Feuille d'exercices n°11 : Limites et continuité

PTSI B Lycée Eiffel

8 février 2013

Exercice 1 (* à ***)

Calculer les limites suivantes :

- $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{2x^3-4x^2+x-2}{x^2-4}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x\sin(e^{-x})$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\ln(e^x+1)}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-1}-x\sqrt{x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln(x)}}{(\ln(x))^x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x+x^2-1)}{x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arccos(x)-\frac{\pi}{2}}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\,Ent\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-Ent(x)}{\sqrt{|x|}}$
- $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{Argsh}(x)}{\ln(x)}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sin^2(x)}-\frac{1}{1-\cos(x)}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \ln(x)\ln(\ln(x))$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{x+1}-(x+1)^x$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(\sqrt{x}-1)\ln(x)}$

Exercice 2 (** à ***)

Déterminer des équivalents des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{\ln(1+\tan(x))}{\sqrt{\sin(x)}}$ en 0
2. $\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ en $+\infty$
3. $\ln(\cos(x))$ en 0
4. $(x+1)^x-x^x$ en 0
5. $\sqrt{\ln(x+1)-\ln(x)}$ en $+\infty$
6. $\dfrac{1}{\cos(x)}-\tan(x)$ en $\dfrac{\pi}{2}$
7. $x^{x^{\frac{1}{x}}}-x$ en $+\infty$ et en 0
8. $\dfrac{\ln(x^2+1)-\ln(2x^2+1)}{\ln(x^3+1)-\ln(x^3-1)}$

Exercice 3 (** à ***)

Étudier la continuité et les possibilités de prolongement par continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$
2. $f(x)=\dfrac{1-x}{1-x^2}$

3. $f(x) = \dfrac{x^2 \ln(x)}{\sin(x)}$
4. $f(x) = Ent(x) + \sqrt{x - Ent(x)}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{(x-1)^2}$
6. $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}} + 2x - 3$
7. $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1}$
8. $f(x) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{x^n}{n!}$

Exercice 4 (***)

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x > 0$, et $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée et montrer qu'elle est aussi continue. Faire de même avec la dérivée seconde. Pour les motivés : prouver que, quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème de la fonction f est continue.

Exercice 5 (*)

Soit f une fonction k-Lipschitzienne avec $k < 1$, telle que $f(0) = 0$. Démontrer que toute suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ a pour limite 0.

Exercice 6 (** à ***)

Déterminer toutes les fonctions vérifiant les conditions suivantes :

1. f est continue en 0 et en 1 et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x^2)$.
2. f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = f(x)$.
3. f est continue sur $\mathbb{R}$, $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)\cos(x)$.
4. f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(y))$ (on commencera par prouver que, si $f(0) = f(1) = 0$, f est périodique, et nulle).

Exercice 7 (*)

Montrer que les seules fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

Exercice 8 (***)

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe un réel x tel que $f\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = f(x)$. Généraliser en prouvant qu'on peut toujours trouver un x tel que $f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = f(x)$, pour tout entier $n \geqslant 2$.