Feuille d'exercices n°6 : Courbes planes

PTSI B Lycée Eiffel

23 novembre 2012

Exercice 1 (*)

Déterminer l'ensemble de définition, puis toutes les asymptotes ou branches infinies des fonctions suivantes, et tracer une allure de leur courbe représentative (on essaiera d'étudier les variations également quand c'est possible) :

- $f_1(x) = \dfrac{x^2 + x\ln x}{x+1}$
- $f_2(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$
- $f_3(x) = \ln(e^x + e^{-x})$
- $f_4(x) = \sqrt{x} + \ln x$
- $f_5(x) = \sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}$
- $f_6(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$

Exercice 2 (**)

Étudier le plus complètement possible chacune des fonctions suivantes, en précisant notamment la convexité et la présence éventuelle de points d'inflexion (on finira bien évidemment l'étude par la tracé de courbes précises).

- $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$
- $g : x \mapsto e^{\frac{1}{1-x}} + 2x - 3$
- $h : x \mapsto x\sqrt{1 - x^2}$
- $i : x \mapsto \dfrac{2\ln x + 3}{x}$

Courbes paramétrées

Exercice 3 (* à ***)

Pour chacune des fonctions suivantes, tracer le support de l'arc paramétré correspondant, en indiquant les branches infinies, les points stationnaires, ainsi que les tangentes remarquables, et les éventuels points doubles :

1. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \sin(2t) \\ y(t) & = & \cos(3t) \end{array}\right.$ (courbe de Lissajous)
2. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & t^2 - 2t \\ y(t) & = & 2t^3 - 3t^2 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) & = & \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{array}\right.$ (folium de Descartes)
4. $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & t - \sin(t) \\ y(t) & = & 1 - \cos(t) \end{array}\right.$

5. $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)} \\ y(t) &= \dfrac{\sin(t)\cos(t)}{1+\cos^2(t)} \end{cases}$

6. $\begin{cases} x(t) &= \sin(t) \\ y(t) &= \dfrac{\cos^2(t)}{2-\cos(t)} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x(t) &= 2t + \dfrac{1}{2t-1} \\ y(t) &= t^2 - \dfrac{1}{2t-1} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x(t) &= 3\cos(\theta) - \cos(3\theta) \\ y(t) &= 3\sin(\theta) - \sin(3\theta) \end{cases}$ (néphroïde)

9. $\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t}{t^2-1} \\ y(t) &= \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$

10. $\begin{cases} x(t) &= te^t \\ y(t) &= \dfrac{e^t}{t} \end{cases}$

11. $\begin{cases} x(t) &= \sin^3(t) \\ y(t) &= \cos(t) - \cos^4(t) \end{cases}$

Exercice 4 (**)

On considère la courbe d'équation cartésienne $y \ln\left(\dfrac{y}{x}\right) = x^2$. En introduisant le paramètre $t = \dfrac{y}{x}$, décrire cette courbe comme support d'un arc paramétré, puis tracer cette courbe.

Exercice 5 (***)

On considère l'astroïde d'équation $\begin{cases} x(t) &= a\cos^3(t) \\ y(t) &= a\sin^3(t) \end{cases}$, avec $a > 0$.

1. Tracer la courbe correspondante.
2. Soit $M(t)$ le point de la courbe correspondant à la valeur t du paramètre, $A(t)$ et $B(t)$ les intersections de la tangente à la courbe au point $M(t)$ avec les axes. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles ces points sont bien définis, et montrer que dans ca cas la distance $A(t)B(t)$ est constante.
3. Pour un réel $\lambda \in]0;1[$, on définit le point $N(t)$ de façon à avoir $\overrightarrow{ON(t)} = \lambda\overrightarrow{OA(t)} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB(t)}$. quelle est la courbe décrite par les points $N(t)$?
4. Déterminer le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes à l'astroïde qui soient orthogonales. Tracer la courbe correspondante et déterminer son intersection avec l'astroïde.
5. En notant $P(t)$ le projeté orthogonal de l'origine O du repère sur la tangente à l'astroïde au point $M(t)$, déterminer le lieu des points $P(t)$.

Courbes polaires

Exercice 6 (* à ***)

Tracer la courbe représentative de chacune des fonctions polaires suivantes :

1. $\rho(\theta) = \cos(3\theta)$
2. $\rho(\theta) = a(1 + \cos(\theta))$ (cardioïde)
3. $\rho(\theta) = \cos^2(\theta)$
4. $\rho(\theta) = 1 + \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$
5. $\rho(\theta) = \sin(\theta) + \cos(2\theta)$
6. $\rho(\theta) = \dfrac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)}$
7. $\rho(\theta) = \sqrt{2\cos(2\theta)}$ (lemniscate de Bernoulli)
8. $\rho(\theta) = \dfrac{1}{4 + \cos(3\theta)}$
9. $\rho(\theta) = \dfrac{1}{\cos(\theta)} + \dfrac{1}{\sin(theta)}$
10. $\rho(\theta) = 1 + \dfrac{1}{\theta - 2}$
11. $\rho(\theta) = 1 + 2\cos(3\theta)$

Exercice 7 (**)

Soit $A(-2, 0)$, déterminer le lieu des projections orthogonales de A sur les tangentes au cercle trigonométrique (et tracer ce lieu).

Exercice 8 (**)

On fait rouler, sans glisser, un cercle de rayon 1 sur un cercle de rayon 1. Déterminer le lieu décrit par un point fixé sur le cercle extérieur.