d'exercices n°6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

2 décembre 2012

Exercice 1 (*)

- La fonction f_1 et définie sur $\mathbb{R}_+^*$. En 0^+, la limite de f_1 est égale à 0 puisque le numérateur tend vers 0 (rappelons que $x\ln(x)$ a pour limite 0 en 0 par croissance comparée) et le dénominateur vers 1, donc il n'y a pas d'asymptote verticale. Ensuite, $f_1(x) = \dfrac{x+\ln x}{1+\frac{1}{x}}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$, et $\dfrac{f_1(x)}{x} = \dfrac{1+\frac{\ln x}{x}}{1+\frac{1}{x}}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. Il faut donc calculer $f(x)-x = \dfrac{x+\ln x - x - 1}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{\ln x - 1}{1+\frac{1}{x}}$. On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = +\infty$, la courbe de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction $y=x$. La dérivée de cette fonction vaut $f_1'(x) = \dfrac{(2x+\ln(x)+1)(x+1)-x^2-x\ln(x)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+3x+1+\ln(x)}{(x+1)^2}$. Pas vraiment évident à étudier, on peut toutefois noter g le numérateur et constater que $g'(x) = 2x+3+\dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2+3x+1}{x}$. Le discriminant du numérateur vaut $\Delta = 8-8 = 1$, il s'annule pour $x_1 = \dfrac{-3-1}{4} = -1$, et $x_2 = \dfrac{-3+1}{4} = -\dfrac{1}{2}$, deux valeurs négatives. On en déduit que $g'(x)$ est positif sur $\mathcal{D}_f$, donc g y est croissante. Comme la limite de g en 0 vaut $-\infty$ et que $g(1)=4$, la fonction g (et donc la fonction f') s'annule une seule fois, entre 0 et 1. La fonction f_1 admettra à cet endroite un minimum. Voici l'allure de la courbe :



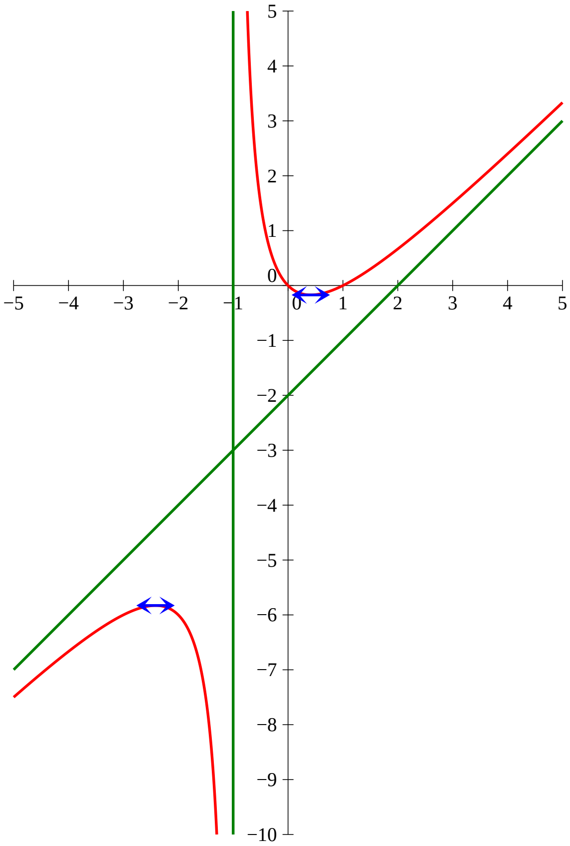
- Un classique : $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$. En -1, le numérateur tend vers -4 et le dénominateur vers 0, il y a donc des limites infinies et une asymptote verticale d'équation $x=-1$. Par contre, en 1, numérateur et dénominateur tendent vers 0, on est obligés de factoriser de chaque côté. Pour le numérateur, remarquons que $x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2$, donc pour $x\neq 1$, $f_2(x) = \dfrac{x(x-1)}{x+1}$, qui a pour limite 0 en 1. Pas de deuxième asymptote verticale donc.

Pour les infinis, on peut utiliser le quotient des termes de plus haut degré : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = +\infty$ et de même $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^3} = 1$. Reste à calculer $f_2(x) - x = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x - x^3 + x}{x^2 - 1} = \dfrac{-2x^2 + 2x}{x^2 - 1}$, qui a pour limite -2 en $+\infty$. Conclusion de tous ces calculs : la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$ (où les calculs sont les mêmes).

Pour le calcul de la dérivée il vaut évidemment mieux partir de $f_2(x) = \dfrac{x(x-1)}{x+1}$ pour obtenir $f_2'(x) = \dfrac{(2x-1)(x+1) - (x^2 - x)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$, la dérivée s'annule pour $x_1 = \dfrac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$, et pour $x_2 = \dfrac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1$. On peut aller jusqu'à calculer $f_2(x_1) = \dfrac{(-1 - \sqrt{2})(-2 - \sqrt{2})}{-\sqrt{2}} = \dfrac{-4 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} - 3$, et $f_2(x_2) = \dfrac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 2)}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 3$. Ce qui permet de dresser le magnifique tableau de variations suivant :

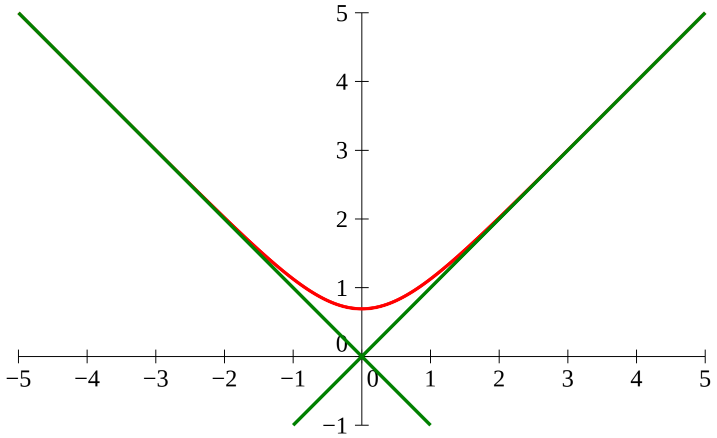
x	$-\infty$		$-\sqrt{2}-1$		-1		$\sqrt{2}-1$		1		$+\infty$
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$		$+$	
f_2	$-\infty$	$\nearrow$	$-2\sqrt{2}-3$	$\searrow$	$-\infty \,\|\, +\infty$	$\searrow$	$2\sqrt{2}-3$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Et la courbe qui va avec :

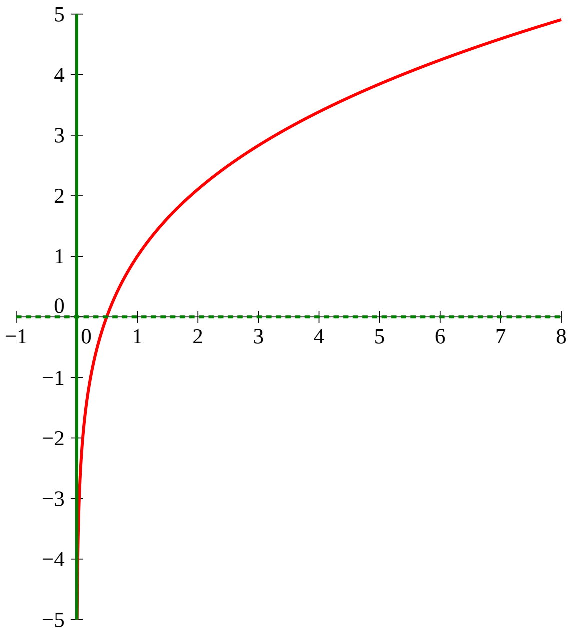


• La fonction f_3 est définie sur $\mathbb{R}$ puisqu'une exponentielle est strictement positive. Il suffit donc

de regarder ce qui se passe aux infinis, et on peut commencer par constater que f_3 est paire. La limite en $+\infty$ de f_3 est $+\infty$ et de plus $f_3(x) = \ln(e^x(1+e^{-2x})) = x+\ln(1+e^{-2x})$, donc $\dfrac{f_3(x)}{x} = 1 + \dfrac{\ln(1+e^{-2x})}{x}$, qui a pour limite 1 quand x tend vers $+\infty$. Enfin, $f(x) - x = \ln(1+e^{-2x})$, qui tend vers 0, donc la droite d'équation $y = x$ est aymptote oblique à la courbe en $+\infty$. Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique en $-\infty$.
On calcule $f_3'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, qui est positive sur $[0; +\infty[$ (et négative sur $]-\infty; 0]$, ce qui est cohérent avec la parité). Il y a donc un minimum en 0 de valeur $f_3(0) = \ln(2)$.



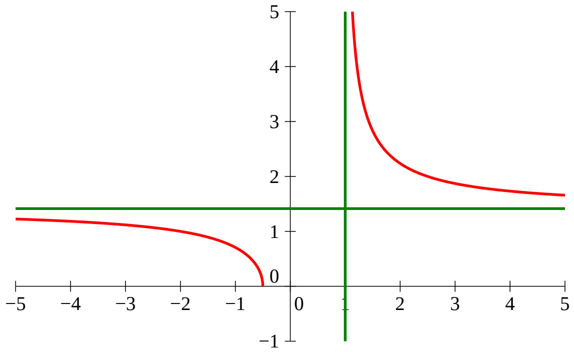
- Le domaine de définition est $\mathbb{R}_+^*$ et il y a une asymptote verticale en 0 (limite $-\infty$). De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = +\infty$ et $\dfrac{f_4(x)}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\ln x}{x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_4(x)}{x} = 0$. Il y a donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).
L'étude des variations ne pose ici aucun problème et ne nécessite même absolument aucun calcul : la fonction est somme de deux fonctions strictement croissantes, elle est donc strictement croissante.



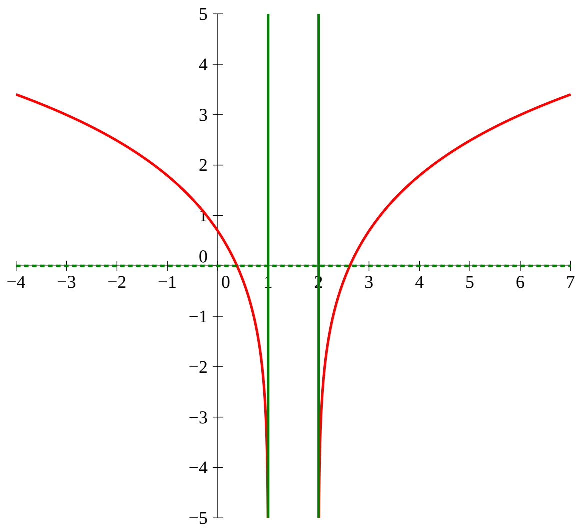
- La fonction f_5 est définie quand $\dfrac{2x+1}{x-1} \geqslant 0$, donc (petit tableau de signe) sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup]1; +\infty[$.
En $-\dfrac{1}{2}$, il n'y a rien à faire, la fonction est définie (et prend pour valeur 0), il ne peut pas y

avoir d'asymptote verticale. Par contre, en 1, il y a bien une limite infinie, donc une asymptote verticale. Enfin, quand $x \to \pm\infty$, $\dfrac{2x+1}{x-1} \to 2$, donc $\underset{x \to \pm\infty_5}{f}(x) = \sqrt{2}$, il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = \sqrt{2}$.

Par ailleurs, les variations de f_5 sont les mêmes que celles de $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$ (puisque la racine carrée est strictement croissante), qui a pour dérivée $\dfrac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$. La fonction f_5 est donc décroissante sur chacun de ses deux intervalles de définition.



- Enfin, f_6 est définie quand $x^2 - 3x + 2 > 0$, c'est-à-dire en-dehors de ses racines évidentes qui sont 1 et 2, donc $\mathcal{D}_{f_6} =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$. En 1 et 2, la parenthèse tend vers 0 donc la fonction vers $-\infty$, il y a donc deux asymptotes verticales. En $\pm\infty$, la fonction tend vers $+\infty$, et $\dfrac{f_6(x)}{x} = \dfrac{\ln(x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}))}{x} = \dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)$. Tout ceci tendant vers 0, il y a une branche parabolique de direction (Ox) de chaque côté.
  La fonction ln étant strictement croissante, les variations de f_6 sont les mêmes que celles de $x \mapsto x^2 - 3x + 2$, qui a pour dérivée $2x - 3$. La fonction f_6 est donc décroissante sur $]-\infty; -1[$ et croissante sur $]2; +\infty[$.



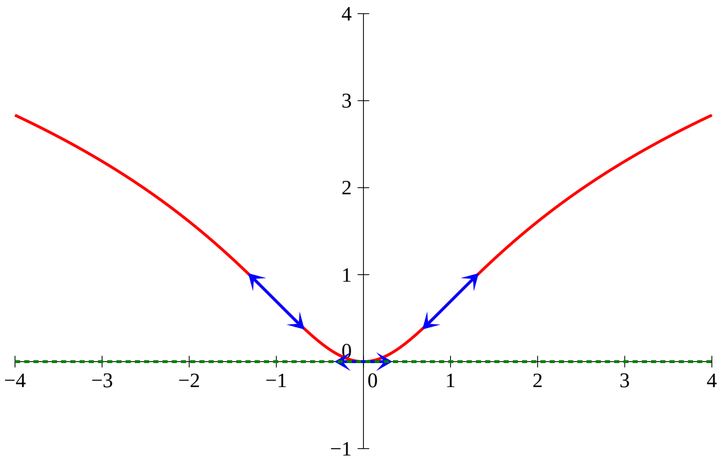
Exercice 2 (**)

Étude de la fonction f

Comme $1 + x^2$ est toujours strictement positif, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et y est $\mathcal{C}^\infty$. On peut également constater que la fonction est paire.

On a sans difficulté $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et comme $\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{\ln(2x^2)}{x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ par croissance comparée. La courbe représentative de f admet donc une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$. Même conclusion en $-\infty$ en utilisant la parité ou en effectuant des calculs très similaires.

Étudions désormais les variations : $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, atteignant en 0 un minimum de valeur $f(0) = \ln(1) = 0$. De plus, $f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$. La fonction f a donc deux points d'inflexion pour $x = 1$ et $x = -1$, de hauteur $f(1) = f(-1) = \ln(2)$ et dont les tangentes ont pour pentes respectives $f'(1) = \frac{2}{2} = 1$ et $f'(-1) = \frac{-2}{2} = -1$. La fonction f est convexe sur $[-1; 1]$ (sa dérivée seconde est alors positive), et concave sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$. Voici une allure de la courbe :



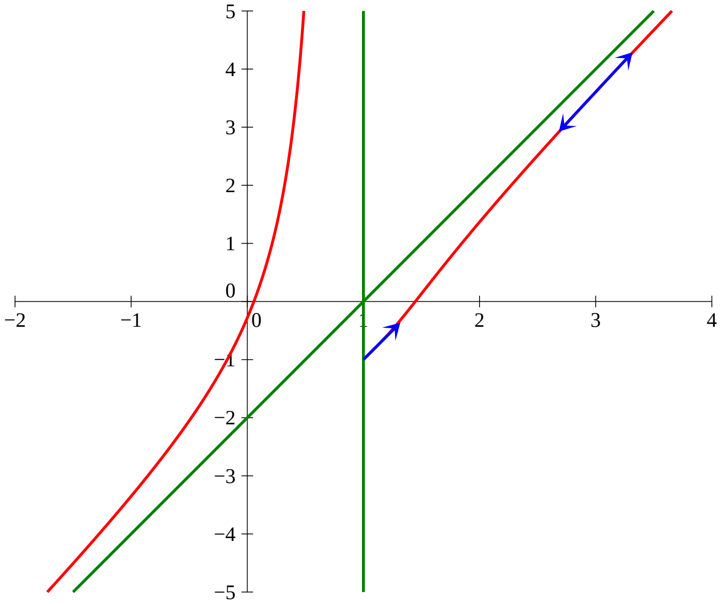
Étude de la fonction g

La fonction g est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

On a $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = 1$, donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ puis $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$ et enfin $\lim_{x\to+\infty} g(x) - 2x = -2$. Il y a donc en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 2$. Cette asymptote est d'ailleurs tout aussi valable en $-\infty$ par des calculs similaires.
Du côté de 1 c'est plus compliqué : $\lim_{x\to1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$, ce dont on déduit $\lim_{x\to1^-} g(x) = +\infty$. Il y a donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$. Mais par ailleurs $\lim_{x\to1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$, ce dont on déduit cette fois que $\lim_{x\to1^+} g(x) = 2 - 3 = -1$. La fonction g est donc prolongeable « par continuité à droite » en posant $g(1) = -1$.

Dérivons désormais : $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{1}{1-x}} + 2$, qui a le bon gout de toujours être positif. La fonction est donc croissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. De plus, g' a pour limite 2 en -1^+ (on a toujours $\lim_{x\to1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$ et, par croissance comparée, $\lim_{X\to-\infty} X^2 e^X = 0$, donc la composition des limites nous donne une limite nulle pour le premier morceau). Il y aura donc une demi-tangente à droite de pente 2 en notre point prolongé par continuité à droite.
Enfin, $g''(x) = \left(\frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2}\right) e^{\frac{1}{1-x}} = \frac{3-x}{(1-x)^3} e^{\frac{1}{1-x}}$. Il y a donc un point d'inflexion pour $x = 3$, et $g(3) = e^{-\frac{1}{2}} + 3 = \frac{1}{\sqrt{e}} + 3$; $g'(3) = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{4} + 2 = \frac{1}{4\sqrt{e}} + 2$. La fonction f est convexe sur

$]-\infty;-1[$ et sur $[3;+\infty[$ et concave sur $[1;3]$ (le dénominateur changeant de signe pour $x=1$). Avec tout ça, on doit pouvoir tracer une courbe ressemblant à la suivante :

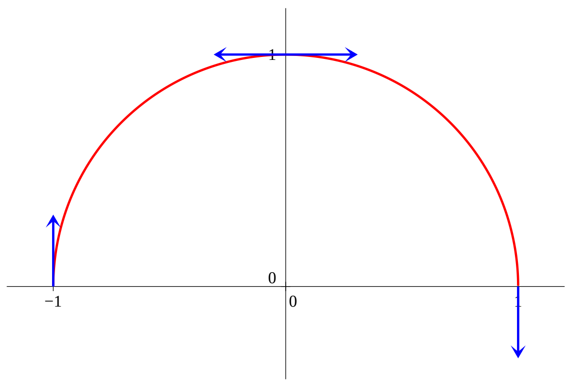


Étude de la fonction h

La fonction donnée dans l'énoncé ayant été étudiée en détail en cours, on va la remplacer par $h(x)=\sqrt{1-x^2}$. Cette fonction est définie sur $[-1;1]$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$.

Pas de limites à calculer, bornons-nous à constater que $h(-1)=h(1)=0$.

On a $h'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. La fonction est donc croissante sur $[-1;0]$ et décroissante sur $[0;1]$. On peut par ailleurs constater que la dérivée a une limite infinie en 1 et en -1, ce qui prouve la présence de tangentes verticales en ces points. Il y a un maximum en 0 de valeur $h(0)=1$. Passons à $h''(x)=\dfrac{-\sqrt{1-x^2}+x\times\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\dfrac{-1+x^2-x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=-\dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. La fonction h est donc concave. Les plus observateurs reconnaitront dans la superbe courbe qui suit un demi-cercle :

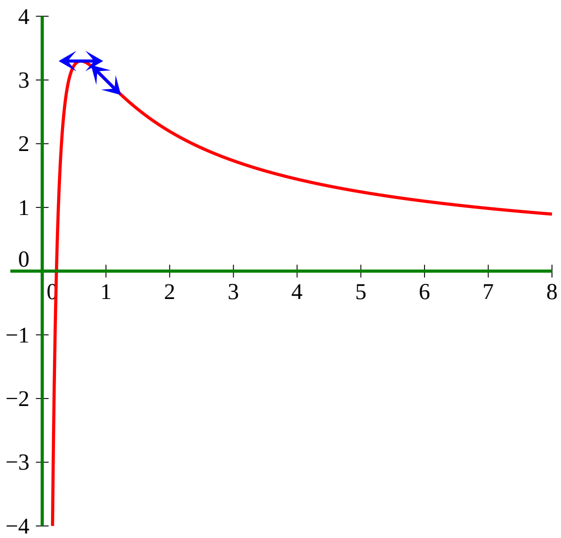


Étude de la fonction i

La fonction i est bien sûr définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$.

La limite de i quand x tend vers 0 est $-\infty$ (non, il n'y a pas de forme indéterminée), il y a donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} i(x) = 0$, donc il y a également une asymptote horizontale (l'axe des abscisses) en $+\infty$.

Comme $i'(x) = \dfrac{2 - (2\ln x + 3)}{x^2} = \dfrac{-1 - 2\ln x}{x^2}$, la fonction i admet un maximum en $x = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, de valeur $i\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = (2 \times (-\frac{1}{2}) + 3)\sqrt{e} = 2\sqrt{e}$. De plus, $i''(x) = \dfrac{-2x - 2x(-1 - 2\ln x)}{x^4} = \dfrac{4\ln x}{x^3}$. La fonction admet donc un point d'inflexion pour $x = 1$, et $i(1) = 3$; $i'(1) = -1$. La fonction i est concave sur $]0; 1]$ et convexe sur $[1; +\infty[$, avec une courbe ressemblant à ceci :

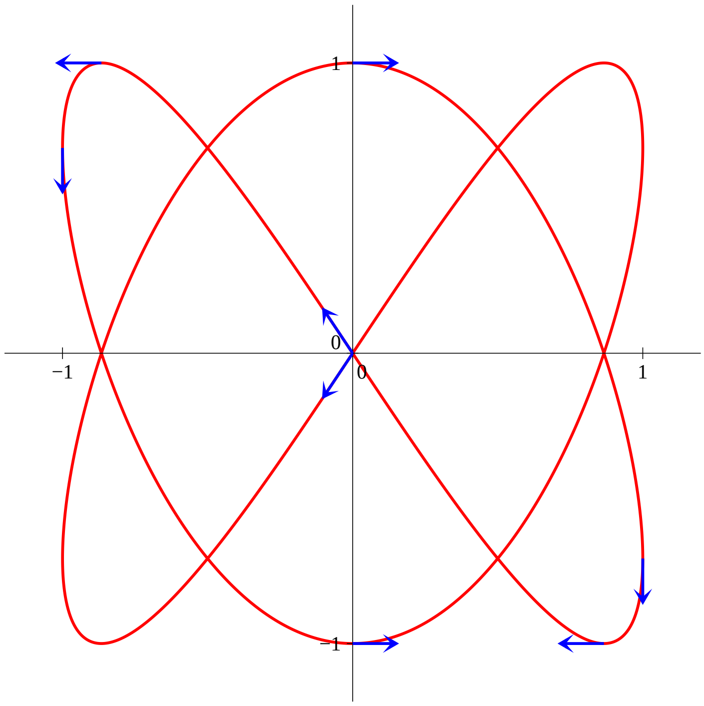


Exercice 3 (* à ***)

1. Les deux fonctions coordonnées sont ici périodiques, de période respective π et $\dfrac{2\pi}{3}$, ce qui nous permet de restreindre l'étude à l'intervalle $[-\pi; \pi]$ (puisque 2π est une période commune aux deux coordonnées). De plus, la fonction x est impaire et la fonction y paire, il y a donc une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées qui permet de restreindre encore l'étude à $[0; \pi]$. Les deux fonctions sont $\mathcal{C}^\infty$, $x'(t) = 2\cos(2t)$ s'annule en $\dfrac{\pi}{4}$ et en $\dfrac{3\pi}{4}$ (sut l'intervalle d'étude) et $y'(t) = -3\sin(3t)$ s'annule en 0, $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$ et π (il n'y a donc pas de point stationnaire). Les divers calculs de valeurs ne posent pas de problème particulier, par exemple $x\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et $y(t) = \cos(\pi) = -1$. On obtient finalement le tableau suivant (désolé pour les flèches mal fichues pour x, je ne peux pas faire trois flèches décroissantes successives) :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$x'(t)$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$y'(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
y	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1

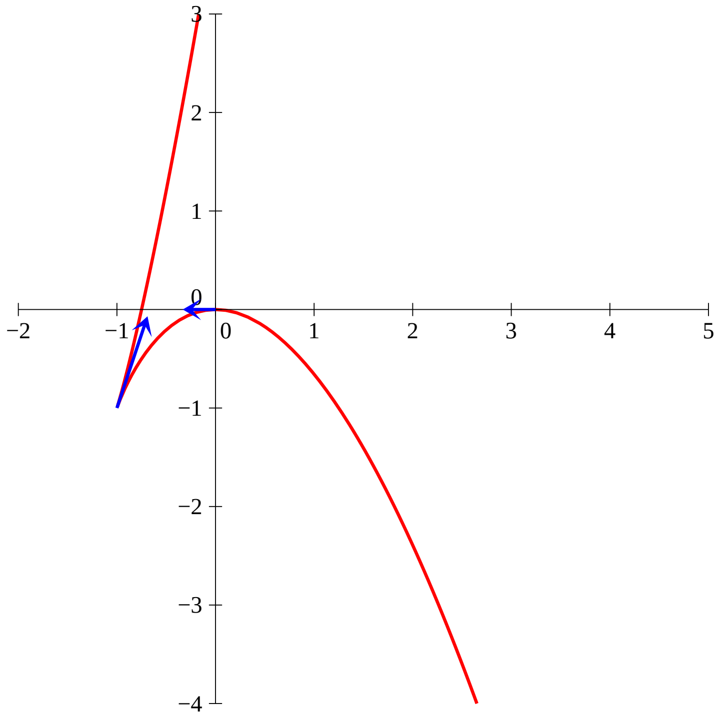
Les points doubles sont ici nombreux, on ne fera pas la liste complète, mais on peut tout de même en remarquer un facile : pour $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, la courbe passe par l'origine du repère. Comme $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ et $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$, la tangente à l'origine pour $t = \frac{\pi}{2}$ sera dirigée par le vecteur $(-2, 3)$. De même, pour $\frac{3\pi}{2}$ (qui est en-dehors de notre intervalle d'étude), un vecteur tangent sera $(-2, -3)$. La courbe ressemble à ceci (les tangentes particulières ne sont indiquées que sur l'intervalle $[0; \pi]$, le reste de la courbe étant obtenu par symétrie) :



2. Pas de restriction de l'intervalle d'étude ici (les fonctions n'ont aucune parité particulière) mais x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On calcule $x'(t) = 2t - 2$, qui s'annule lorsque $t = 1$; et $y'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t-1)$ qui s'annule pour $t = 0$ et $t = 1$. Il y a donc un point stationnaire pour $t = 1$ (de coordonnées $(-1, -1)$). Puisque $x''(t) = 2$ et $y''(t) = 12t - 6$, qui vaut 6 lorsque $t = 1$, la tangente au point stationnaire sera dirigée par le vecteur $(2, 6)$, ou plus simplement par $(1, 3)$. On peut ici aisément calculer $x'''(t) = 0$ et $y'''(t) = 12$, ce qui permet de constater que le vecteur $\overrightarrow{f'''(1)}$ n'est pas colinéaire au vecteur tangent (il est vertical), le point stationnaire est donc un point de rebroussement de première espèce.

t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Il y a ici des branches infinies à étudier. En gardant les termes de plus haut degré, $\lim_{t\to\pm\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$, il y a donc une branche parabolique de direction (Oy) des deux côtés. On peut s'intéresser aux éventuels points doubles pour cette courbe : $x(t) = x(u) \Leftrightarrow t^2 - 2t = u^2 - 2u \Leftrightarrow (t-u)(t+u) = 2(t-u)$, soit $t+u = 2$ (en éliminant le cas inintéressant $t = u$). De même, $y(t) = y(u) \Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 = 2u^3 - 3u^2$, ce qui se factoriser également en notant que $t^3 - u^3 = (t-u)(t^2+tu+u^2)$, pour donner $2(t-u)(t^2+tu+u^2) = 3(t+u)(t-u)$. En simplifiant ici aussi les facteur $t-u$, il reste $2(t+u)^2 - 2tu - 3(t+u) = 0$. Comme on a déjà la condition $t+u = 2$, on en déduit que $8 - 2tu - 6 = 0$, soit $tu = 1$. Les réels t et u ont pour produit 1 et pour somme 2, ils sont donc solutions de l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$. Cette équation ayant pour unique solution (double) $t = u = 1$, il n'y a pas de point double.

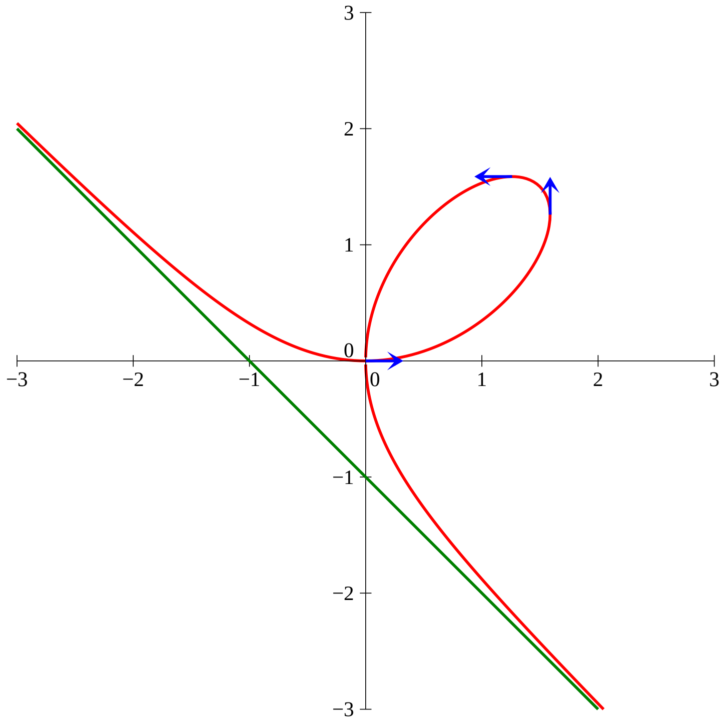


3. Les deux fonctions sont ici définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Pas de parité à signaler, on ne peut pas restreindre l'intervalle d'étude. On calcule $x'(t) = \dfrac{3(1+t^3) - 3t^2 \times 3t}{(1+t^3)^2} = \dfrac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$, qui s'annule lorsque $t^3 = \dfrac{1}{2}$, soit $t = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} 2^{\frac{2}{3}} \simeq 1.59$. Pour ce point, on a $x\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \dfrac{\frac{3}{\sqrt[3]{2}}}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{2}{3}} \simeq 1.59$, et $y\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \dfrac{2}{2^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{2} \simeq 1.26$. Passons à la deuxième coordonnée :

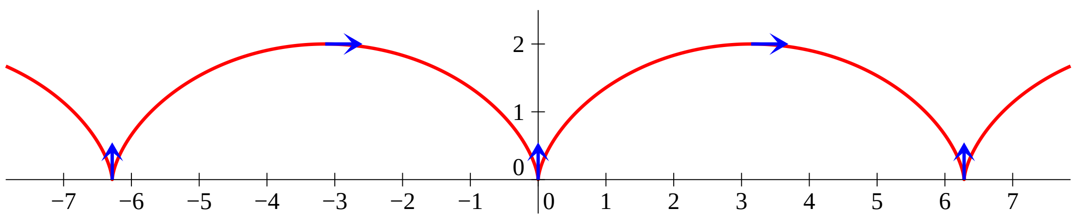
$y'(t) = \dfrac{6t(1+t^3) - 3t^2 \times 3t^2}{(1+t^3)^2} = \dfrac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$ s'annule pour $t = 0$ (on est alors à l'origine), et pour $t = \sqrt[3]{2}$, valeur pour laquelle $x(\sqrt[3]{2}) = \dfrac{3\sqrt[3]{2}}{1+2} = \sqrt[3]{2} \simeq 1.26$, et $y(\sqrt[3]{2}) = 2^{\frac{2}{3}} \simeq 1.59$ (autrement dit, ce point est symétrique par rapport à la première bissectrice de celui trouvé pour l'annulation de x'). Il n'y a pas de point stationnaire.

t	$-\infty$		-1		0		$\sqrt[3]{2}$		$2^{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	‖	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\sqrt[3]{2}$	↗	$2^{\frac{2}{3}}$	↘	0
$y'(t)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$2^{\frac{2}{3}}$	↘	$\sqrt[3]{2}$	↘	0

Pas d'asymptote en $\pm\infty$ puisqu'on se rapproche alors simplement de l'origine, par contre on peut étudier ce qui se passe en -1 : $\dfrac{y(t)}{x(t)} = t$ a évidemment pour limite -1, on calcule donc $y(t) + x(t) = \dfrac{3(t+t^2)}{1+t^3} = \dfrac{3t(1+t)}{(1+t)(t^2-t+1)} = \dfrac{3t}{t^2-t+1}$, qui a pour limite $\dfrac{-3}{3} = -1$ quand t tend vers -1. Il y a donc à cet endtroit une asymptote oblique d'équation $y = -x-1$.
Allez, une petite recherche de point doubles pour finir : $x(t) = x(u) \Leftrightarrow t(1+u^3) = u(1+t^3) \Leftrightarrow t-u+tu^3-ut^3 = 0 \Leftrightarrow t-u+tu(u-t)(u+t) = 0$. En éliminant comme d'habitude la possibilité $t = u$, il reste $1 - tu(t+u) = 0$. Pour $y(t) = y(u)$, on obtient $t^2 - u^2 + t^2u^3 - u^2t^3 = 0$, soit $(t-u)(t+u) + t^2u^2(u-t) = 0$, donc $t+u-u^2t^2 = 0$. On déduit de la deuxième équation que $(ut)^2 = t+u$, ce qui donne dans la première $1-(ut)^3 = 0$. On doit alors avoir $ut = 1$, puis $u+t = 1$. Les réels t et u sont donc solutions de l'équation $x^2-x+1 = 0$, qui a le mauvais goût de ne pas avoir de solutions réelles (discriminant négatif). Il n'y a donc pas de point double. On pourrait croire sur la courbe que l'origine est un point double, mais en fait, on ne fait que tendre vers l'origine en $\pm\infty$ (d'où l'absence de tangente verticale à cet endroit), le point n'est vraiment atteint qu'une fois (quand $t = 0$).

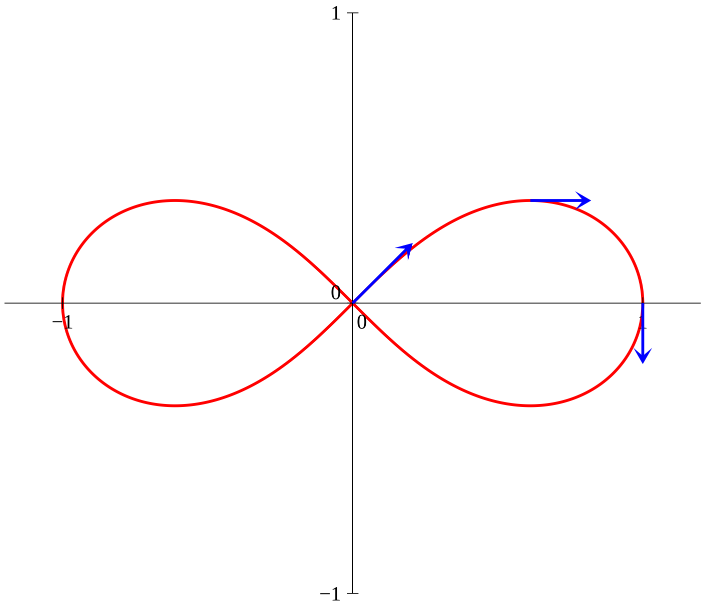


4. Les deux fonctions sont définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et on ne peut pas réduire l'intervalle d'étude (x a le mauvais goût de ne pas être périodique) On peut tout de même constater que $x(t+2\pi) = x(t) + 2\pi$, et $y(t+2\pi) = y(t)$. Cela signifie que la courbe est invariante par translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{i}$, ce qui correspond exactement à ce qui se produit pour une fonction 2π-périodique à valeurs dans $\mathbb{R}$. On calcule $x'(t) = 1 - \cos(t)$, qui s'annule lorsque $t = 2k\pi$, mais reste toujours positive puisque $\cos(t) \leqslant 1$; et $y'(t) = \sin(t)$, qui s'annule pour $t = k\pi$, on a alors $x(k\pi) = k\pi$, et $y(k\pi) = 0$ si k est pair, $y(k\pi) = 2$ si k est impair. On a donc un point stationnaire pour tous les multiples de 2π, situé sur l'axe des abscisses. Comme $x''(t) = \sin(t)$ et $y''(t) = \cos(t)$, on aura $x''(2k\pi) = 0$ et $y''(2k\pi) = 1$, ce qui indique la présence d'une tangente verticale pour chaque point stationnaire. Le vecteur dérivé tierce étant horizontal en $2k\pi$, il n'est pas colinéaire au précédent, tous les points stationnaires sont des points de rebroussement de première espèce. Pas de branche infinie à étudier puisque y n'a pas de limite en $\pm\infty$, et pas de point double possible quand x est strictement croissante, on peut directement tracer la courbe (il s'agit de la courbe parcourue par un point fixé sur la roue d'un vélo en mouvement par exemple) :



5. Les deux fonctions sont définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elles sont évidemment 2π-périodiques, ce qui permet de réduire l'intervalle d'étude à $[-\pi, \pi]$. De plus, x et y sont toutes les deux impaires, on peut restreindre l'étude à $[0; \pi]$ et effectuer une symétrie de la courbe par rapport à l'origine. Enfin, $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$, il y a donc une symétrie supplémentaire par rapport à (Ox) qui permet de restreindre encore et de se limiter à $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. On calcule $x'(t) = \dfrac{\cos(t)(1+\cos^2(t)) + 2\cos(t)\sin^2(t)}{(1+\cos^2(t))^2} = \dfrac{\cos(t)(1+\cos^2(t)) + 2\cos(t)(1-\cos^2(t))}{(1+\cos^2(t))^2} =$

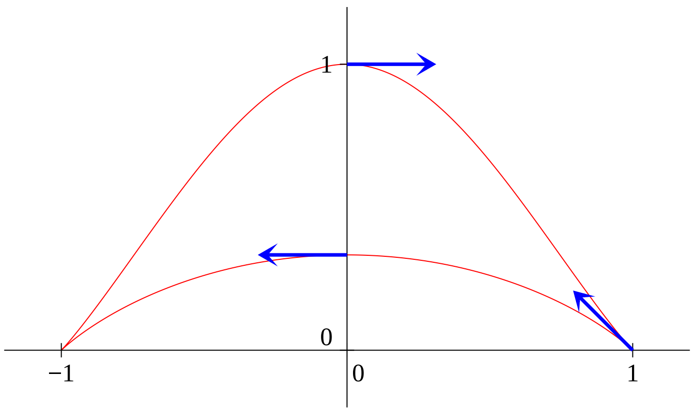
$\dfrac{\cos(t)(3-\cos^2(t))}{(1+\cos^2(t))^2}$, qui ne s'annule qu'en $\dfrac{\pi}{2}$ sur notre intervalle d'étude, et $y'(t) = \dfrac{(\cos^2(t)-\sin^2(t))(1+\cos^2(t))+2\cos^2(t)\sin^2(t)}{(1+\cos^2(t))^2}$. En posant $X = \cos^2(t)$, $y'(t) = \dfrac{(2X-1)(1+X)+2X(1-X)}{(1+X^2)^2} = \dfrac{3X-1}{(1+X^2)^2}$. Cette dérivée s'annule donc lorsque $X = \dfrac{1}{3}$, soit $t = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. On a alors $\sin(t) = \sqrt{1-\cos^2(t)} = \sqrt{1-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, soit $x(t) = \dfrac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4} \simeq 0.61$; et $y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \simeq 0.35$. Pas de point stationnaire, ni de point double sur notre intervalle, pour compléter un peu le tracé (on n'a que deux points à placer pour l'instant), on peut calculer la tangente pour $t = 0$ (où on est situés à l'origine) : $x'(0) = \dfrac{1}{2}$ et $y'(0) = \dfrac{1}{2}$, donc la tangente à l'origine suit la première bissectrice. On obtient la courbe suivante (lemniscate, on la retrouvera sous forme polaire) :



6. Comme $2-\cos(t)$ ne risque pas de s'annuler, les deux fonctions sont définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Les deux fonctions sont 2π-périodiques ; de plus, x est impaire et y paire, ce qui permet de restreindre l'étude à l'intervalle $[0;\pi]$, puis de compléter la courbe par symétrie par rapport à (Oy). On calcule $x'(t) = \cos(t)$, qui ne s'annule qu'en $\dfrac{\pi}{2}$ sur notre intervalle d'étude. Profitons-en pour calculer $x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ et $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Passons à la deuxième coordonnée : $y'(t) = \dfrac{-2\sin(t)\cos(t)(2-\cos(t))+\sin(t)\cos^2(t)}{(2-\cos(t))^2} = \dfrac{\sin(t)\cos(t)(3\cos(t)-4)}{(2-\cos^2(t))^2}$. La parenthèse du numérateur étant toujours négative, la dérivée s'annule en 0, $\dfrac{\pi}{2}$ et π. On peut dresser le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$-$	0	$+$	0
y	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$

Il y a un point stationnaire en $\frac{\pi}{2}$. Comme le calcul des dérivées secondes (sans parler des dérivées tierces pour vérifier qu'il s'agit bien d'un point de rebroussement de première espèce) est pénible, on peut utiliser pour déterminer le vecteur tangent la méthode alternative : $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin(t)(3\cos(t) - 4)}{(2 - \cos^2(t))^2}$, qui a pour limite $\frac{-4}{4} = -1$ en $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que la tangente au point de rebroussement est dirigée par le vecteur $(-1, 1)$ (pente -1).



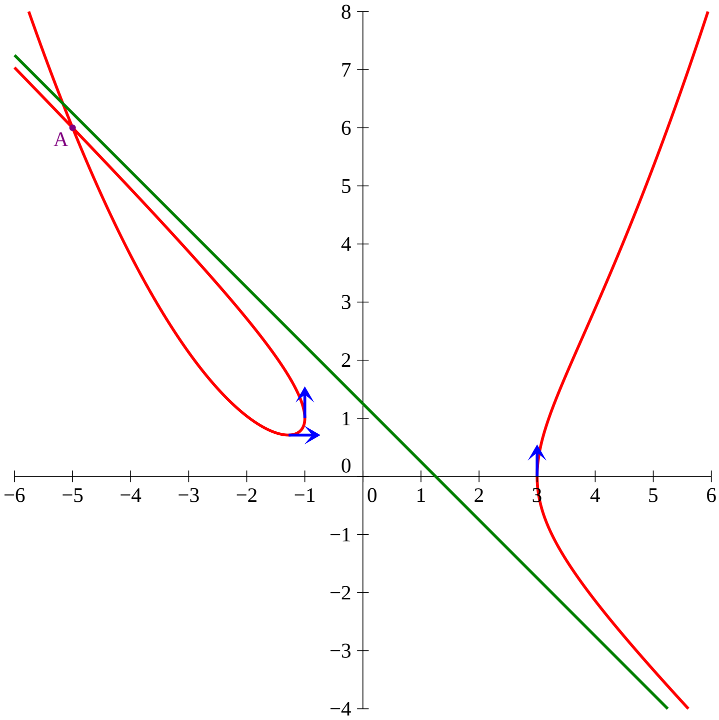
7. Les deux fonctions sont définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$. On calcule $x'(t) = 2 - \frac{2}{(2t-1)^2} = \frac{2(4t^2 - 4t + 1 - 1)}{(2t+1)^2} = \frac{8t(t-1)}{(2t+1)^2}$, ce qui s'annule pour $t = 0$ et $t = 1$. On en profite pour calculer $x(0) = -1$, $y(0) = 1$; $x(1) = 3$ et $y(1) = 0$. Pour la seconde fonction, $y'(t) = 2t + \frac{2}{(2t-1)^2} = \frac{2(4t^3 - 4t^2 + t + 1)}{(2t-1)^2}$. Le numérateur n'a malheureusement pas de racine évidente, le mieux est encore de poser $g(t) = 4t^3 - 4t^2 + t + 1$ et d'essayer d'étudier les variations de g. On calcule donc $g'(t) = 12t^2 - 8t + 1$, tribome dont le discriminant vaut $\Delta = 64 - 48 = 16$, et qui s'annule donc pour $t_1 = \frac{8-4}{24} = \frac{1}{6}$ et $t_2 = \frac{8+4}{24} = \frac{1}{2}$. Comme $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{8} - \frac{4}{4} + \frac{1}{2} + 1 = 1 > 0$, le tableau de variations indique que g s'annulera une seule fois, avant $\frac{1}{6}$ (ensuite, la fonction est décroissante entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$, et toujours positive à cause du calcul qu'on vient d'effectuer en $\frac{1}{2}$, puis croissante et donc toujours positive de $\frac{1}{2}$ jusqu'à $+\infty$). Notons α l'unique valeur pour laquelle $g(\alpha) = 0$, on ne peut pas donner de valeur exacte pour α, mais on peut au moins, pour la placer correctement dans le tableau de variations, constater que $g(0) = 1 > 0$, donc

$\alpha < 0$. La calculatrice permet d'obtenir les valeurs approchées de $x(\alpha)$ et $y(\alpha)$ présentes dans le tableau de variations. Le calcul des limites ne présente aucune difficulté, d'où le tableau suivant :

t	$-\infty$		α		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	-1.28	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0.71	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour les branches infinies, on a en mettant tout au même dénominateur, $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{2t^3 - t^2 - 1}{4t^2 - 2t + 1}$, qui a des limites infinies en $+\infty$ et en $-\infty$. Il y a donc des deux côtés des branches paraboliques de direction (Oy). En $\dfrac{1}{2}$, en utilisant le calcul précédant, $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ a pour limite $\dfrac{\frac{2}{8} - \frac{1}{4} - 1}{\frac{4}{4} - 1 + 1} = -1$. On calcule donc $y(t) + x(t) = 2t + t^2$, qui a pour limite $1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$ en $\dfrac{1}{2}$. Il y a donc une asymptote oblique d'équation $y = x + \dfrac{5}{4}$.

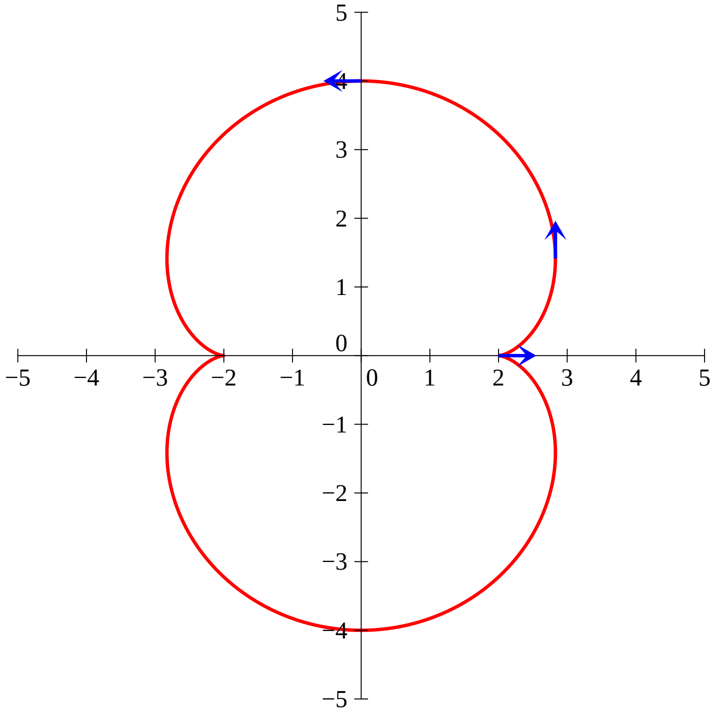
Reste la recherche de points doubles. Commençons par écrire que $x(t) = x(u)$: $2t + \dfrac{1}{2t-1} = 2u + \dfrac{1}{2u-1}$, soit $2(t-u) = \dfrac{1}{2u-1} - \dfrac{1}{2t-1} = \dfrac{2(t-u)}{(2u-1)(2t-1)}$. On simplifie comme toujours par $t - u$, et même ici par $2(t-u)$, et on trouve $4tu - 2t - 2u + 1 = 1$, soit $2tu - (t + u) = 0$. Passons à $y(t) = y(u)$, avec le même type de calcul : $t^2 - u^2 = \dfrac{1}{2t-1} - \dfrac{1}{2u-1}$, soit $(t-u)(t+u) = \dfrac{-2(t-u)}{(2t-1)(2u-1)}$. On obtient alors $(t+u)(4tu - 2(t+u) + 1) = -2$. Comme la première condition implique $4tu - 2(t+u) = 0$, la deuxième devient simplement $t + u = -2$, dont on déduit $2tu = -2$, soit $tu = -1$. Les deux réels t et u sont donc solutions de l'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$, et admet donc deux racines $t = \dfrac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1$, et $u = \dfrac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2}$. On calcule par exemple $x(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{2} - 3} = 2\sqrt{2} - 2 + \dfrac{2\sqrt{2} + 3}{8 - 9} = 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} - 3 = -5$; et $y(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} - 1)^2 - \dfrac{1}{2\sqrt{2} - 3} = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} + 3 = 6$. Le point double est donc le point $A(-5; 6)$.



8. Les deux fonctions sont définies et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elles sont toutes les deux 2π-périodiques, de plus x est paire et y impaire, donc on peut se contenter d'une étude sur $[0;\pi]$, la courbe étant complétée par symétrie par rapport à (Ox). On peut même ajouter que $x(\pi-t) = -x(t)$ et $y(\pi-t) = y(t)$ pour trouver une symétrie par rapport à (Oy) qui permet de se restreindre à $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
On calcule $x'(t) = -3\sin(t)+3\sin(3t) = 3(3\sin(t)-4\sin^3(t)-\sin(t)) = 6\sin(t)(1-2\sin^2(t))$. Cette dérivée s'annule en 0 et lorsque $\sin(t) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire pour $t = \dfrac{\pi}{4}$ (sur notre intervalle d'étude). Pour l'autre coordonnée, $y'(t) = 3\cos(t) - 3\cos(3t) = 12\cos(t)(1-\cos^2(t))$. Cette dérivée s'annule en $\dfrac{\pi}{2}$ et lorsque $\cos(t) = \pm 1$, soit en 0. Il y a donc un point stationnaire pour $t = 0$. On peut calculer $x''(t) = -3\cos(t) + 9\cos(3t)$ et $y''(t) = -3\sin(t) + 9\sin(3t)$ pour constater que le vecteur tangent sera horizontal (en effet, $x''(0) = 6$ et $y''(0) = 0$), et le point est un point de rebroussement de première espèce (un calcul similaire montre que $\overrightarrow{f'''(0)}$ est quant à lui vertical). On calcule les valeurs des points intéressants : $x(0) = 3-1 = 2$; $y(0) = 0$; $x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$; $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$; $x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3+1 = 4$. d'où le tableau suivant :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$	
x	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$+$		$+$	0
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	4

Et la courbe correspondante, dont le nom indique qu'elle est censée ressembler à un rein.



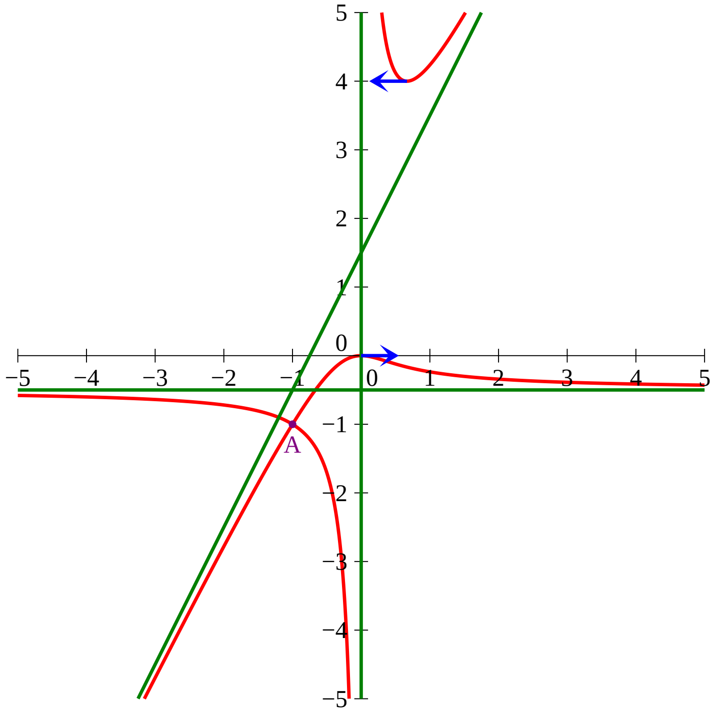
9. La fonction x est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, et y sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. La fonction x est paire, mais y n'a pas de parité, on ne peut pas retreindre l'intervalle d'étude. On calcule $x'(t) = \dfrac{t^2-1-2t\times t}{(t^2-1)^2} = \dfrac{-1-t^2}{(t^2-1)^2}$, qui ne s'annule jamais (cette dérivée est toujours négative) ; puis $y'(t) = \dfrac{2t(t-1)-t^2}{(t-1)^2} = \dfrac{t(t-2)}{(t-1)^2}$, qui s'annule pour $t=0$ et $t=2$. On en ptofite pour calculer $x(0) = y(0) = 0$, et $x(2) = \dfrac{2}{3}$, $y(2) = 4$. Il n'y a pas de point stationnaire. Les calculs de limites sont très classiques :

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$		$-$	
x	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{2}{3}$	↘	0
$y'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

On constate que l'axe des ordonnées est asymptote verticale en $-\infty$ et en $+\infty$, et la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}$ asymptote horizontale quent t tend vers -1. Reste à étudier ce qui se passe en 1, on a alors $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t^2(t^2-1)}{t(t-1)} = \dfrac{t(t+1)(t-1)}{t-1} = t(t+1)$, qui a pour limite 2 quand t tend vers 1. On enchaine donc avec $y(t) - 2x(t) = \dfrac{t^2}{t-1} - \dfrac{2t}{t^2-1} = \dfrac{t^2(t+1)-2t}{t^2-1} = \dfrac{t^3+t^2-2t}{t^2-1}$. Le numérateur se factorisant sous la forme $t(t-1)(t+2)$ (1 est racine évidente, mais on peut aussi passer par un calcul de discriminant après avoir factorisé par t), on obtient $y(t) - 2x(t) =$

$\dfrac{t(t+2)}{t+1}$ qui tend vers $\dfrac{3}{2}$. La droite d'équation $y = 2x + \dfrac{3}{2}$ est donc asymptote oblique à la courbe quand t tend vers 1.

On peut achever l'étude avec la recherche des points doubles. L'équation $x(t) = x(u)$ se met sous la forme $t(u^2-1) = u(t^2-1)$, soit $tu^2 - ut^2 - t + u = 0$. En factorisant par $u - t$ pour éliminer la solution évidente $t = u$, il reste la condition $ut + 1 = 0$. La deuxième condition $y(t) = y(u)$ s'écrit $t^2(u-1) = u^2(t-1)$, soit $t^2u - u^2t + u^2 - t^2$, ce qui donne après factorisation $-tu + u + t = 0$. Puisque $ut = -1$, on a donc $u + t = -1$, et les réels t et u sont solutions de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$, et admet deux racines $t = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $u = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. En utilisant l'équation dont t et u sont solutions, on constate que pour cette valeur de t, on a $x(t) = \dfrac{t}{t^2-1} = \dfrac{t}{-t} = -1$, et $y(t) = \dfrac{t^2}{t-1} = \dfrac{t^2}{-t^2} = -1$. Le point double a donc pour coordonnées $A(-1,-1)$.

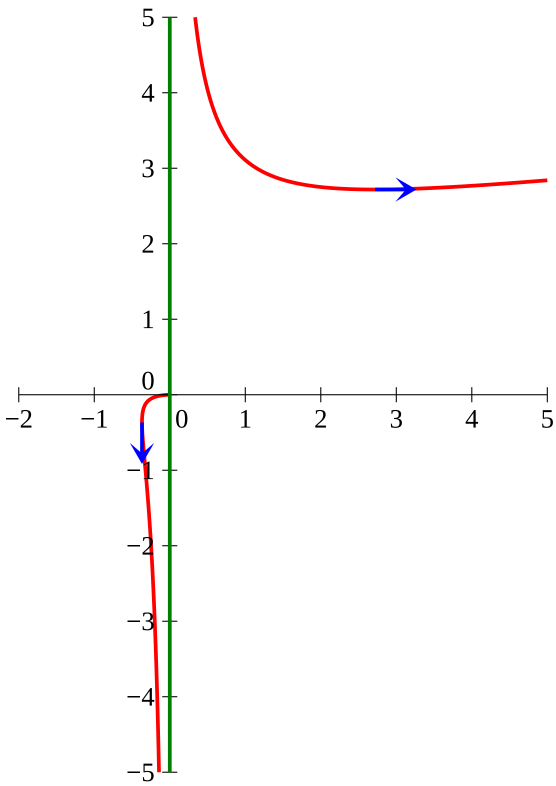


10. Les deux fonctions sont définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (y n'étant évidemment pas définie en 0). On calcule $x'(t) = e^t + te^t = (1+t)e^t$, qui s'annule pour $t = -1$, valeur pour laquelle $x(-1) = -\dfrac{1}{e}$ et $y(-1) = -\dfrac{1}{e}$. Puis $y'(t) = \dfrac{e^t t - e^t}{t^2} = \dfrac{e^t(t-1)}{t^2}$, qui s'annule cette fois-ci pour $t = 1$, avec $x(1) = y(1) = e$.

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

Les calculs de limites ne présentent pas de difficulté particulière (on a simplement besoin de croissance comparée pour x en $-\infty$). On constate la présence d'une asymptote verticale quand t tend vers 0 (il s'agit simplement de l'axe des ordonnées). Pas d'asymptote en $-\infty$ puisqu'on se rapproche simplement de l'origine. En $+\infty$, on a $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{1}{t^2}$ qui tend vers 0, donc il y a une branche parabolique de direction (Ox).

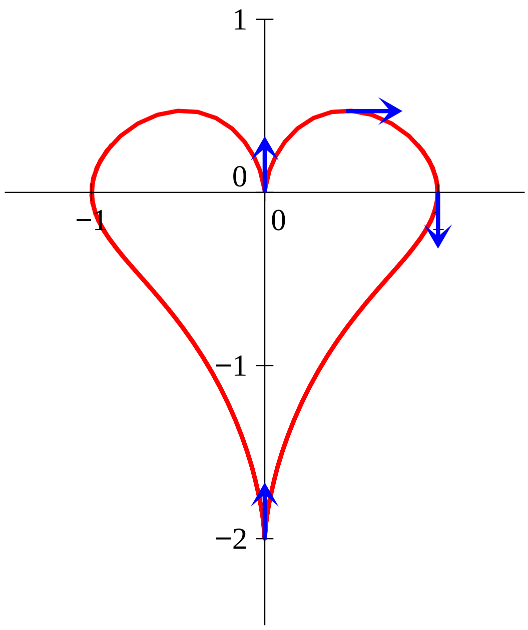
Essayons de rechercher des points doubles, ils doivent vérifier $te^t = ue^u$ et $\dfrac{e^t}{t} = \dfrac{e^u}{u}$. En multipliant la deuxième équation par t^2, on trouve $te^t = \dfrac{t^2}{u}e^u$, ce qui en comparant avec la première équation donne $\dfrac{t^2}{u} = u$, soit $t^2 = u^2$. Si on enlève le cas trivial où $t = u$, il reste donc la possibilité $u = -t$, qui donne alors la condition $te^t = -te^{-t} = -\dfrac{t}{e^t}$. On doit donc avoir $e^t = -\dfrac{1}{e^t}$, ce qui est impossible (les deux membres sont de signe opposé). Il n'y a donc pas de point double.



11. Les deux fonctions coordonnées sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. Par ailleurs, x est impaire et y paire, la courbe sera donc symétrique par rapport à (Oy), et on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0;\pi]$. Les deux fonctions sont dérivables, et $x'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t)$; $y'(t) = -\sin(t) + 4\sin(t)\cos^3(t) = \sin(t)(4\cos^3(t)-1)$. Cette dérivée s'annule (outre en 0 et en π) quand $\cos^3(t) = \frac{1}{4}$, soit $\cos(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, ce qui correspond à une unique valeur t_0 du paramètre t comprise entre 0 et π (et même entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ puisque son cosinus est positif). On calcule $y(t_0) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{4\times\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{4^{\frac{4}{3}}} \simeq 0.47$; et $x(t_0) = \sin^3(t_0) = \sqrt{1-\cos(t_0)^2}^3 = (1-4^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \simeq 0.47$ (mais ce n'est pas exactement la même valeur que pour l'abscisse). On obtient le tableau de variations suivant :

t	0		t_0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$	0	$+$		$+$	0	$-$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	0.47	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	0.47	$\searrow$	0	$\searrow$	-2

Il y a deux points stationnaires, en 0 et en π. Calculons les dérivées suivantes pour déterminer la nature de ces points et les tangentes correspondantes : $x''(t) = -3\sin^3(t) + 6\cos^2(t)\sin(t)$ s'annule en 0 et en π ; $y''(t) = -\cos(t) + 4\cos^4(t) - 12\sin^2(t)\cos^2(t)$, qui vaut 3 en 0 (on aura donc une tangente verticale « vers le haut » en ce point), et 5 en π (où on aura donc également une tangente verticale). On peut vérifier assez facilement que les deux points sont des points de rebroussement de première espèce, calculer la dérivée tierce de x est suffisant (si elle n'est pas nulle en 0 et en π, le vecteur correspondant ne pourra pas être colinéaire avec la tangente verticale). Comme $x'''(t) = -9\sin^2(t)\cos(t) - 12\cos(t)\sin^2(t) + 6\cos^2(t)$, cette dérivée tierce vaut 6 pour nos deux points stationnaires. On peut désormais tracer la courbe :

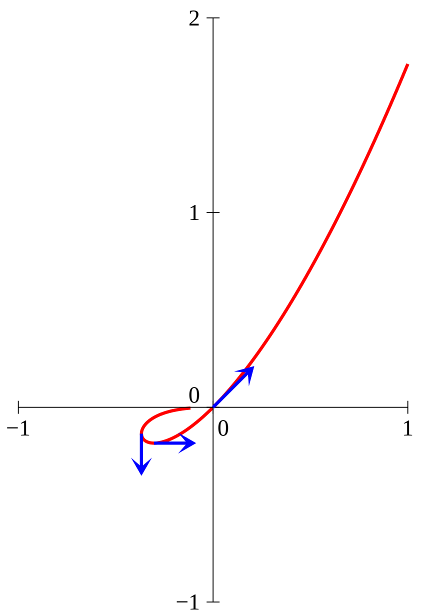


Exercice 4 (**)

Commençons par constater que l'équation ne peut avoir de sens que si $x \neq 0$ et $\dfrac{y}{x} > 0$. On peut en tout cas diviser par x pour obtenir l'équation $x = \dfrac{y}{x} \ln\left(\dfrac{y}{x}\right) = t\ln(t)$. Comme $t = \dfrac{y}{x}$, on a ensuite $y = tx = t^2\ln(t)$. On est bien ramenés à l'étude d'un arc paramétré.
Les deux fonctions coordonnées sont définies et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. On calcule $x'(t) = \ln(t)+1$, qui s'annule pour $t = \dfrac{1}{e}$. On en profite pour calculer $x\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$ et $y\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e^2}$. Pour l'autre coordonnée, $y'(t) = 2t\ln(t)+t = t(1+2\ln(t))$, qui s'annule lorsque $t = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. On a alors $x\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$, et $y\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$. Il n'y a pas de point stationnaire. Par croissance comparée, les limites des deux fonctions coordonnées sont nulles quand t tend vers 0. On pourrait donc effectuer une sorte de prolongement par continuité en ajoutant l'origine au support de l'arc.

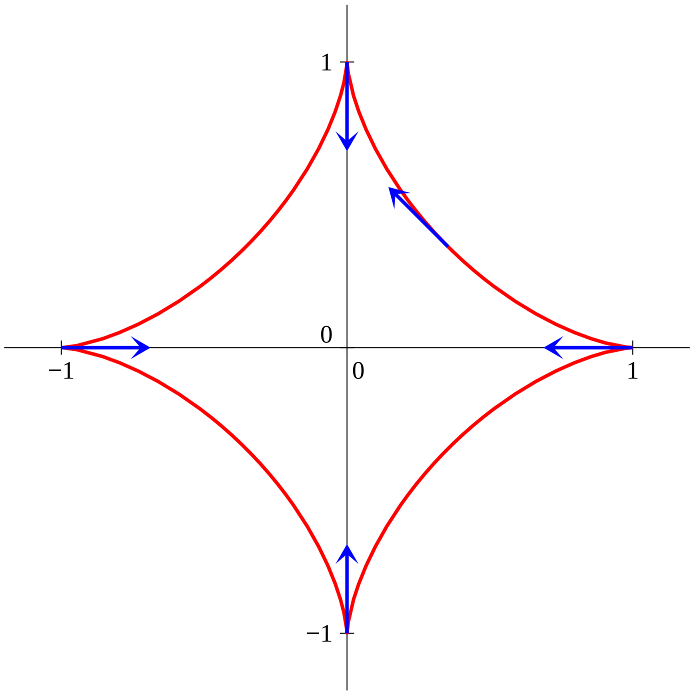
t	0		$\frac{1}{e}$		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	
x	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	$+\infty$

La seule branche infinie potentielle est en $+\infty$, où on a par définition $\dfrac{y(t)}{x(t)} = t$, il y a donc une branche parabolique de direction (Oy). L'étude d'éventuels points doubles n'est pas évidente avec les ln, en fait il n'y en a pas mais on peut constater que, pour $t = 1$, on passe par l'origine du repère. Comme $x'(1) = y'(1) = 1$, on peut même indiquer le vecteur tangent à l'origine.



Exercice 5 (***)

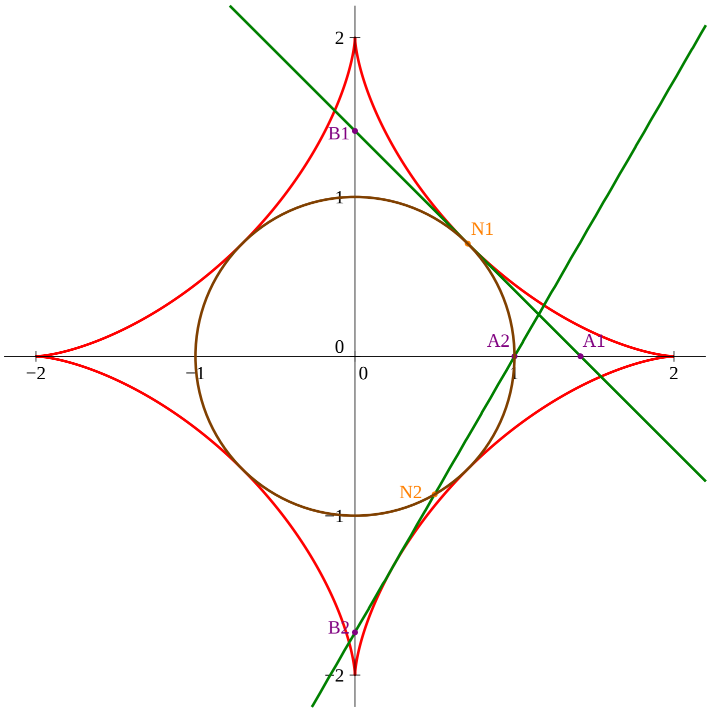
1. L'étude de cette courbe a déjà été faite dans le cours, mais on ne se lasse pas des bonnes choses. Les deux fonctions coordonnées sont 2π-pétiodiques. De plus, x étant paire et y impaire, une symétrie par rapport à (Ox) permet de réduire l'intervalle d'étude à $[0;\pi]$. Encore mieux, $x(\pi-t) = -x(t)$ et $y(\pi-t) = y(t)$, ce qui permet de restreindre encore à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et de compléter par symétrie par rapport à (Oy). Les plus motivés iront même jusqu'à ajouter que $x\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = y(t)$ et $y\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = x(t)$, ce qui prouve l'existence d'une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ et permet de réduire encore un peu l'intervalle. Quoi qu'il en soit, on a toujours $x'(t) = -3a\cos^2(t)\sin(t)$ et $y'(t) = 3a\sin^2(t)\cos(t)$, x est décroissante de a à 0 et y croissante de 0 à a sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, il y a un point de rebroussement de première espèce quand $t = 0$ (je vous laisse revoir les calculs dans le cours), et on peut constater que la tangente en $\frac{\pi}{4}$ est dirigée par le vecteur $(-1,1)$. Avec tout ça, on obtient la courbe suivante (pour $a = 1$) :



2. Les deux points $A(t)$ et $B(t)$ seront bien définis sauf quand la tangente est verticale ou horizontale, ce qui ne se produit qu'aux points stationnaires. Ailleurs, la tangente en $M(t)$ est dirigée par le vecteur $(-3a\cos^2(t)\sin(t), 3a\sin^2(t)\cos(t))$, ou beaucoup plus simplement par le vecteur $(-\cos(t), \sin(t))$. Autrement dit, un vecteur normal à la tangente est le vecteur $(\sin(t), \cos(t))$, et l'équation de la tangente est donc $\sin(t)(x-x_M)+\cos(t)(y-y_M)) = 0$, soit $\sin(t)x+\cos(t)y = a(\sin(t)\cos^3(t)+\cos(t)\sin^3(t)) = a\sin(t)\cos(t)(\cos^2(t)+\sin^2(t)) = a\sin(t)\cos(t)$ (on peut reconnaitre un $\sin(2t)$ dans le membre de droite mais ça ne sert à rien pour le calcul qu'on va effectuer). Lorsque $x = 0$, on trouve donc $\cos(t)y = a\sin(t)\cos(t)$, soit $y = a\sin(t)$. De même, l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses se situe à une abscisse $x = a\cos(t)$. On a donc $A(t)(a\cos(t), 0)$ et $B(t)(0, a\sin(t))$, et $A(t)B(t) = \sqrt{a^2\cos^2(t)+a^2\sin^2(t)} = a$. Des exemples se trouvent sur la figure de la question suivante.

3. Le point $N(t)$ a donc pour coordonnées $(\lambda a\cos(t), (1-\lambda)a\sin(t))$. On reconnait le paramétrage d'une ellipse centrée en O, de demi-axes λa et $(1-\lambda)a$ (le demi-grand axe est λa lorsque $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$).

En particulier, lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$, on constate que le lieu du milieu du segment $[A(t), B(t)]$ est le cercle de centre O et de rayon $\frac{a}{2}$. Ce cercle est dessiné ci-dessous (avec $a = 2$), avec la constructions des points A, B et N lorsque $t = \frac{\pi}{4}$ et $t = -\frac{\pi}{3}$.



4. En reprenant le calcul des vecteurs normaux (ou directeurs) des tangentes à l'astroïde, on constate que les tangentes correspondant aux valeurs t et t' du paramètre sont orthogonales si $\cos(t)\cos(t') + \sin(t)\sin(t') = 0$, c'est-à-dire si $\cos(t - t') = 0$. On a donc $t - t' \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, soit $t' = t + \frac{\pi}{2}$ (quitte à inverser le rôle de t et de t'). Dans ce cas, $\cos(t') = -\sin(t)$ et $\sin(t') = \cos(t)$, et la tangente à la courbe en t' a pour équation $\cos(t)x - \sin(t)y = -a\sin(t)\cos(t)$ (en reprenant le calcul de la question 2). Un point de coordonnées (x, y) appartient donc aux deux tangentes simultanément si $\left\{\begin{array}{rcrcl} \sin(t)x & + & \cos(t)y & = & a\sin(t)\cos(t) \\ \cos(t)x & - & \sin(t)y & = & -a\sin(t)\cos(t) \end{array}\right.$. En multipliant la première ligne par $\sin(t)$ et la deuxième par $\cos(t)$, et en additionnant la tout, on trouve $(\sin^2(t) + \cos^2(t))x = a(\sin^2(t)\cos(t) - \sin(t)\cos^2(t))$, soit $x = a\sin(t)\cos(t)(\sin(t) - \cos(t))$. De même, en multipliant par $\cos(t)$ en haut, et par $\sin(t)$ en bas, et en soustrayant, on a $y = a\sin(t)\cos^2(t) + a\sin^2(t)\cos(t) = a\sin(t)\cos(t)(\cos(t) + \sin(t))$. Finalement, le lieu recherché est paramétré par les équations $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & a\sin(t)\cos(t)(\sin(t) - \cos(t)) \\ y(t) & = & a\sin(t)\cos(t)(\cos(t) + \sin(t)) \end{array}\right.$

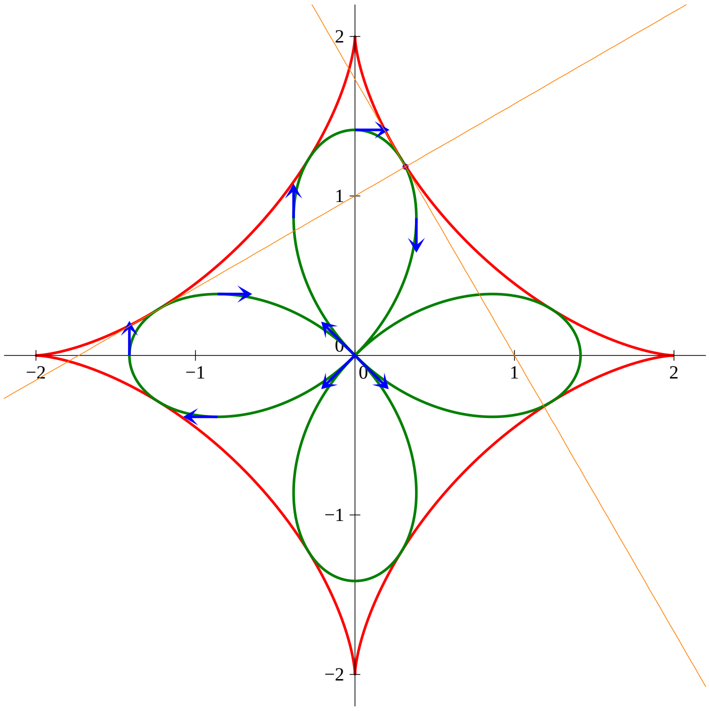
   On ne reconnait rien d'élémentaire dans ces coordonnées, il faut donc étudier la courbe paramétrée correspondante. Les deux fonctions coordonnées sont 2π-périodiques, et $x(\pi + t) = -x(t)$; $y(\pi + t) = -y(t)$, ce qui permet de restreindre l'étude à l'intervalle $[0; \pi]$ avant de compléter la courbe par symétrie par rapport à l'origine (il y a d'autres symétries à trouver pour les plus courageux). On calcule $x'(t) = a\cos^2(t)(\sin(t) - \cos(t)) - a\sin^2(t)(\sin(t) - \cos(t)) + a\sin(t)\cos(t)(\cos(t) + \sin(t)) = a(2\cos^2(t)\sin(t) + 2\sin^2(t)\cos(t) - \cos^3(t) - \sin^3(t)) = a(\cos(t) + \sin(t))(2\cos(t)\sin(t) - \cos^2(t) + \cos(t)\sin(t) - \sin^2(t)) = a(\cos(t) + \sin(t))(3\cos(t)\sin(t) - 1)$. Cette dérivée s'annule lorsque $t = -\frac{3\pi}{4}$ (on a alors $x(t) = -a \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = -\frac{a\sqrt{2}}{2}$, et $y(t) = 0$. Elle s'annule également pour les valeurs beaucoup moins sympathiques pour lesquelles

$\cos(t)\sin(t) = \dfrac{1}{3}$, ce qui implique en élevant au carré $(1-\sin^2(t))\sin^2(t) = \dfrac{1}{9}$, donc $\sin^2(t)$ est solution de l'équation $X^2 - X + \dfrac{1}{9} = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$, et admet pour racines $X_1 = \dfrac{1+\frac{\sqrt{5}}{3}}{2} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{6}$, et $X_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{6}$. Ces deux nombres sont compris entre 0 et 1, et donnent donc deux valeurs possibles pour $\sin(t)$ (qui est toujours positif sur notre intervalle d'étude), soit deux autres valeurs d'annulation de x'. Donner des formules exactes est très compliqué et n'est pas indispensable. On sait que pour ces valeurs, $\cos(t)\sin(t) = \dfrac{1}{3}$, donc $(\cos(t)+\sin(t))^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) + 2\cos(t)\sin(t) = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$, donc $\cos(t)+\sin(t) = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$ (les deux valeurs de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ sont positives pour avoir un produit égal à $\dfrac{1}{3}$), puis $y(t) = a\sin(t)\cos(t)(\cos(t)+\sin(t)) = \dfrac{a\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$. De même, on calcule $(\sin(t)-\cos(t))^2 = 1 - 2\sin(t)\cos(t) = \dfrac{1}{3}$, donc $\sin(t)-\cos(t) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (ici, les deux valeurs sont possibles, elles donneront les abscisses des deux points où x' s'annule), soit $x(t) = \pm\dfrac{a}{3\sqrt{3}}$. On a donc les coordonnées des trois points de la courbe (sur l'intervalle $[0;\pi]$) ayant une tangente verticale (calculs sympathiques, n'est-ce pas ?).

Enchainons avec $y'(t) = a\cos^2(t)(\cos(t)+\sin(t)) - a\sin^2(t)(\cos(t)+\sin(t)) + a\sin(t)\cos(t)(\cos(t)-\sin(t)) = \cos^3(t) - \sin^3(t) + 2\cos^2(t)\sin(t) - 2\cos(t)\sin^2(t) = (\cos(t)-\sin(t))(\cos^2(t) + \cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + 2\sin(t)\cos(t)) = (\cos(t)-\sin(t))(1+3\cos(t)\sin(t))$. De façon très similaire à ce qu'on a fait ci-dessus, on a une racine facile en $\dfrac{\pi}{4}$, pour laquelle on a $x(t) = 0$ et $y(t) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, et deux racines nettement moins sympathiques vérifiant $\cos(t)\sin(t) = -\dfrac{1}{3}$. On calcule comme précédemment $(\cos(t)-\sin(t))^2 = \dfrac{5}{3}$, soit $\cos(t)-\sin(t) = -\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ (cette fois-ci, $\cos(t)$ est négatif et $\sin(t)$ positif) ; et $\cos(t)+\sin(t) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, dont on déduit que $x(t) = -\dfrac{a\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ et $y(t) = \pm\dfrac{a}{3\sqrt{3}}$. Ce sera peut-être plus lisible sur un tableau récapitulatif (les valeurs de t annulant les dérivées sont simplement notées t_1, t_2, t_3 et t_4, leur position par rapport à $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$ sont imposées par la cohérence des valeurs dans le tableau) :

t	0		t_1		$\frac{\pi}{4}$		t_2		t_3		$\frac{3\pi}{4}$		t_4		π
$x'(t)$	-1	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	1
x	0	$\searrow$	$-\frac{a}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{a}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\frac{a\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$-\frac{a\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0
$y'(t)$	1	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	-1
y	0	$\nearrow$	$\frac{a\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$\frac{a\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\frac{a}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{a}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

Pour terminer l'étude, on peut signaler qu'on repasse par l'origine lorsque $t = \dfrac{\pi}{2}$, avec une tangente dirigée par $(-1,-1)$. Voici la courbe correspondante, avec les tangentes à l'astroide orthogonales tracées depuis un des points de la courbe (qui n'est pas tout à fait sur l'astroïde contrairement à ce que la figure peut laisser croire) :



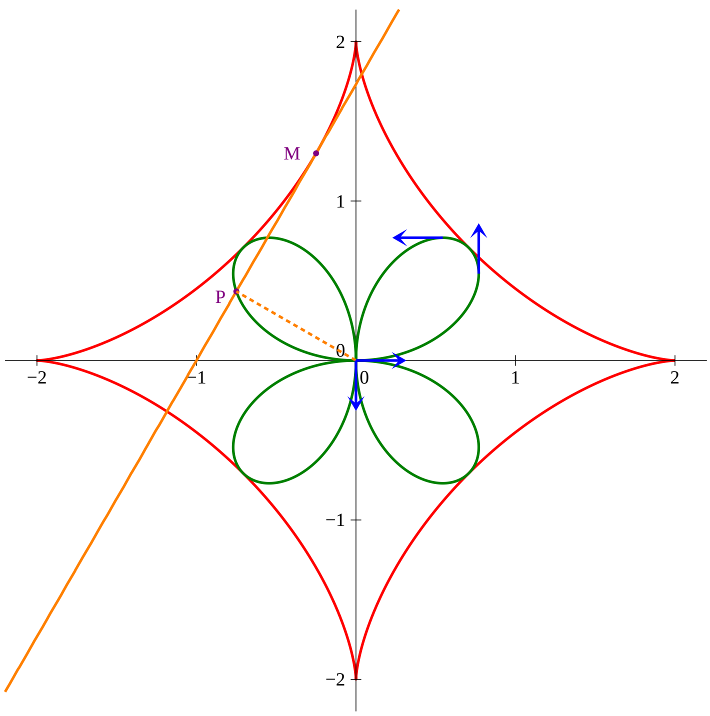
Justement, on nous demande dans l'énoncé de trouver les points communs entre cette courbe et l'astroïde. Au vu de ce qui a été dit sur les tangentes orthogonales, on cherche les valeurs de t pour lesquels le point de l'astroïde appartient à la tangente issue de $M\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$ (ou la même chose avec un $-\frac{\pi}{2}$), qui a pour équation $\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)x+\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)y = a\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$, soit $\cos(t)x-\sin(t)y = -a\cos(t)\sin(t)$. On obtient donc l'équation $a\cos^4(t) - a\sin^4(t) = -a\cos(t)\sin(t)$, soit en simplifiant par a, $(\cos^2(t)+\sin^2(t))(\cos^2(t)-\sin^2(t)) = -\cos(t)\sin(t)$, donc, en multipliant tout par 2, $2\cos(2t) = -\sin(2t)$. Cette condition implique $4\cos^2(2t) = \sin^2(2t) = 1-\cos^2(2t)$, donc $\cos^2(2t) = \pm\frac{1}{5}$. On trouve ainsi des valeurs de t passionnantes comme $\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Comme on peut le constater sur la figure (et comme les symétries permettent de le prouver), il y a au total huit points d'intersection notre courbe et l'astroide.

5. Le vecteur $\overrightarrow{OP(t)}$ doit être normal à la tangente en $M(t)$, donc $P(t)$ a des coordonnées de la forme $(k\sin(t), k\cos(t))$ vu les calculs menés à la question 2. Comme par ailleurs $P(t)$ appartient à la tangente, il vérifie $k\sin^2(t)+k\cos^2(t) = a\sin(t)\cos(t)$, soit $k = a\sin(t)\cos(t)$. Le point P a donc pour coordonnées $(a\sin^2(t)\cos(t), a\cos^2(t)\sin(t))$.
Là encore, on ne reconnait rien de très évident. Allons-y pour une nouvelle étude de courbe paramétrée. Les deux fonctions coordonnées sont 2π-périodiques, x est paire et y impaire, on peut étudier sur $[0;\pi]$ et compléter par symétrie par rapport à (Ox). De plus, $x(\pi-t) = -x(t)$ et $y(\pi-t) = y(t)$ donc il y a une symétrie par rapport à (Oy) qui permet de réduire à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ (les plus motivés diviseront encore une fois l'intervalle). On calcule $x'(t) = 2a\sin(t)\cos^2(t) - a\sin^3(t) = 2a\sin(t)(1-\sin^2(t)) - a\sin^3(t) = 2a\sin(t) - 3a\sin^3(t) = a\sin(t)(2-3\sin^2(t))$. Cette dérivée s'annule en 0, mais aussi quand $\sin^2(t) = \frac{2}{3}$. On a alors $\cos(t) = \sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. On peut alors calculer les coordonnées du point correspondant sur l'arc : $x(t) = a\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{3\sqrt{3}}$,

et $y(t) = a \times \frac{1}{3} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$. Passons à la deuxième coordonnée : $y'(t) = -2a\cos(t)\sin^2(t) + a\cos^3(t) = a\cos(t)(3\cos^2(t) - 2)$. Cette deuxième dérivée s'annule en $\frac{\pi}{2}$, mais également lorsque $\cos^2(t) = \frac{2}{3}$. On calcule de façon très similaire à ce qu'on vient de faire les coordonnées correspondantes, qui sont d'ailleurs les mêmes, mais inversées. On peut résumer tout cela dans le tableau suivant :

t	0		$\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$		$\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$		$-$	
x	0	$\nearrow$	$\frac{2a}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$\frac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$\frac{2a}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

On peut enfin tracer la courbe suivante (j'ai indiqué la construction du point P lorsque $t = \frac{2\pi}{3}$). C'est joli non ?



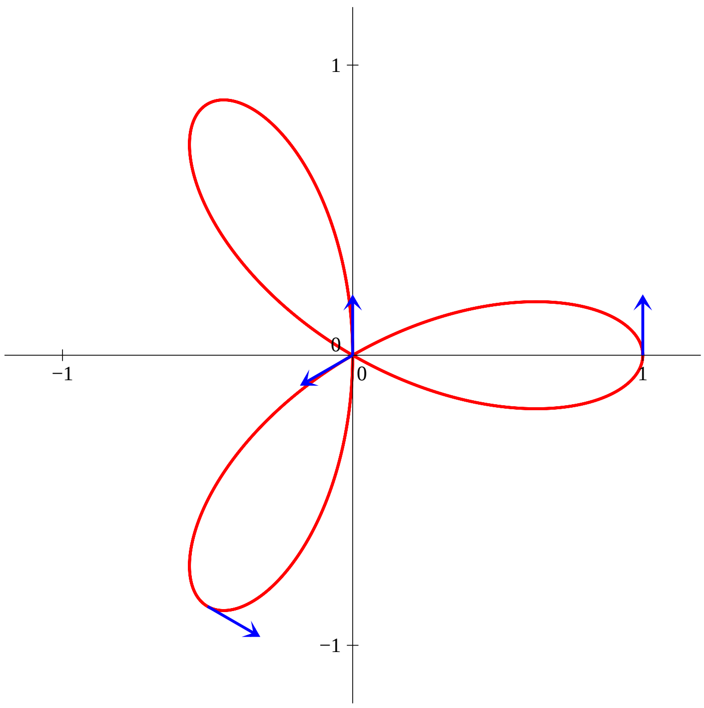
Exercice 6 (* à ***)

1. La fonction est 2π-périodique, on restreint l'étude à $[-\pi; \pi]$. Elle est paire, on peut se contenter de $[0; \pi]$ en complétant par symétrie par rapport à (Ox). De plus, $\rho(\pi - \theta) = \cos(3\pi - 3\theta) =$

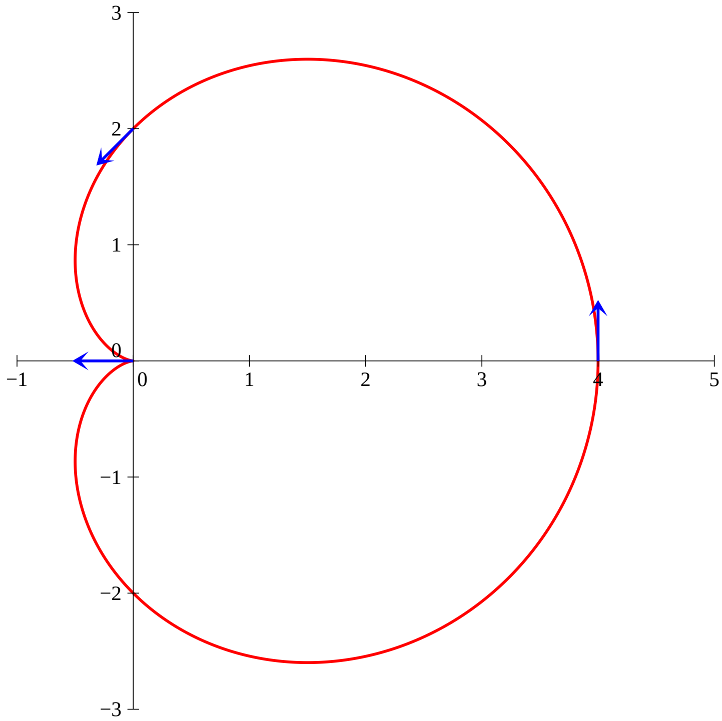
$-\cos(3\theta) = -\rho(\theta)$, ce qui indique également une symétrie par rapport à (Ox) et permet surtout de réduire encore l'intervalle à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction est évidemment dérivable, et $\rho'(\theta) = -3\sin(3\theta)$, qui s'annule lorsque $3\theta \equiv 0[\pi]$, soit $\theta \equiv 0\left[\frac{\pi}{3}\right]$, donc (sur notre intervalle d'étude) en 0 et en $\frac{\pi}{3}$. La fonction elle-même s'annule en $\frac{\pi}{6}$ et en $\frac{\pi}{2}$. On peut dresser le tableau de variations suivant :

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$\rho'(\theta)$	0	$-$	-3	$-$	0	$+$	3
ρ	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

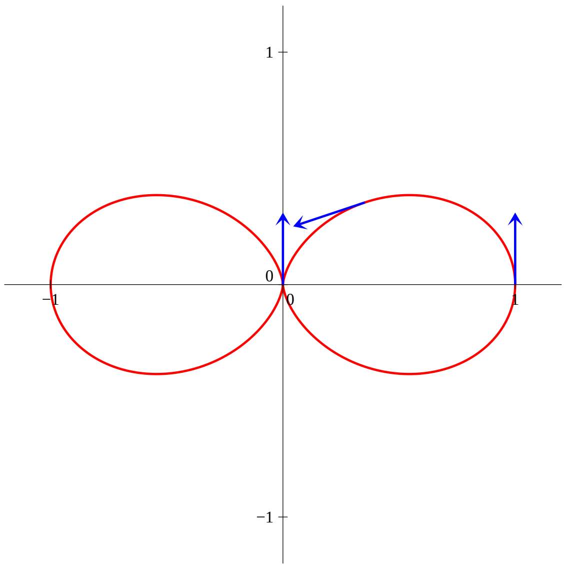
Les quatre points obtenus ont des tangentes radiales ou orthoradiales, il n'y a pas de point stationnaire, on peut tracer tranquillement la courbe :



2. La fonction est 2π-périodique et paire, on étudie sur $[0; \pi]$ et on complètera par symétrie par rapport à (Ox). On calcule $\rho'(\theta) = -a\sin(\theta)$, qui est toujours négative sur $[0; \pi]$, s'annulant en 0 et en π. La fonction elle-même s'annule pour $\theta = \pi$, où on a donc un point stationnaire. La fonction ρ étant toujours positive puisque $1 + \cos(\theta) \geqslant 0$, il n'y a pas de changement de signe, on est en présence d'un point de rebroussement de première espèce. Comme on ne dispose que de très peu de points pour tracer la courbe, on peut regarder ce qui se passe en $\frac{\pi}{2}$: $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$ (en 0, $\rho(0) = 2a$), et $\rho'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a$. Le vecteur tangent en $\frac{\pi}{2}$ sera donc proportionnel au vecteur $(-1, -1)$ (dans le repère cartésien). Voici la courbe pour $a = 2$:

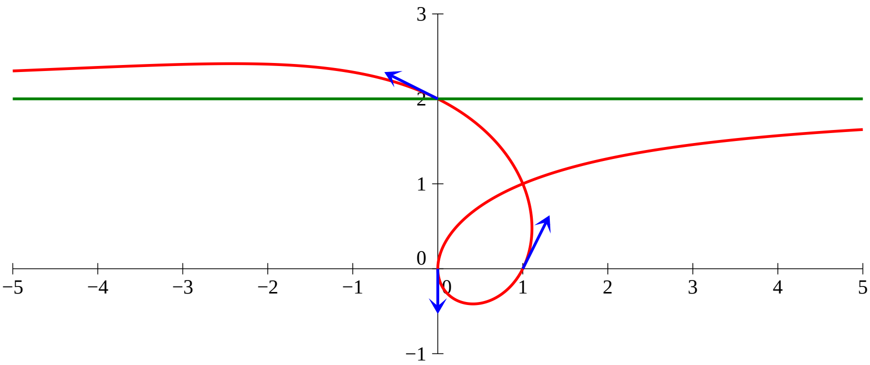


3. La fonction est π-périodique (à cause du carré), donc la courbe sera symétrique par rapport à l'origine. De plus, elle est paire, on peut donc restreindre l'étude à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et compléter par une symétrie par rapport à (Ox) (en plus de celle par rapport à O). On calcule $\rho'(\theta) = -2\sin(\theta)\cos(\theta)$, qui s'annule en 0 et en $\frac{\pi}{2}$. La fonction elle-même s'annule en $\frac{\pi}{2}$, qui constitue donc un point singulier qui sera un point de rebroussement de première espèce (la fonction étant bien sûr toujours positivs). On a par ailleurs $\rho(0) = 1$, on peut tracer la courbe (le rebroussement n'est pas vraiment apparent car le sens de parcours de la courbe n'est pas évident : entre 0 et π, on parcourt les deux morceaux situés au-dessus de l'axe des abscisses). Comme on manque de point on peut calculer $\rho\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, et $\rho'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$.



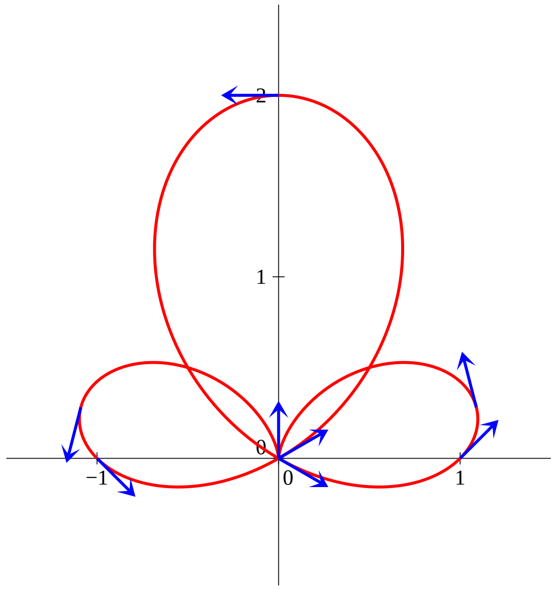
4. Cette fonction n'est pas définie lorsque $\frac{\theta}{2} \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, soit $\theta \equiv \pi[2\pi]$. Elle est par ailleurs 2π-périodique puisque la fonction tan est π-périodique. Pas d'autre symétrie en vue, on va étudier

sur $]-\pi;\pi[$. On calcule $\rho'(\theta) = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)$, qui est toujours strictement positive. Les limites de la tangente permettent d'obtenir $\lim\limits_{\theta\to\pi^-} \rho(\theta) = +\infty$, et $\lim\limits_{\theta\to-\pi^+} \rho(\theta) = -\infty$. La fonction s'annule donc nécessairement une fois sur notre intervalle d'étude, quand $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = -1$, soit $\dfrac{\theta}{2} = -\dfrac{\pi}{4}$, donc $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$. On peut étudier la branche infinie en π (c'est identique en $-\pi$) en calculant $\rho(\theta)\sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)\left(1+\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right) = -\sin(\theta) - \sin(\theta)\dfrac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})}$. En utilisant les formules de duplication, $\sin(\theta) = 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, ce qui permet de simplifier en $-\sin(\theta) - 2\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, qui a pour limite -2 quand θ tend vers $\pm\pi$. On a donc une asymptote de direction horizontale, à distance -2 de l'axe des abscisses dans la direction de $\overrightarrow{v}_\pi = -\overrightarrow{j}$. Autrement dit, l'asymptote est la droite d'équation $y = 2$.
Pour compléter l'étude, on va indiquer deux points supplémentaires : quand $\theta = 0$, $\rho(0) = 1$ et $\rho'(0) = \dfrac{1}{2}$. La tangente en 0 est donc dirigée par le vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u}_0 + \overrightarrow{v}_0 = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$. Deuxième point pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, on a alors $\rho(\theta) = 1 + \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$, et $\rho'(\theta) = \dfrac{1}{2}(1+1) = 1$. La tangente en ce point est donc dirigée par $\overrightarrow{u}_{\frac{\pi}{2}} + 2\overrightarrow{v}_{\frac{\pi}{2}} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.

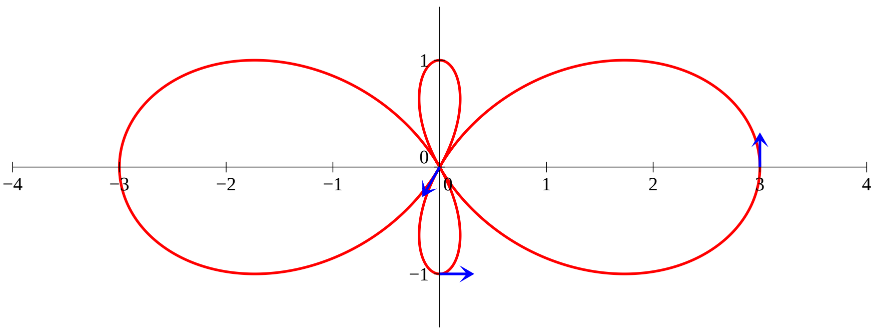


5. La fonction est 2π-périodique mais n'a pas de parité particulière. Il existe une symétrie, mais pas si simple à trouver : $\rho(\pi-\theta) = \rho(\theta)$, ce qui donne une symétrie par rapport à (Oy) et permet de se contenter d'une étude sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ (attention, on ne peut pas prendre $[0;\pi]$ qui est invariant par la symétrie). Nous allons quand même faire l'étude sur $[0;2\pi]$. On calcule $\rho'(\theta) = \cos(\theta) - 2\sin(2\theta) = \cos(\theta) - 4\sin(\theta)\cos(\theta) = \cos(\theta)(1-4\sin(\theta))$. La dérivée s'annule en $\dfrac{\pi}{2}$ et en $\dfrac{3\pi}{2}$, mais aussi lorsque $\sin(\theta) = \dfrac{1}{4}$, ce qui se produit pour deux valeurs $\theta_1 < \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2} < \theta_2 < \pi$. Pour ces deux valeurs, on a $\rho(\theta) = \sin(\theta) + 1 - 2\sin^2(\theta) = \dfrac{1}{4} + 1 - \dfrac{2}{16} = \dfrac{9}{8}$. On ajoutera les valeurs faciles en 0, π et 2π dans le tableau de variations. Notons par ailleurs que $\rho(\theta) = 0$ lorsque $\sin(\theta)$ est solution de l'équation $X + 1 - 2X^2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$, et admet pour racines $X_1 = \dfrac{-1-3}{-4} = 1$, et $X_2 = \dfrac{-1+3}{-4} = -\dfrac{1}{2}$. Autrement dit, ρ s'annule pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (qui sera un point stationnaire, en l'occurence un point de rebroussement de première espèce au vu du tableau de variations), et pour $\theta = \dfrac{7\pi}{6}$ et $\theta = \dfrac{11\pi}{6}$. Ouf, voilà le tableau :

θ	0		θ_1		$\frac{\pi}{2}$		θ_2		π		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$\rho'(\theta)$	1	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	-1	$-$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-$	0	$+$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$+$	1
ρ	1	$\nearrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

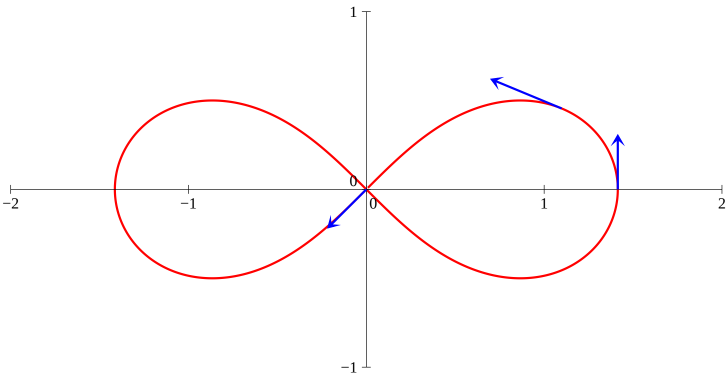


6. En utilisant les formules de triplication, on peut écrire $\rho(\theta) = 3 - 4\sin^2(\theta)$, ce qui prouve que la fonction est toujours définie (et accessoirement simplifie les calculs). La fonction est 2π-périodique et paire, on peut étudier sur $[0;\pi]$ et compléter par symétrie par rapport à (Ox). On a également $\rho(\pi-\theta) = \rho(\theta)$, donc il y a une seconde symétrie, par rapport à (Oy), qui permet de restreindre encore à $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. On calcule $\rho'(\theta) = -8\sin(\theta)\cos(\theta)$, qui est toujours négative sur notre intervalle d'étude, mais s'annule en 0 et en $\frac{\pi}{2}$. La fonction elle-même s'annule en $\frac{\pi}{3}$ (pour cette valeur il est plus facile de regarder les valeurs d'annulation de $\sin(3\theta)$). On calcule $\rho(0) = 3$ et $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et on trace la courbe :



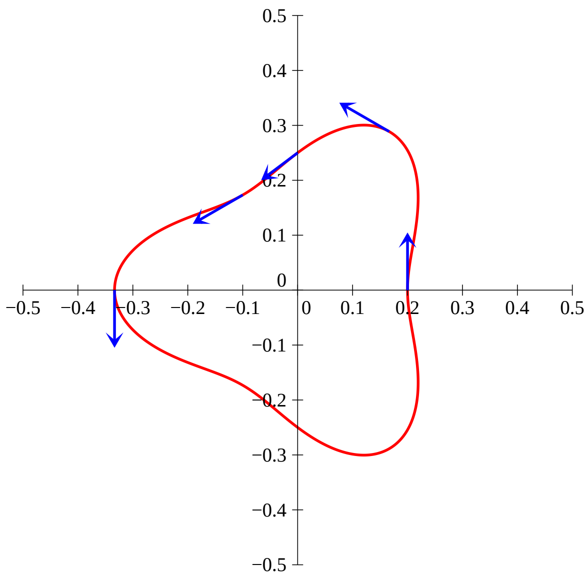
7. Cette fonction est définie lorsque $2\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] [2\pi]$, soit $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}\right] [\pi]$. Elle est par ailleurs 2π-périodique et paire, ce qui permet de se restreindre à $[0;\pi]$ (enfin, plutôt aux morceaux dans cet intervalle où la fonction est définie). On peut même exploiter $\rho(\pi-\theta) = \rho(\theta)$ (puisque $\cos(2\pi - 2\theta) = \cos(-2\theta) = \cos(2\theta)$) pour constater que la courbe est en fait symétrique par

rapport à chacun des deux axes, et étudier seulement sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ (inutile d'aller plus loin, ρ n'est pas définie entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$). On calcule $\rho'(\theta) = \frac{-4\sin(2\theta)}{2\sqrt{2\cos(2\theta)}} = -\frac{2\sin(2\theta)}{\sqrt{2\cos(2\theta)}}$. Cette dérivée est négative sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right[$, mais n'est pas définie en $\frac{\pi}{4}$. On admettra que pour cette valeur, pour laquelle ρ s'annule, on a tout de même une tangente radiale. La dérivée, quant à elle, s'annule en 0, où on a $\rho(0) = \sqrt{2}$. Pour compléter un peu, on peut calculer $\rho\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\sqrt{2}}$, et $\rho'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}}} = -\sqrt{\sqrt{2}}$ (autrement dit, la tangente sera dirigée par $-\overrightarrow{u}_{\frac{\pi}{8}} + \overrightarrow{v}_{\frac{\pi}{8}}$). La courbe obtenue est consituée de l'ensemble des points M du plan vérifiant $MF \times MF' = 1$, en posant $F(1,0)$ et $F'(-1,0)$. C'est par exemple évident pour l'origine pour laquelle on a $MF = MF' = 1$, mais on peut le constater sur le « sommet » $A(0, \sqrt{2})$: on a alors $MF = \sqrt{2}-1$ et $MF' = \sqrt{2}+1$, soit $MF \times MF' = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 2-1 = 1$.



8. La fonction est définie partout, 2π-périodique (et même $\frac{2\pi}{3}$ périodique, mais l'invariance de la courbe par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ n'est pas vraiment évidente à exploiter) et paire, on va étudier sur $[0; \pi]$ et compléter par symétrie par rapport à (Ox). On calcule $\rho'(\theta) = \frac{3\sin(3\theta)}{(4+3\cos(\theta))^2}$, Cette dérivée est du signe de $\sin(3\theta)$, donc change de signe en 0, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ (et π). On calcule sans difficulté $\rho(0) = \frac{1}{5}$, $\rho\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$, $\rho\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{5}$ et $\rho(\pi) = \frac{1}{3}$ (cohérent avec la période $\frac{2\pi}{3}$). La fonction elle-même ne s'annule évidemment jamais, on va ajouter une valeur simple à calculer : $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}$ et $\rho'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{16}$.

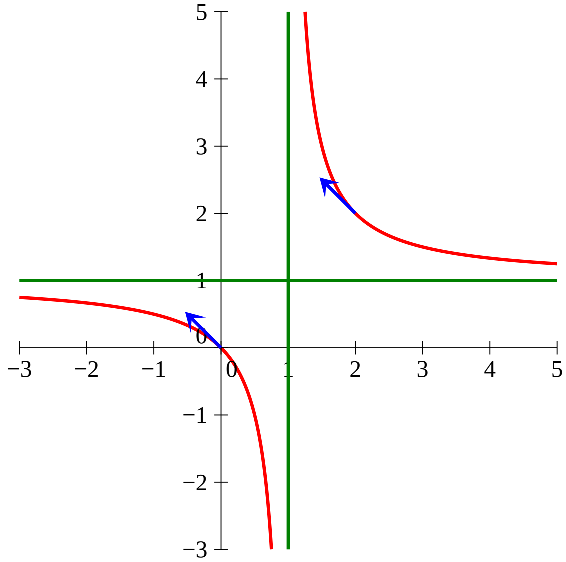
θ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\rho'(\theta)$	0	$+$	0	$-$	$-\frac{3}{16}$	$-$	0	$+$	0
ρ	$\frac{1}{5}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{5}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$



9. La fonction n'est pas définie lorsque le sinus ou le cosinus s'annule donc $\mathcal{D}_\rho = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Elle est 2π périodique, et $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$, ce qui permet de se restreindre à $[0;\pi]$ (la courbe parcourt ensuite la même trajectoire, même pas besoin de symétrie). On calcule $\rho'(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} + \frac{-\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \frac{\sin^3(\theta) - \cos^3(\theta)}{\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)}$. Cette dérivée est simplement du même signe que $\sin(\theta) - \cos(\theta)$, elle s'annule en particulier en $\frac{\pi}{4}$ (sur notre intervalle d'étude, c'est la seule valeur), où on a $\rho\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. La fonction elle-même s'annule quand $\sin(\theta) = -\cos(\theta)$, donc en $\frac{3\pi}{4}$.
Il y a deux branches infinies à étudier. En 0 (ou en π, c'est la même), on a $\rho(\theta)\sin(\theta) = \tan(\theta) + 1$, qui a donc pour limite 1. On en déduit la présence d'une asymptote horizontale d'équation $y = 1$. De même, en $\frac{\pi}{2}$, $\rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\rho(\theta)\cos(\theta) = -1 - \frac{1}{\tan(\theta)}$, qui a cette fois-ci pour limite -1. Il y a donc une deuxième asymptote, verticale, d'équation $x = 1$ (on est à distance -1 dans la direction de $\overrightarrow{v}_{\frac{\pi}{2}} = -\overrightarrow{i}$).

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\rho'(\theta)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	$2\sqrt{2}$	$+$	‖
ρ	‖ $+\infty$	↘	$2\sqrt{2}$	↗ $+\infty$	‖ $-\infty$	↗	0	↗ $+\infty$	‖

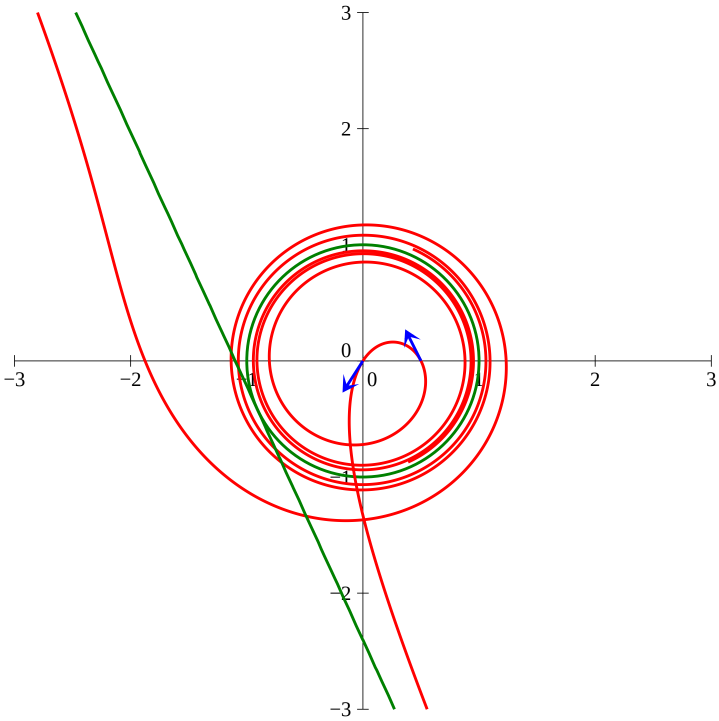
Tout ça ressemble fort à une hyperbole ...



10. Il fallait bien mettre dans le lot une courbe un peu moins ordinaire. La fonction est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. Elle a pour dérivée $\rho'(\theta) = -\dfrac{1}{(\theta-2)^2}$, qui est toujours négative. La fonction s'annule par ailleurs lorsque $\theta - 2 = -1$, soit $\theta = 1$ (un radiant, ce qui n'est pas très pratique à placer comme angle). En 0, par exemple, on a $\rho(0) = \dfrac{1}{2}$, et $\rho'(0) = -\dfrac{1}{4}$.

θ	$-\infty$		1		2		$+\infty$
ρ	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

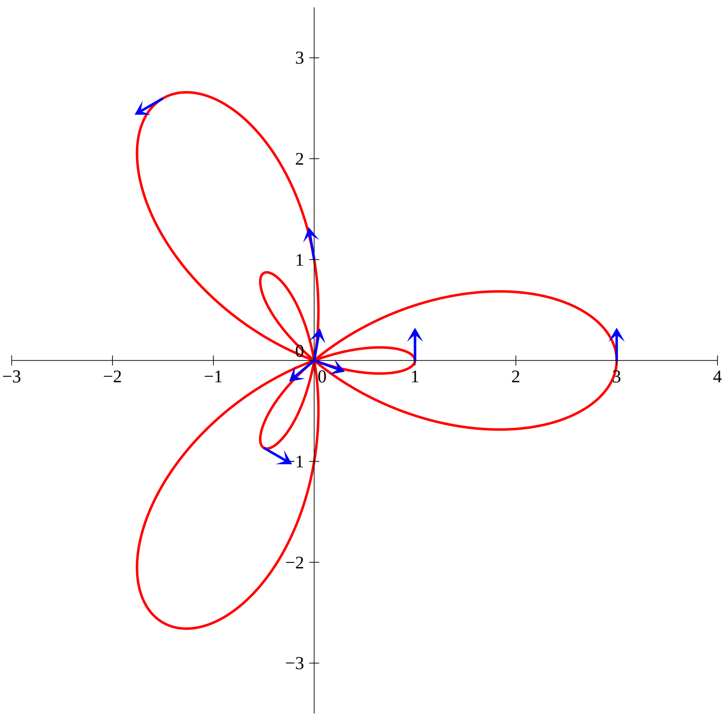
Lorsque θ tend vers 2, on a $\rho(\theta)\sin(\theta-2) = \sin(\theta-2) + \dfrac{\sin(\theta-2)}{\theta-2}$. Le premier terme tend 0 et le second vers 1 (limite classique $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$), il y a donc une asymptote oblique d'équation normale $x\sin(2) - y\cos(2) - 1 = 0$ (attention, dans l'équation normale, l'angle qui apparait dans la formule correspond à l'angle entre l'horizontale et la normale à la droite considérée, d'où ici le signe $-$ devant le terme en y et l'inversion du sin et du cos). On a par ailleurs, en $\pm\infty$, le cercle trigonométrique qui est cercle asymptote à la courbe. Pas facile de faire un tracé raisonnable sans outil informatique sous la main :



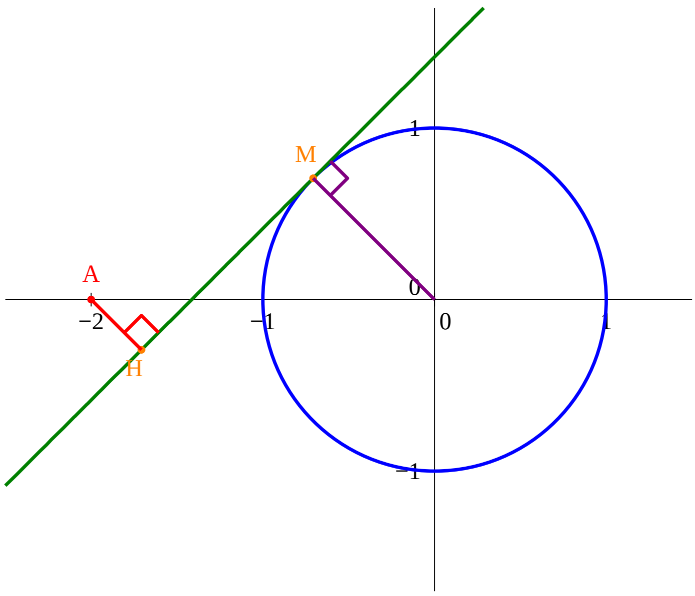
11. La fonction est 2π-périodique (et même un peu moins, comme pour la numéro 8), et paire, on va donc étudier sur $[0;\pi]$ et compléter par symétrie par rapport à (Ox). La dérivée $\rho'(\theta) = -6\sin(3\theta)$ s'annule pour $\theta \equiv 0 \left[\dfrac{\pi}{3}\right]$, la fonction elle-même s'annule lorsque $\cos(3\theta) = -\dfrac{1}{2}$, donc $3\theta \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$, ce qui donne dans notre intervalle $\theta = \dfrac{2\pi}{9}$ et $\theta = \dfrac{8\pi}{9}$; ou bien $3\theta \equiv \dfrac{4\pi}{3}[2\pi]$, soit $\theta = \dfrac{4\pi}{9}$ (les autres valeurs sont supérieures à π). On peut dresser le tableau suivant :

θ	0		$\frac{2\pi}{9}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{9}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{8\pi}{9}$		π
$\rho'(\theta)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
ρ	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Pour compléter, on peut toujours calculer $\rho\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\rho'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 6$.



Exercice 7 (**)

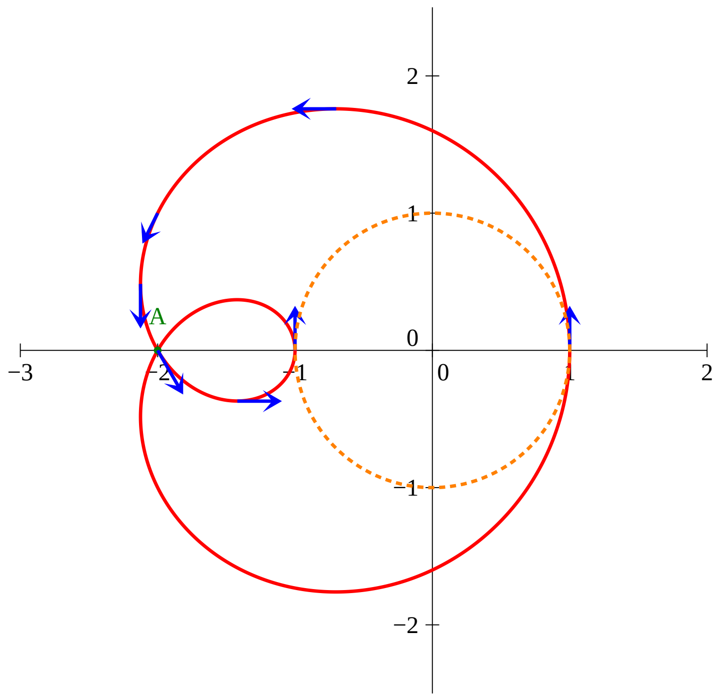


Si on paramètre le cercle trigonométrique par un angle t variant entre 0 et 2π, la tangente en son point de paramètre t a pour équation $x\cos(t) + y\sin(t) = 1$. En notant $H(x, y)$ le projeté orthogonal recherché et $M(\cos(t), \sin(t))$ le point du cercle où on a tracé la tangente, on doit par ailleurs avoir $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{AH}$ qui sont colinéaires (puisque tous deux sont orthogonaux à la direction de la tangente), soit $\det(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}) = (x+2)\sin(t) + y\cos(t) = 0$. Le système constitué des deux équations obtenues se résout aisément, on peut par exemple multiplier la première équation par $\cos(t)$ et la seconde par $\sin(t)$, puis additionner les deux pour trouver $x(\cos^2(t) + \sin^2(t)) + 2\sin^2(t) = \cos(t)$, soit $x = \cos(t) - 2\sin^2(t)$. De même, en multipliant par $\sin(t)$ la première, par $\cos(t)$ la deuxième et en soustrayant, on a cette fois $y = \sin(\theta)(1 + 2\cos(\theta))$. Il ne reste donc plus qu'à étudier la courbe paramétrée $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos(t) - 2\sin^2(t) \\ y(t) & = & \sin(t)(1 + 2\cos(t)) \end{array}\right.$. On peut constater qu'on obtient les bonnes coordonnées du point H pour des valeurs simples de t. Par exemple, pour $t = \dfrac{\pi}{2}$, on trouve $H(-2, 1)$, ce qui est normal pusique la tangente au cercle est alors horizontale d'équation $y = 1$.

Les deux fonctions sont évidemment 2π-périodiques. De plus, x est paire et y impaire (ce qui doit vous sembler normal vu la construction effectuée et la position du point A sur l'axe des abscisses), on peut donc étudier sur $[0; \pi]$ et compléter la courbe par symétrie par rapport à (Ox). On calcule $x'(t) = -\sin(t) - 4\sin(t)\cos(t) = -\sin(t)(1 + 4\cos(t))$. Cette dérivée est (sur notre intervalle) du signe opposé à $1 + 4\cos(t)$, elle s'annule en 0 et π mais aussi lorsque $\cos(t) = -\dfrac{1}{4}$ (ce qui se produit une fois sur notre intervalle). On a alors $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) = \dfrac{15}{16}$, soit $\sin(t) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$. On en déduit que $x(t) = -\dfrac{1}{4} - 2 \times \dfrac{15}{16} = -\dfrac{17}{8}$, et $y(t) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{15}}{8} \simeq 0.48$. Ensuite, on passe à $y'(t) = \cos(t)(1 + 2\cos(t)) - 2\sin^2(t) = \cos(t) + 2\cos^2(t) - 2 + 2\cos^2(t) = 4\cos^2(t) + \cos(t) - 2$. En posant $X = \cos(t)$, on a un trinôme de discriminant $\Delta = 1 + 32 = 33$, admettant deux racines $X_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{33}}{8}$, et $X_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{33}}{8}$. Ces valeurs absolument réjouissantes donnent deux possibilités d'annulation pour $y(t)$ (elles sont toutes les deux entre -1 et 1 puisque $\sqrt{33} \in [5; 6]$), en des valeurs t_1 et t_2 qui elle-mêmes nous donnent deux points de la courbe ayant des tangentes horizontales, de coordonnées approximatives (faire des calculs exacts est ici vraiment sans intérêt) $(-0.7, 1.76)$ et $(-1.42, -0.37)$.

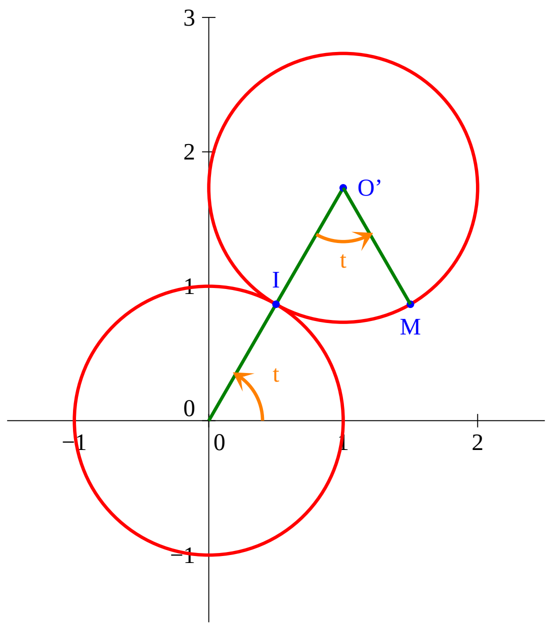
t	0		t_1		$\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$		t_2		π
$x'(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
x	1	↘	-0.7	↘	$-\frac{17}{8}$	↗	-1.42	↗	-1
$y'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	0	↗	1.76	↘	0.48	↘	-0.37	↗	0

On peut ajouter le vecteur tangent pour $t = \dfrac{\pi}{2}$ (où on a déjà vu que la courbe passait par le point $(-2, 1)$) : $x'(t) = -1$ et $y'(t) = -2$, donc la tangente est dirigée par $(-1, -2)$. On peut aussi constater qu'on passe par le point A lorsque $t = \dfrac{2\pi}{3}$, et qu'on a alors $x'(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $y'(t) = -\dfrac{3}{2}$. La tangente est donc dirigée par $(\sqrt{3}, -3)$. Voici une allure de la courbe finale :



Exercice 8 (**)

Pour fixer les choses, on va prendre pour le cercle fixe le cercle trigonométrique, et on va supposer que le cercle mobile se situe initialement à droite du cercle trigonométrique (ayant donc pour centre $(2, 0)$), et que le point M dont on cherche à étudier le mouvement est initialement le point de tangence des deux cercles (donc le point de coordonnées $(1, 0)$). On utilise le paramétrage classique du cercle trigonométrique $x = \cos(t)$ et $y = \sin(t)$, et on peut alors tracer la figure suivante (ici avec $t = \dfrac{\pi}{3}$) :

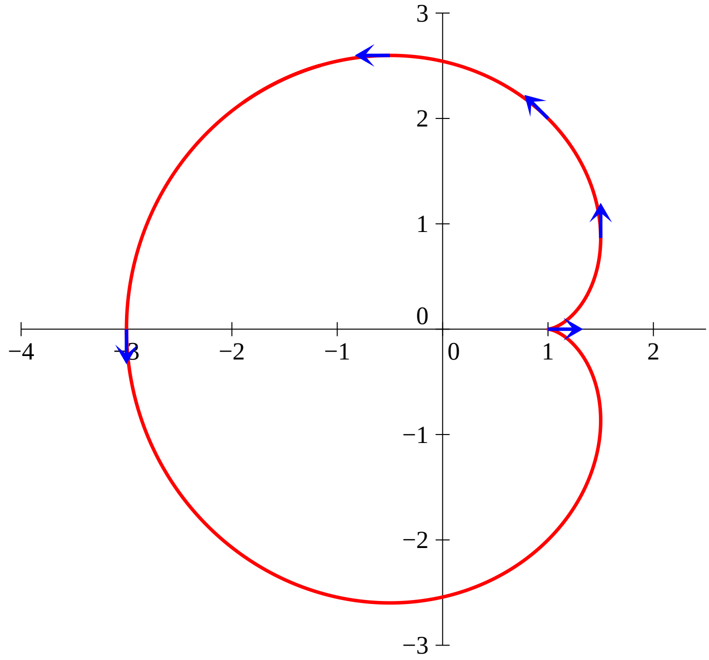


En notant I le milieu du segment reliant le centre des deux cercles, on aura $I(\cos(t), \sin(t))$ et $O'(2\cos(t), 2\sin(t))$. Par ailleurs, puisqu'on roule sans glisser, l'angle $(\widehat{\overrightarrow{O'I}, \overrightarrow{O'M}}) = t$. Autrement dit, $(\widehat{\overrightarrow{O'M}, \overrightarrow{i}}) = (\widehat{\overrightarrow{O'I}, \overrightarrow{i}}) + t = t - \pi + t = 2t - \pi$. On en déduit les coordonnées du point $M(2\cos(t) + \cos(2t - \pi), 2\sin(t) + \sin(2t - \pi))$. Il ne reste plus qu'à étudier la courbe paramétrée définie par les équations $\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) & = & 2\sin(t) - \sin(2t) \end{array} \right.$.

Les deux fonctions sont 2π-périodiques (c'est normal, les deux cercles ayant même rayon, ils ont même périmètre, donc après avoir effectué le tour du cercle fixe, le cercle qui bouge revient exactement dans sa position initiale). Par ailleurs, x est paire et y impaire, il y aura donc une symétrie par rapport à l'axe des abscisses qui permet de restreindre l'étude à $[0; \pi]$. On calcule $x'(t) = -2\sin(t) + 2\sin(2t) = 2\sin(t)(2\cos(t) - 1)$. Cette dérivée s'annule en 0, en $\frac{\pi}{3}$ et en π, valeurs pour lesquelles on a respectivement $M(1; 0)$; $M\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $M(-3; 0)$. De plus, $y'(t) = 2\cos(t) - 2\cos(2t) = 2(\cos(t) + 1 - 2\cos^2(t))$. En posant $X = \cos(t)$, cette dérivée s'annule lorsque $2X^2 - X - 1 = 0$, donc $X = 1$ (solution évidente) ou $X = -\frac{1}{2}$. Cela correspond à $t = 0$ ou $t = \frac{2\pi}{3}$ (et donc $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$). Pour $t = 0$, il y a un poins stationnaire, on peut calculer $x''(t) = -2\cos(t) + 4\cos(2t)$ (qui vaut 2 en 0), et $y''(t) = -2\sin(t) + 4\sin(2t)$, qui s'annule en 0. Il y a aura donc une tangente horizontale et un point de rebroussement de première espèce (la dérivée tierce s'annulera pour x mais pas pour y).

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$		$-$	0
x	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-3
$y'(t)$		$+$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

On peut aussi placer pour compléter le point correspondant à $t = \frac{\pi}{2}$. On a alors $M(1, 2)$, et $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$; $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, donc la tangente en ce point sera dirigée par le vecteur $(-1, 1)$.



3
2
1
0
−4
−3
−2
−1
0
1
2
−1
−2
−3