Feuille d'exercices n°11 : Limites et continuité

PTSI B Lycée Eiffel

8 février 2013

Exercice 1 (* à ***)

Puisque les techniques sont les mêmes que pour les suites, les calculs seront menés le plus succintement possible, en faisant notamment un usage efficace des équivalents si nécessaire.

- $\dfrac{2x^3-4x^2+x-2}{x^2-4} = \dfrac{2x^2(x-2)+x-2}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{2x^2+1}{x+2}$ si $x \neq 2$. On en déduit aisément que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^3-4x^2+x-2}{x^2-4} = \dfrac{9}{4}$.
- Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, $e^x \sin(e^{-x}) \underset{+\infty}{\sim} e^x e^{-x} \sim 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x \sin(e^{-x}) = 1$.
- On ne peut malheureusement pas mettre d'équivalent dans un ln, mais en fatorisant par e^x dans le ln, $\dfrac{x^2}{\ln(e^x+1)} = \dfrac{x^2}{x+\ln(1+e^{-x})} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x} \sim x$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\ln(e^x+1)} = +\infty$.
- Quantité conjuguée complètement superflue ici : $\sqrt{x^2+x-1} - x\sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} -x^{\frac{3}{2}}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-1} - x\sqrt{x} = -\infty$.
- $\dfrac{x^{\ln(x)}}{(\ln(x))^x} = e^{\ln^2(x) - x\ln(\ln(x))}$. Or, $\ln^2(x) - x\ln(\ln(x)) \underset{+\infty}{\sim} -x\ln(\ln(x))$ par croissance comparée, donc ce qui est dans l'exponentielle tend vers $-\infty$. Du coup, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\ln(x)}}{(\ln(x))^x} = 0$.
- L'encadrement $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\cos(x+x^2-1)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$ suffit à conclure par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x+x^2-1)}{x} = 0$.
- On reconnait ici l'inverse du taux d'accroissement de la fonction arccos en 0 : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\arccos(x)-\arccos(0)}{x-0} = \arccos'(0) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-0}} = -1$. Comme $\arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arccos(x)-\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{1} = 1$.
- Encore une histoire d'encadrement : $\dfrac{1}{x} - 1 < Ent\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant \dfrac{1}{x}$, donc $1 - x \leqslant x\,Ent\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant 1$ si $x \geqslant 0$ (sinon, l'encadrement est le même mais avec les inégalités dans l'autre sens). Dans les deux cas, les deux membres extrêmes de l'encadrement ont pour limite 1 en 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} x\,Ent\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.
- On écrit $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}}$ et on conclut immédiatement à l'aide de la croissance comparée que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.
- Si $x \in [0;1[$, $x - Ent(x) = x$, donc $\dfrac{x-Ent(x)}{\sqrt{|x|}} = \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-Ent(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$. De l'autre côté, sur $[-1;1[$, $x - Ent(x) = x - 1$, donc $\dfrac{x-Ent(x)}{\sqrt{|x|}} = \dfrac{x-1}{\sqrt{-x}}$, qui tend vers $-\infty$ en 0^-. Il n'y a donc pas de limite en 0.

- Encore un coup où -1 est racine du numérateur et du dénominateur. Le numérateur a pour autre racine évidente 1, et le produit des racines vaut 1, donc -1 est en fait racine double et le numérateur se factorise en $(x-1)(x+1)^2$. Lé dénominateur se factorise sous la forme $(x+1)(ax^2+bx+c) = ax^3+(a+b)x^2+(b+c)x+c$; par identification très facile, $a=1$, $b=-1$ et $c=-2$, donc $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2-x-2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{x-1}{x-2}$ si $x \neq -1$. Suffisant pour conclure que $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2} = \dfrac{2}{3}$.
- Encore du boulot pour le passage à l'exponentielle : $\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{(\ln(\ln(x))-\ln(x))/x}$. Tout ce qui est dans l'exponentielle tend vers 0 par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$.
- Le plus simple est encore d'utiliser le fait que $\text{Argsh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$, donc $\dfrac{\text{Argsh}(x)}{\ln(x)} = \dfrac{\ln(x(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}))}{\ln(x)} = 1 + o(1)$. La limite recherchée vaut donc 1. Si on ne connait pas la formule (hors programme) utilisée pour ce calcul, il faut réussir à expliquer pourquoi le fait que $\sinh(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$ implique que $\text{Argsh}(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(2x)$ (sachant que $\ln(2x)$ est la réciproque de $\dfrac{e^x}{2}$), mais ce n'est pas si facile que ça.
- On peut écrire $\dfrac{2}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{1-\cos(x)} = \dfrac{2}{1-\cos^2(x)} - \dfrac{1}{1-\cos(x)} = \dfrac{2-(1+\cos(x))}{(1-\cos(x))(1+\cos(x))} = \dfrac{1}{1+\cos(x)}$. Même pas besoin d'équivalent pour en déduire que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{1-\cos(x)} = \dfrac{1}{2}$. D'ailleurs, si on essaye d'utiliser les équivalents, on ne s'en sort pas puisque $\dfrac{2}{\sin^2(x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$, et $\dfrac{1}{1-\cos(x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$, ce dont on ne peut rien déduire.
- Il suffit ici de poser $X = \ln(x)$. Quand x tend vers 1, X tend vers 0, et $\ln(x)\ln(\ln(x)) = X\ln(X)$. Comme on sait, par croissance comparée, que $\lim\limits_{X\to0} X\ln(X) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to1} \ln(x)\ln(\ln(x)) = 0$.
- Quantité conjuguée : $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \dfrac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})+\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \sim \dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{2}$.
- $x^{x+1} - (x+1)^x = x^x\left(x - \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right)$. Or, $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$, et $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} x \times \dfrac{1}{x} \sim 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$. Finalement $\underset{+\infty}{x}{}^{x+1} - (x+1)^x \underset{+\infty}{\sim} x^x \times x \sim x^{x+1}$. En particulier, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{x+1} - (x+1)^x = +\infty$.
- $\dfrac{x^2-1}{(\sqrt{x}-1)\ln(x)} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(\sqrt{x}-1)\ln(x)} = \dfrac{(x+1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)\ln(x)}$. Or, $\ln(x) = \ln(1+x-1) \underset{x\to1}{x} -1$ puisque $\lim\limits_{x\to1} x-1 = 0$. Finalement, $\dfrac{x^2-1}{(\sqrt{x}-1)\ln(x)} \underset{x\to1}{\sim} \dfrac{4}{x-1}$, donc $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2-1}{(\sqrt{x}-1)\ln(x)} = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2-1}{(\sqrt{x}-1)\ln(x)} = +\infty$.

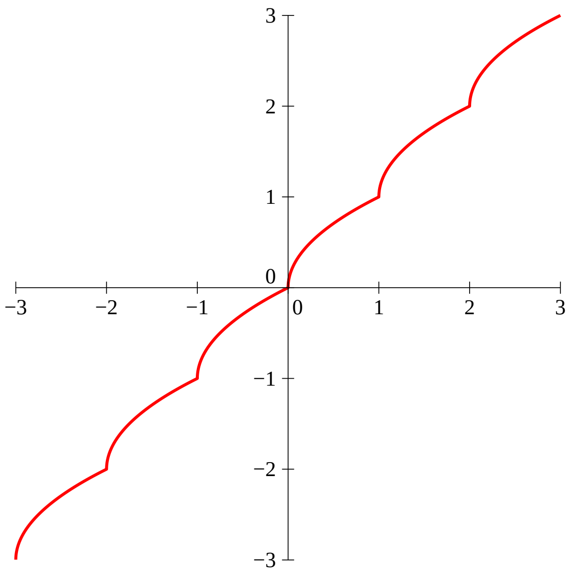
Exercice 2 (** à ***)

1. $\dfrac{\ln(1+\tan(x))}{\sqrt{\sin(x)}} \underset{0}{\sim} \dfrac{\tan(x)}{\sqrt{x}} \sim \dfrac{x}{\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}$ (en utilisant simplement le fait que $\lim\limits_{x\to 0} \tan(x) = 0$ pour la première étape).
2. $\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} \sim x^{\frac{5}{6}}$.
3. $\ln(\cos(x)) = \ln(1+\cos(x)-1) \underset{0}{\sim} \cos(x) - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}$ (on a utilisé que $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) - 1 = 0$ pour le premier équivalent, le second est dans le cours).
4. $(x+1)^x - x^x = x^x\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x - 1\right) = x^x(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} - 1)$. Or, $x^x = e^{x\ln(x)}$ a pour limite 1 en 0 puisque, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. Et $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ a également pour limite 0 car $\ln(1+X) \underset{+\infty}{\sim} \ln(X)$, donc $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{0}{\sim} x\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \sim -x\ln(x)$. On peut donc appliquer l'équivalent classique pour $e^u - 1$ en 0 à $u = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ pour obtenir finalement que $(x+1)^x - x^x \underset{0}{\sim} -x\ln(x)$.
5. $\sqrt{\ln(x+1)-\ln(x)} = \sqrt{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)} = \sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{1}{x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
6. $\dfrac{1}{\cos(x)} - \tan(x) = \dfrac{1-\sin(x)}{\cos(x)}$. Or, $\cos(x) = -\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \dfrac{\pi}{2} - x$ puisque $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} x - \dfrac{\pi}{2} = 0$; et $1 - \sin(x) = 1 - \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \dfrac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2}$. Finalement, $\dfrac{1}{\cos(x)} - \tan(x) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \dfrac{\frac{\pi}{2} - x}{2} \sim \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}$ (en particulier, la fonction a une limite nulle en $\dfrac{\pi}{2}$, ce qui est très loin d'être évident a priori).
7. En 0, utilisons que $x^{x^{\frac{1}{x}}} = x^{e^{\frac{\ln(x)}{x}}} = e^{e^{\frac{\ln(x)}{x}}\ln(x)}$. Or, $e^{\frac{\ln(x)}{x}}$ est certainement plus petit (et même négligeable, mais on n'en a pas besoin) devant $e^{\ln(x)} = x$, donc, comme $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln(x)}{x}}\ln(x) = 0$, et $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^{\frac{1}{x}}} = 1$. On a donc simplement $x^{x^{\frac{1}{x}}} - x \underset{0}{\sim} 1$.
   En $+\infty$, il vaut mieux s'y prendre autrement : $x^{x^{\frac{1}{x}}} - x = x(x^{x^{\frac{1}{x}}-1} - 1) = x(e^{e^{\frac{\ln(x)}{x}-1}\ln(x)} - 1)$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, donc on peut écrire $e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x}$, et $e^{\frac{\ln(x)}{x}-1}\ln(x) \sim \dfrac{\ln^2(x)}{x}$, qui a également pour limite 0 en $+\infty$. On peut donc utiliser une seconde fois l'équivalent classique de l'exponentielle : $e^{e^{\frac{\ln(x)}{x}-1}\ln(x)} - 1 \underset{+\infty}{\sim} e^{\frac{\ln(x)}{x}-1}\ln(x) \sim \dfrac{\ln^2(x)}{x}$. Il ne reste plus qu'à multiplier le tout par x pour obtenir $x^{x^{\frac{1}{x}}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \ln^2(x)$.
8. Puisque l'énoncé a oublié de préciser où il fallait trouver un équivalent, regardons ce qui se passe en $+\infty$: $\dfrac{\ln(x^2+1) - \ln(2x^2+1)}{\ln(x^3+1) - \ln(x^3-1)} = \dfrac{\ln(\frac{x^2+1}{2x^2+1})}{\ln(\frac{x^3+1}{x^3-1})} = \dfrac{\ln(\frac{1}{2} + o(1))}{\ln(1+\frac{2}{x^3-1})} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-\ln(2)}{\frac{2}{x^3-1}} \sim -\dfrac{\ln(2)}{2}x^3$.

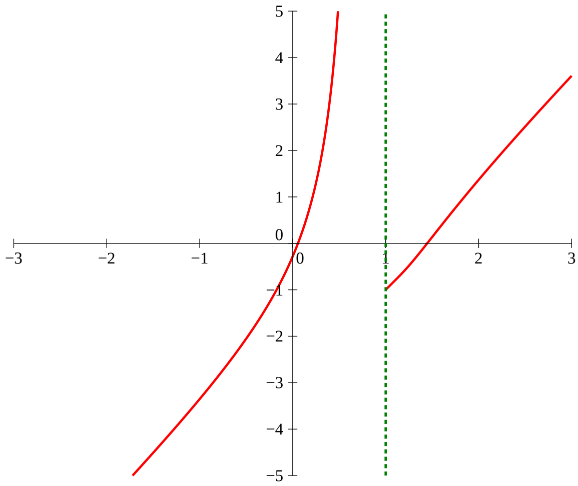
Exercice 3 (** à ***)

1. La fonction f est évidemment définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. En 0, un équivalent classique du cours permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, donc f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0) = 1$.

2. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$. Quand x tend vers -1, le numérateur de f tend vers 2 et le dénominateur vers 0, on ne peut pas avoir de limite finie, et donc pas de prolongement par continuer. Par contre, $f(x) = \dfrac{1-x}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{1}{1+x}$ si $x \neq 1$, donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$, et f est prolongeable par continuité en posant $f(1) = \dfrac{1}{2}$.
3. La fonction f est définie et continue sur tous les intervalle de la forme $]k\pi;(k+1)\pi[$, pour $k \in \mathbb{N}$. Si $k \neq 0$, $(k\pi)^2 \ln(k\pi)$ est une constante non nulle, donc la fonction f ne peut pas avoir de limite finie en $k\pi$ (en l'occurence, elle tend vers $+\infty$ à gauche et $-\infty$ à droite si k est impair, et le contraire si k est pair, à cause du signe de $\sin(x)$ au voisinage de $k\pi$). Par contre, $\dfrac{x^2\ln(x)}{\sin(x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2\ln(x)}{x} \sim x\ln(x)$, donc par croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, ce qui permet de prolonger par continuité en posant $f(0) = 0$.
4. La fonction f est définie et continue sur tous les intervalles de la forme $]n;n+1[$, pour $n \in \mathbb{Z}$. On peut même ajouter, pusique la fonction partie entière est continue à droite en chaque entier, que $\lim\limits_{x\to n^+} f(x) = f(n) = n + \sqrt{n-n} = n$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to n^-} Ent(x) = n-1$, donc $\lim\limits_{x\to n^-} f(x) = n-1+\sqrt{n-(n-1)} = n-1+1 = n$. Finalement, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (pas be soin de prolonger quoi que ce soit ici, la fonction f est déjà définie sur $\mathbb{R}$). Une allure de la courbe :

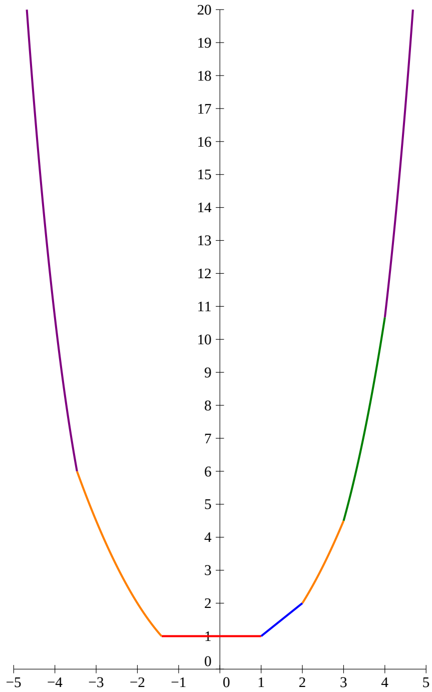


5. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. En 1, on peut écrire $f(x) = \dfrac{x-1-3}{(x-1)^2} = \dfrac{x-4}{(x-1)^2}$. Le dénominateur étant non nul quand $x = 1$, pas de limite finie en vue, et donc pas de prolongement par continuité.
6. Cette drôle de fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1-x} = +\infty$, on aura $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$, donc pas de prolongement possible. Pourtant, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{1-x} = -\infty$, et par conséquent $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1$. On est en présence d'un cas assez rare : la fonction est prolongeable « par continuité à droite » en posant $f(1) = -1$. Une allure de la courbe :



7. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, et prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ (croissance comparée). L'énoncé serait plus intéressant avec $g(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x-1}$, qui est définie et continue sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$, et prolongeable en 0 (même raisonnement que pour f) mais aussi en 1 en posant $g(1) = 1$, à cause de l'équivalent classique $\ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1$.

8. En fait, cette fonction extrêmement étrange n'est pas si affreuse que ça à étudier, puisqu'on peut l'expliciter intervalle par intervalle. Regardons d'abord ce qui se passe sur $\mathbb{R}_+$, et notons $f_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{x^n}{n!}$. On constate que $f'n(x) = \dfrac{x^n}{n!} - \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f_{n-1}(x)$. Par ailleurs, $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow n!x^{n+1} = (n+1)!x^n$, ce qui se produit lorsque $x = 0$ ou $x = \dfrac{(n+1)!}{n!} = n+1$. La fonction f_n est donc décroissante sur $[0;n]$ et croissante sur $[n;+\infty]$, et surtout négative sur $[0;n+1]$ puisque'elle y est décroissante puis croissante et s'annule en 0 et en $n+1$, et positive sur $[n+1;+\infty[$. On déduit de ces constations que, sur l'intervalle $[0;1]$, $\dfrac{x^0}{0!} \geqslant \dfrac{x^1}{1!} \geqslant \dfrac{x^2}{2!}$ etc, donc $f(x) = \dfrac{x^0}{0!} = 1$. Sur $[1;2]$, $\dfrac{x^0}{0!} \leqslant \dfrac{x^1}{1!}$, mais $\dfrac{x^1}{1!} \geqslant \dfrac{x^2}{2!}$ etc, donc $f(x) = \dfrac{x^1}{1!} = x$. De même, sur chaque intervalle de la forme $[n;n+1]$, $f(x) = \dfrac{x^n}{n!}$. Toutes ces fonctions étant continues, et les changements de fonction s'effectuant à des points d'intersection de deux courbes de fonctions continues, la focntion f sera continue sur $\mathbb{R}^+$. Sur $\mathbb{R}^-$, c'est extrêmement similaire, la seule différence étant due au fait que les entiers impairs sont à oublier puisque $\dfrac{x^n}{n!}$ prend des valeurs négatives sur $\mathbb{R}^-$ lorsque n est impair. Voici un bout de la courbe de la fonction f (les morceaux correspondant à des valeurs de n différentes sont de différentes couleurs) :



Exercice 4 (***)

Seul 0 peut poser un problème de continuité à droite. Or, $\lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{1}{x^2} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$, et f est bien continue en 0. De plus, $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$. Posons $X = \dfrac{1}{x}$, on a lors $f'(x) = 2X^3 e^{-X^2}$, qui par croissance comparée a pour limite 0 en $+\infty$, donc f' est également continue en 0. On fait le même type de calcul pour f'' : $\forall x > 0$, $f''(x) = \left(\dfrac{6}{x^4} + \dfrac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$, qui a également pour limite 0 en 0.

Pour les dérivées ultérieures, le principe est le même, mais pour tout traiter d'un seul coup, il est nécessaire d'effectuer une récurrence pour prouver que la n-ième dérivée de la fonction f (sur $]0; +\infty[$) peut s'écrire sous la forme $\dfrac{P_n(x)}{x^{a_n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$, où a_n est un entier naturel et P_n est un polynome. C'est vrai pour $n = 1$ et même $n = 2$ d'après les calculs précédents. Supposons désormais que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{a_n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$. On peut dériver cette fonction sur $]0; +\infty[$ et obtenir $\dfrac{x^{a_n} P'_n(x) - a_n n x^{a_n n - 1} P_n(x)}{x^{2a_n}} e^{-\frac{1}{x^2}} - \dfrac{2P_n(x)}{x^{a_n+3}} e^{-\frac{1}{x^2}}$. Ceci est bien de la forme voulue, ce qui achève la récurrence. Or, un quotient de polynomes multiplié par $e^{-\frac{1}{x^2}}$ a toujours pour limite 0 en 0 (toujours de la croissance comparée), donc la dérivée n-ième de f est continue en 0.

Exercice 5 (*)

Puisque f est k-Lipschitzienne, en prenant $x = u_n$ et $y = 0$ dans la définition, on aura, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(u_n) - f(0)| \leqslant k|u_n - 0|$, soit $|u_{n+1}|$‘$k|u_n|$. Par une récurrence immédiate, on déduit que $|u_n| \leqslant k^n |u_0|$. Or, comme $k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n |u_0| = 0$, et le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercice 6 (** à ***)

1. Par une récurrence facile, si $f(x) = f(x^2)$, on aura, pour tout entier naturel n, $f(x) = f(x^{2^n})$. En effet, c'est vrai pour $n = 1$ (et même $n = 0$), et si on le suppose vrai pour un entier n, alors $f(x) = f(x^{2^n}) = f((x^{2^n})^2) = f(x^{2^{n+1}})$. Si $x \in [0;1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2^n} = 0$ (mettez sous forme exponentielle si ça ne vous semble pas clair), donc par continuité de f en 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x^{2^n}) = f(0)$. Comme la suite $(f(x^{2^n}))$ est constante égale à $f(x)$, on en déduit que $\forall x \in [0;1[$;, $f(x) = f(0)$. La fonction f est donc constate sur $[0;1[$. En particulier, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(0)$, donc, par continuité de f en 1, $f(1) = f(0)$. Occupons-nous maintenant des réels strictement supérieurs à 1. On ne peut pas appliquer le même raisonnement que ci-dessus, mais par contre on constate que $f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(x)$ pour tout entier n, en appliquant simplement la remarque initiale à $x^{\frac{1}{2^n}}$. Cette fois-ci, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1$ (puisque $x^{\frac{1}{2^n}} = e^{\frac{\ln(x)}{2^n}}$, qui tend vers $e^0 = 1$), et on conclut comme tout à l'heure que $f(x) = f(1) = f(0)$. La fonction f est donc constante sur $\mathbb{R}_+$. Et sur $\mathbb{R}^-$? Si $x \leqslant 0$, $x^2 \geqslant 0$, donc $f(x) = f(x^2) = f(0)$. Finalement, la fonction f est constante. Réciproquement, toute fonction constante est évidemment solution du problème posé.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite récurrente définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$. Par une récurrence immédiate, on aura toujours $f(u_n) = f(x)$ (en effet, c'est vrai pour u_0 et $f(u_{n+1}) = f\left(\dfrac{u_n+1}{2}\right) = f(u_n)$). Étudions donc le comportement de la suite (u_n). Pour cela, on pose $g(x) = \dfrac{x+1}{2}$, qui est une fonction affine strictement croissante admettant un unique point fixe $x = 1$. De plus, $g(x) - x \leqslant 0$ si $x \geqslant 1$, et $g(x) - x \geqslant 0$ si $x \leqslant 1$. Si $x \geqslant 1$, on prouve par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$, et la suite étant décroissante, elle va nécessairement converger vers l'unique point fixe de la fonction, à savoir 1. De même, si $x \leqslant 1$, la suite est croissante majorée par 1, et converge vers 1. Dans tous les cas, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, donc par continuité de la fonction f, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(1)$. La suite $(f(u_n))$ étant constante égale à $f(x)$, on en déduit que $f(x) = f(1)$. La fonction f est donc constante. Réciproquement, les fonctions constantes sont solutions triviales du problème posé.

3. Comme dans les autres problèmes de cet exercice, il faut essayer d'itérer l'équation donnéen, en divisant par 2 plutôt qu'en multipliant (car c'est plus pratique pour trouver des limites) : $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = f\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = f\left(\dfrac{x}{8}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)\cos\left(\dfrac{x}{8}\right)$ etc. Une récurrence simple permet de prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$: c'est vrai au rang 0 puisque la condition est alors $f(x) = f(x)$, et si on le suppose au rang n, il suffit de remplacer le $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ par $f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$ pour obtenir la relation au rang $n+1$. reste l'astuce diabolique du jour : tout multiplier par $\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$. En effet, $\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\left(\dfrac{x}{2^k}\right) = \dfrac{\sin(x)}{2^n}$. Si ça ne vous semble pas clair c'est que vous avez du oublier la formule de duplication $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Allez, prouvons-le quand même par récurrence : au rang 0, $\sin(x) = \sin(x)$ est vrai. Supposons la formule vrai au rang n, alors $\sin\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2}\sin\left(2 \times \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$. Ne reste plus qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence pour trouver $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sin(x)}{2^n} = \dfrac{\sin(x)}{2^{n+1}}$. Bref, après ces calculs fantastiquement élémentaires, il nous reste la relation $\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2^n}f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$. Considérons un $x \neq 0$, alors à partir d'un certain rang $\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right) \neq 0$, et on peut écrire $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2^n\sin(\frac{x}{2^n})}f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$. Il

ne reste plus qu'à faire gentiment tendre n vers $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$, donc par continuité $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f(0) = 1$; et $\dfrac{1}{2^n \sin(\frac{x}{2^n})} \sim \dfrac{1}{2^n \times \frac{x}{2^n}} \sim \dfrac{1}{x}$. Finalement, la limite du tout quand n tend vers $+\infty$ vaut $\dfrac{\sin(x)}{x}$. Puisque la suite est constante, on en déduit que $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ (prolongée par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$). On vérifie aisément que cette fonction est solution : $f(x)\cos(x) = \dfrac{\sin(x)\cos(x)}{x} = \dfrac{\sin(2x)}{2x} = f(2x)$.

4. Supposons donc $f(0) = f(1) = 0$. La fonction f est alors impaire puisque $f(x) + f(-x) = 2f\left(\dfrac{x-x}{2}\right) = 2f(0) = 0$. Par ailleurs, en prenant $y = 2-x$ (pourquoi pas ?), on constante que $f(x)+f(2-x) = 2f\left(\dfrac{x+2-x}{2}\right) = 2f(1) = 0$, donc $f(x) = -f(2-x) = f(x-2)$. Ceci prouve que la fonction f est 2-périodique. Or, une fonction périodique et continue est nécessairement bornée. En effet, ici, f est sûrement bornée sur $[0;2]$ puisque l'image d'un segment par une fonction continue est un segment, et f reprend ensuite les mêmes valeurs que sur $[0;2]$, donc les bornes restent valables sur $\mathbb{R}$. or, si la fonction n'était pas nulle, il existerait certainement un x tel que $f(x) > 0$ (puisque f est impaire). La relation initiale implique, en prenant $x = y$, que $f(x) = \dfrac{1}{2}f(2x)$, ou si on préfère que $f(2x) = 2f(x)$. Par une récurrence facile, on prouve alors que, pour tout entier n, $f(2^n x) = 2^n f(x)$. En effet, c'est vrai au rang 0, et en le supposant au rang n, $f(2^{n+1}x) = f(2\times 2^n x) = 2f(2^n x) = 2\times 2^n f(x) = 2^{n+1}f(x)$. En appliquant ceci à notre x dont l'image est strictement positive, on obtiendra $\lim\limits_{n\to+\infty} f(2^n x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n f(x) = +\infty$, ce qui est très contradictoire avec le fait que la fonction f est bornée. La fonction f est donc nécessairement nulle.
   Passons au cas général, et posons $b = f(0)$ et $a = f(1) - f(0)$. La fonction $g : x \mapsto f(x) - ax - b$ vérifie les hypothèses du cas particulier précédent : $g(0) = f(0) - b = 0$; $g(1) = f(1) - (f(1) - f(0)) - f(0) = 0$, et $g\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) - a\left(\dfrac{x+y}{2}\right) - b = \dfrac{1}{2}(f(x)+f(y)) - \dfrac{1}{2}(ax+ay) - \dfrac{1}{2}(b+b) = \dfrac{1}{2}(g(x)+g(y))$. La fonction g est donc nulle. Autrement dit, $f(x) = ax+b$, c'est-à-dire que f est une fonction affine. Réciproquement, toutes les fonctions affines sont solutions du problème posé (on l'a déjà vérifié sans le dire en faisant le petit calcul pour g).

Exercice 7 (*)

Supposons par l'absurde que f soit une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et que f ne soit pas constante. Autrement dit, on peut trouver deux réels x et y tels que $f(x) = n$ et $f(y) = p$, avec $n \neq p$. Mais alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, tout réel compris entre n et p admet des antécédents par la fonction f. Comme il existe certainement autre chose que des nombres entiers entre n et p, ce n'est pas possible.

Exercice 8 (***)

Dans le cas $n = 2$, on pose $g(x) = f\left(x + \dfrac{1}{2}\right) - f(x)$. La fonction g est définie sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, continue puisque f est supposée continue, et $g(0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) - f(0)$ et $g(1) = f(1) - f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -g(0)$ puisque $f(1) = f(0)$. L'intervalle $[g(0); g(1)]$ (dans ce sens ou dans l'autre, on ne sait pas lequel des deux est le plus grand) contient donc certainement 0, et le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'un x tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire $f\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = f(x)$.

Le cas général se traite plus ou moins de la même façon : on pose $g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$, g est continue sur $\left[0; \frac{n-1}{n}\right]$. Par ailleurs, $g(0) = f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)$; $g\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)$; ... ; $g\left(\frac{n-1}{n}\right) = f(1) - f\left(\frac{n-1}{n}\right)$. On constate que $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0$ après un beau télescopage. si la somme de ces n réels est nulle, il en existe nécessairement un positif (au sens large) et un négatif (au moins). On conclut comme précédemment : l'intervalle entre ces deux valeurs contient 0, donc 0 admet un antécédent par g, ce qui suffit à conclure.