Feuille d'exercices n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

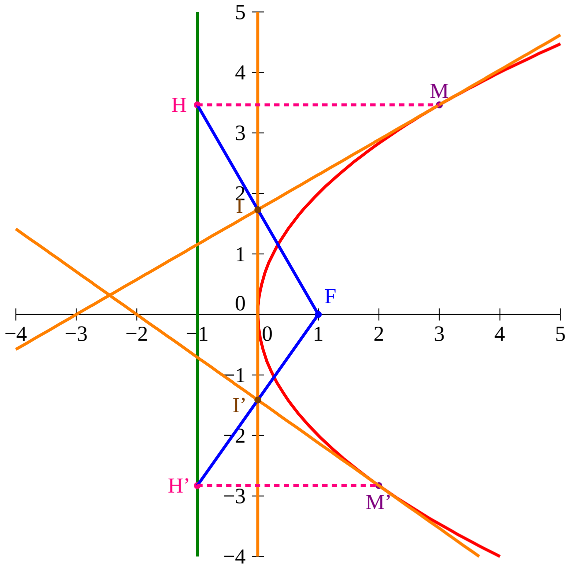
5 décembre 2012

Exercice 1 (* à **)

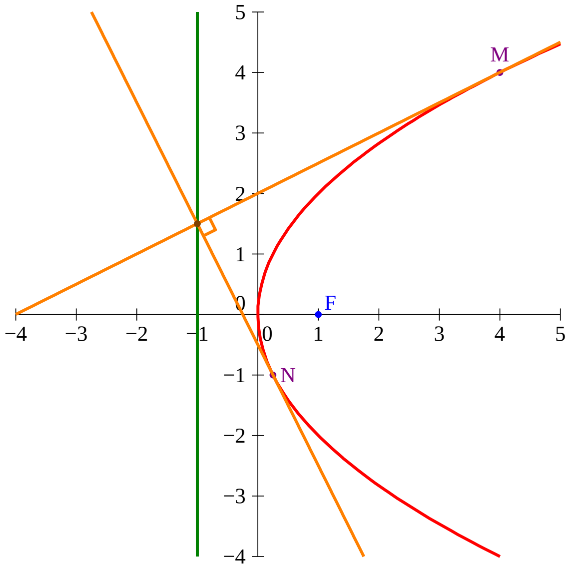
- Avec les notations du cours, cette ellipse vérifie $c = 2$ et $\dfrac{a^2}{c} = 3$. On en déduit que $a^2 = 6$, soit $a = \sqrt{6}$, puis $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{2}$. L'ellipse a donc pour équation réduite $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{2} = 1$.
- Toujours avec les notations du cours, $c = 1$ et $e = \dfrac{c}{a} = 2$, donc $a = \dfrac{1}{2}$. On calcule ensuite $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. L'hyperbole a donc pour équation réduite $4x^2 - \dfrac{4y^2}{3} = 1$.
- On a cette fois $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{3}$, et $p = a(1 - e^2) = 1$. On a donc $a = \dfrac{p}{1 - e^2} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \dfrac{9}{8}$, puis $c = ae = \dfrac{3}{8}$. On calcule alors $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\dfrac{81}{64} - \dfrac{9}{64}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{8} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. L'équation réduite est alors $\dfrac{64x^2}{81} + \dfrac{8y^2}{9} = 1$.
- On peut cette fois-ci affirmer que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2}$, et $a = \dfrac{3}{2}$. On en déduit immédiatement que $b = \dfrac{3}{4}$, donc l'équation réduite est $\dfrac{4x^2}{9} - 4y^2 = 1$.

Exercice 2 (**)

1. En notant $M(x_M, y_M)$, puisque F a pour coordonnées $\left(\dfrac{p}{2}; 0\right)$ et $H\left(-\dfrac{p}{2}; y_M\right)$ (la directrice est verticale d'équation $x = -\dfrac{p}{2}$), le milieu du segment $[FH]$ est le point $I\left(0; \dfrac{y_M}{2}\right)$.
   De l'autre côté, la tangente en M a pour équation $yy_M = p(x + x_M)$, et celle au sommet est simplement l'axe des ordonnées. Leur intersection est donc obtenue lorsque $x = 0$, on a alors $y = \dfrac{px_M}{y_M}$. Or, le point M appartenant à la parabole, il vérifie $y_M^2 = 2px_M$, donc $\dfrac{px_M}{y_M} = \dfrac{y_M^2}{2y_M} = \dfrac{y_M}{2}$, et le point d'intersection coïncide bien avec I.

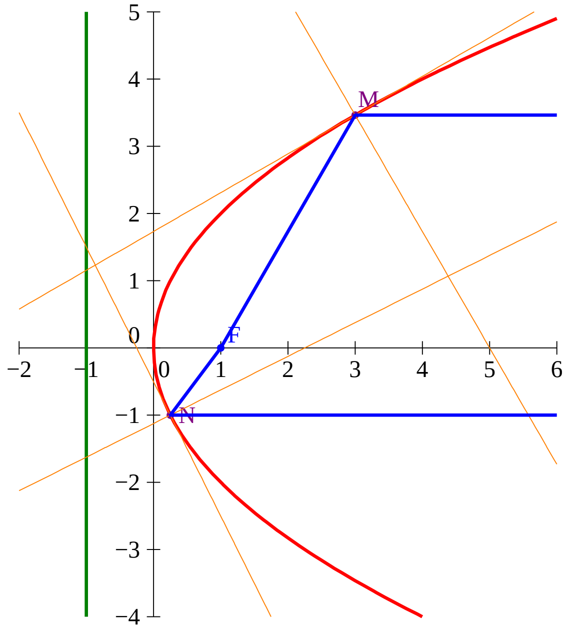


2. Notons M et N les deux points de la parabole dont sont issues les tangentes. Les équations de ces tangentes sont $yy_M = p(x+x_M)$ et $yy_N = p(x+x_N)$. Elles se coupent en un point vérifiant $\dfrac{x+x_M}{y_M} = \dfrac{x+x_N}{y_N}$, ou encore $y_Nx + y_Nx_M = y_Mx + y_Mx_N$, soit $x = \dfrac{y_Mx_N - y_Nx_M}{y_N - y_M}$. Par ailleurs, les deux tangentes ont pour vecteurs normaux respectifs $(-p, y_M)$ et $(-p, y_N)$, elles sont donc perpendiculaires si $p^2 + y_Ny_M = 0$, soit $y_Ny_M = -p^2$. Enfin, les deux points étant sur la parabole, on a $x_M = \dfrac{y_M^2}{2p}$ et $x_N = \dfrac{y_N^2}{2p}$, ce qui donne finalement $x = \dfrac{y_My_N^2 - y_Ny_M^2}{2p(y_N - y_M)} = \dfrac{y_My_N}{2p} = \dfrac{-p^2}{2p} = -\dfrac{p}{2}$. Le point d'intersection est donc effectivement situé sur la directrice.



3. Faisons les choses un peu à l'envers. Soit donc $M(x_M, y_M)$ un point de la parabole. La droite horizontale passant par ce point a pour équation $y = y_M$. La droite reliant le foyer à l'origine a pour équation $\left(x - \dfrac{p}{2}\right) y_M - y\left(x_M - \dfrac{p}{2}\right) = 0$ (c'est ce qu'on obtient en écrivant la condition $\det(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FM}) = 0$, où $A(x, y)$ est un point quelconque du plan). On peut écrire cette deuxième équation sous la forme $xy_M - yx_M + \dfrac{p}{2}(y - y_M) = 0$. Cette droite a pour vecteur directeur

$\left(x_M - \frac{p}{2}; y_M\right)$, dont la norme vaut $\sqrt{x_M^2 - px_M + \frac{p^2}{4} + y_M^2} = \sqrt{x_M^2 + px_M + \frac{p^2}{4}} = \left|x_M + \frac{p}{2}\right|$ en utilisant le fait que M est un point de la parabole. La distance d'un point $A(x, y)$ à la droite (FM) est donc égale à $\left|\frac{xy_M - yx_M + \frac{p}{2}(y - y_M)}{x_M + \frac{p}{2}}\right|$. Comme la distance de ce même point à la droite horizontale d'équation $y = y_M$ vaut simplement $|y - y_M|$, ces deux distances sont égales si $\left|xy_M - yx_M + \frac{p}{2}(y - y_M)\right| = \left|\left(x_M + \frac{p}{2}\right)(y - y_M)\right|$. Les deux possibilités donneront les équations des deux bissectrices, prenons par exemple le cas où les deux membres (sans valeur absolue) sont égaux, on a alors $xy_M - yx_M = x_M y - x_M y_M$, soit $2yx_M = y_M(x + x_M)$. Comme $2x_M = \frac{y_M^2}{p}$, cela revient à dire que $\frac{yy_M}{p} x + x_M$, ce qui est exactement l'équation de la tangente à la parabole au point M. L'autre équation serait celle de la normale (les deux bissectrices étant évidemment orthogonales). Il existe des méthodes plus rapides pour faire ce calcul mais celle-ci a le mérite d'être élémentaire et d'utiliser plein de connaissances que vous avez acquises ces dernières semaines. Sur la figure ci-contre, deux « rayons » et leur réflexion vers le foyer :



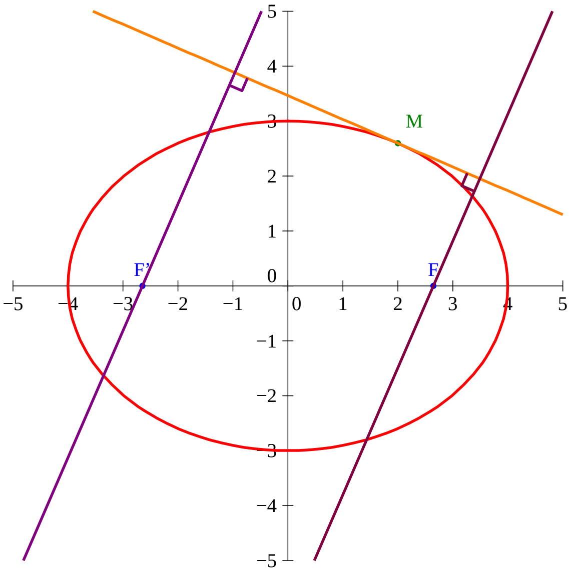
Exercice 3 (**)

Si vous avez trouvé cet exercice affreusement difficile, c'est que vous n'avez sûrement pas trouvé l'astuce qui le simplifie énormément : utiliser l'équation polaire. On peut tout de même y penser quand on voit que le problème fait intervenir la distance de points de l'ellipse à un des foyers, qui est très facile à exprimer quand on se place en coordonnées polaires avec un foyer comme origine du repère. On sait justement que dans ce cas, si on prend par exemple F comme foyer, et l'axe focal comme axe des abscisses, l'ellipse a pour équation $r = \frac{p}{1 - e\cos(\theta)}$. Une droite passant par F a pour équation polaire $\theta = \theta_0[\pi]$, les deux points d'intersection avec l'ellipse correspondent donc aux valeurs θ_0 et $\theta_0 + \pi$ du paramètre. On a donc $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FP} = \frac{1 - e\cos(\theta_0)}{p} + \frac{1 - e\cos(\theta_0 + \pi)}{p}$. Les deux cosinus étant opposés, il reste simplement $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FP} = \frac{2}{p}$, qui est effectivement indépendant de la droite choisie. Bon courage pour tenter de retrouver ce résultat par un calcul en coordonnées cartésiennes, c'est tout bonnement ignoble. Notons tout de même que la valeur constante était prévisible, en prenant comme droite passant par F la droite orthogonale à l'axe focal (droite verticale dans le repère habituel), on sait alors que les deux points d'intersection avec l'ellipse sont à distance p du foyer, ce qui donne bien $\dfrac{2}{p}$ pour la somme des inverses. Alternativement, on peut prendre l'axe focal comme droite particulière, les points d'intersection avec l'ellipse sont alors les deux sommets et les distances au foyer valent $a-c$ et $a+c$, donc $\dfrac{1}{FM}+\dfrac{1}{FP}=\dfrac{1}{a-c}+\dfrac{1}{a+c}=\dfrac{2a}{a^2-c^2}=\dfrac{2a}{b^2}=\dfrac{2}{p}$.

Pour calculer $\dfrac{1}{FM^2}+\dfrac{1}{FP^2}$, on part évidemment aussi de l'expression polaire : $\dfrac{(1-e\cos(\theta_0))^2}{p^2}+\dfrac{(1+e\cos(\theta_0))^2}{p^2}=\dfrac{2+2e^2\cos^2(\theta_0)}{p^2}$. Cette expression est minimale lorsque $\cos(\theta_0)=0$ et vaut alors $\dfrac{2}{p^2}$. Autrement dit, le minimum est atteint lorsque la droite est orthogonale à l'axe focal (ce qui est assez normal car c'est le seul cas où on a $FM=FP$).

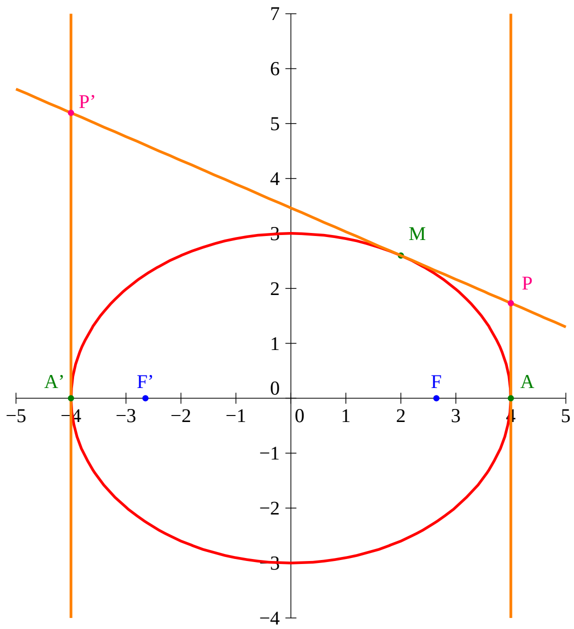
Exercice 4 (** à ***)

1. La tangente a pour équation $b^2xx_M+a^2yy_M=a^2b^2$, donc $d(F,T)=\dfrac{|b^2cx_M-a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_M^2+a^4y_M^2}}$, et $d(F',T)=\dfrac{|-b^2cx_M-a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_M^2+a^4y_M^2}}$. Le produit des deux distances vaut donc $\dfrac{b^4(a^2-cx_M)(a^2+cx_M)}{b^4x_M^2+a^4y_M^2}$ (le numérateur est nécessairement positif), soit $\dfrac{b^4(a^4-c^2x_M^2)}{b^4x_M^2+a^4y_M^2}$. Comme l'ellipse a pour équation $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, on peut écrire le dénominateur sous la forme $b^4x_M^2+a^4b^2-a^2b^2x_M^2=b^2(a^4-c^2x_M^2)$. Notre produit se simplifie donc grandement, il vaut b^2, et est effectivement totalement indépendant de M. Notons qu'on pouvait deviner la valeur en prenant pour M un des sommets (sur l'axe focal) de l'ellipse, les distances des foyers à la tangente (qui est alors verticale) valent dans ce cas $a-c$ et $a+c$, donc leur produit est égal à $a^2-c^2=b^2$.

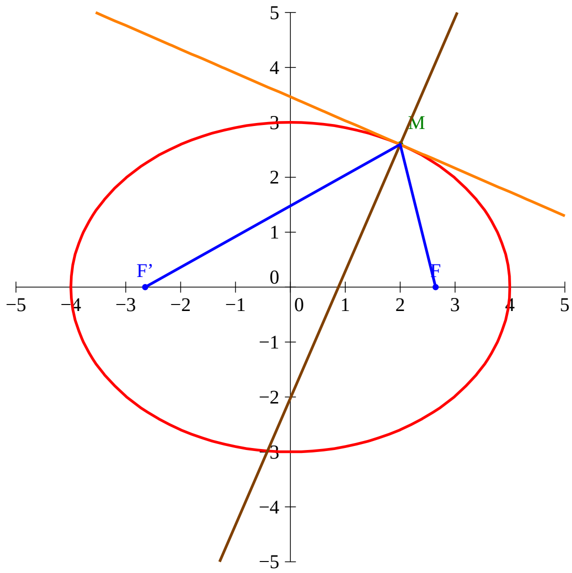


2. La tangente a toujours pour équation $b^2xx_M+a^2yy_M=a^2b^2$. Les tangentes aux sommets ayant simplement pour équation $x=\pm a$, les intersections recherchées vérifient $\pm b^2ax_M+a^2yy_M=a^2b^2$, soit $y=\dfrac{b^2}{y_M}\pm\dfrac{b^2x_M}{ay_M}$. Le produit $AP\times A'P'$ est simplement le produit des ordonnées de ces

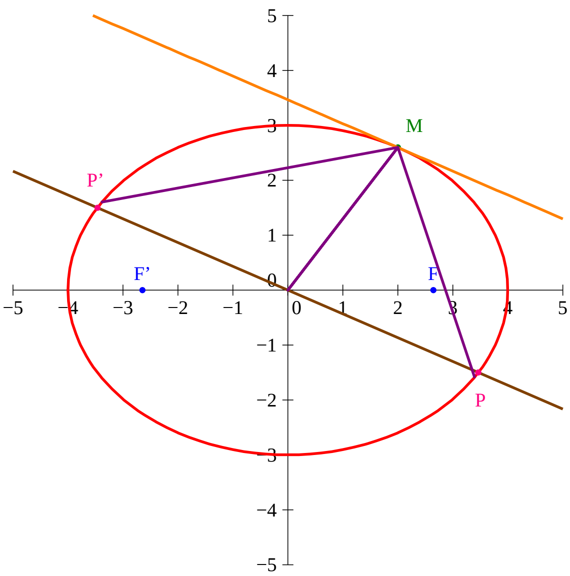
deux points (qui sont toujours de même signe), il vaut donc $\dfrac{b^4}{y_M^2} - \dfrac{b^4 x_M^2}{a^2 y_M^2} = \dfrac{b^4}{y_M^2}\left(1 - \dfrac{x_M^2}{a^2}\right) = \dfrac{b^4}{y_M^2} \times \dfrac{y_M^2}{b^2} = b^2$. Là encore, le résultat était prévisible : si on prend comme point M le sommet B, alors la tangente horizontale en B coupe les deux tangentes verticales à hauteur b, donc le produit des deux distances vaut bien b^2.



3. Cela revient à dire que, si M est un point de l'ellipse, les droites (FM) et $(F'M)$ ont pour bissectrices la tangente et la normale en M à l'ellipse. Faire un pur calcul analytique est ici vraiment extrêmement lourd, on va donc essayer de faire un peu plus géométrique. Il suffit en fait de prouver que $\dfrac{\overrightarrow{FM}}{FM} + \dfrac{\overrightarrow{F'M}}{F'M}$ est directeur de la normale, ou si on préfère orthogonal à la tangente (en effet, la sommes de vecteurs directeur unitaires à deux droites dirige la bissectrice des deux droites). Autrement dit, en notant $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de la tangente, on doit prouver que $(F'M\overrightarrow{FM} + FM\overrightarrow{F'M}).\overrightarrow{u} = 0$. Or, on peut écrire $\overrightarrow{FM}(x_M - c, y_M)$, $\overrightarrow{F'M}(x_M + c, y_M)$, et la tangente en M a pour équation $b^2 x x_M + a^2 y y_M = 1$, donc on peut prendre $\overrightarrow{u}(a^2 y_M, -b^2 x_M)$. Finalement, en notant simplement x et y les coordonnées du point M, on trouve que $(F'M\overrightarrow{FM} + FM\overrightarrow{F'M}).\overrightarrow{u} = (F'M(x-c) + FM(x+c))a^2 y - (FM + F'M)b^2 xy$. Comme on est sur une ellipse, on aura $FM + F'M = 2a$, donc il faut prouver que $(x-c)F'M + (x+c)FM = \dfrac{2ab^2xy}{a^2y} = \dfrac{2b^2x}{a}$, ou encore $c(FM - F'M) = \dfrac{2b^2x}{a} - 2ax = \dfrac{2(b^2-a^2)x}{a} = \dfrac{-2c^2x}{a}$. N'écrivons surtout pas les distances FM et $F'M$ sous forme analytique (aïe les ignobles racines carrées), mais revenons à la définition monofocale de l'ellipse (ça sert, de temps à autre) : $FM = ed(M,D)$ et $F'M = ed(M,D')$, en notant D et D' les deux directrices de l'ellipse. ON sait que ces directrices sont verticales, d'équation respective $x = \dfrac{a^2}{c}$ et $x = -\dfrac{a^2}{c}$, donc $d(M,D) = \dfrac{a^2}{c} - x$ et $d(M,D') = x + \dfrac{a^2}{c}$ (la valeur de x étant toujours comprise entre $-\dfrac{a^2}{c}$ et $\dfrac{a^2}{c}$ pour un point de l'ellipse). On en déduit que $c(FM - F'M) = -2cex = \dfrac{-2c^2x}{a}$ puisque $e = \dfrac{c}{a}$. La propriété est donc démontrée !



4. Cela revient à dire que le déterminant $\det(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}) = x_P y_M - y_P x_M$ est indépendant de M et P (au moins en valeur absolue). La tangente en M a pour équation $b^2 x x_M + a^2 y y_M = a^2 b^2$. La droite parallèle à celle-ci passant par O a pour équation $b^2 x x_M + a^2 y y_M = 0$, donc $y = \dfrac{-b^2 x x_M}{a^2 y_M}$. Si on note $P(x, y)$, le point appartenant à l'ellipse, il vérifie $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$. En remplaçant y^2 par sa valeur en fonction de x, on trouve $b^2 x^2 + \dfrac{b^4 x^2 x_M^2}{a^2 y_M^2} = a^2 b^2$, soit $x^2 \left(1 + \dfrac{b^2 x_M^2}{a^2 y_M^2}\right) = a^2$, ou encore $x^2 \times \dfrac{a^2 y_M^2 + b^2 x_M^2}{a^2 y_M^2} = a^2$. Le numérateur de la fraction vaut $a^2 b^2$ car M est un point de l'ellipse, donc $x_P^2 = \dfrac{a^2 y_M^2}{b^2}$, soit $x_P = \dfrac{a y_M}{b}$ (on peut toujours choisir la valeur de x positive, on obtiendra ainsi un déterminant positif à la fin ; sinon on trouvera une valeur opposée pour le déterminant, la conclusion sera la même). On a alors $y_P = -\dfrac{b^2 x_M}{a^2 y_M} \times \dfrac{a y_M}{b} = -\dfrac{b x_M}{a}$. On peut désormais calculer le déterminant initial, qui vaut $\dfrac{a y_M^2}{b} + \dfrac{b x_M^2}{a} = \dfrac{a^2 y_M^2 + b^2 x_M^2}{ab} = \dfrac{a^2 b^2}{ab} = ab$. L'aire du triangle vaut donc, indépendemment du choix des points, $\dfrac{ab}{2}$. On pouvait deviner cette valeur en prenant par exemple pour M le sommet A de l'ellipse, P est alors un des deux sommets secondaires B ou B' (puisque la tangente en A est verticale), et le triangle rectange AOB a bien pour aire $\dfrac{1}{2}ab$.



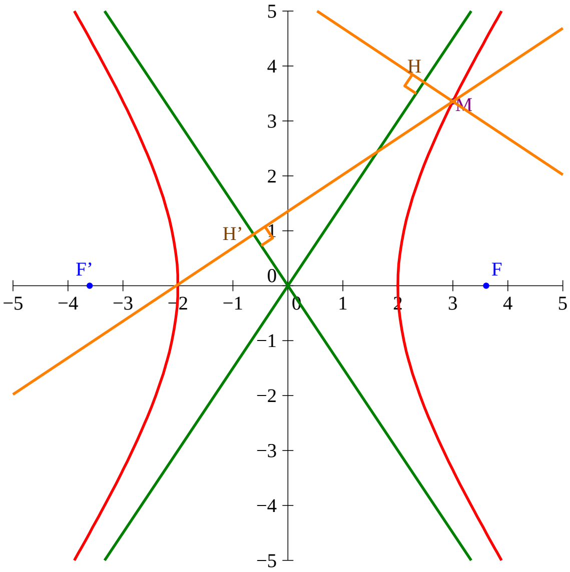
Exercice 5 (*)

Les asymptotes d'une hyperbole ayant pour équations $y = \pm \dfrac{b}{a} x$, elles sont perpendiculaires si $\dfrac{b}{a} \times \dfrac{-b}{a} = -1$, soit $b^2 = a^2$. Comme a et b sont deux réels positifs, cela implique nécessairement $a = b$ (et la réciproque est vraie). Avoir $a = b$ implique par ailleurs $c = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{2}$, donc $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{2}$. Réciproquement, si $e = \sqrt{2}$, on aura $c = \sqrt{2}a$, donc en élevant au carré $a^2 + b^2 = 2a^2$, dont on déduit facilement que $b = a$.

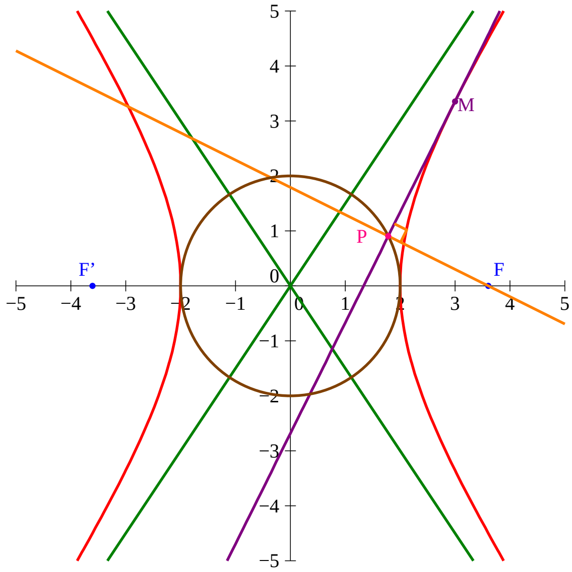
Exercice 6 (** à ***)

1. Notons $H(x, y)$ le projeté de M sur la première asymptote, d'équation $y = \dfrac{b}{a} x$ (ou si on préfère $ay - bx = 0$), outre cette équation le point H vérifie la condition $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{MH} = 0$ où $\overrightarrow{u}(a, b)$ est un vecteur directeur de l'asymptote. Cette condition s'écrit $a(x - x_M) + b(y - y_M) = 0$, soit $ax + by = ax_M + by_M$. On peut combiner les deux équations, en multipliant la première par a, la deuxième par b et en additionnant on trouve $(a^2 + b^2)y = abx_M + b^2 y_M$, soit $y_H = \dfrac{ab}{a^2 + b^2} x_M + \dfrac{b^2}{a^2 + b^2} y_M$. Comme $x = \dfrac{a}{b} y$, pas besoin de calcul supplémentaire pour trouver que $x_H = \dfrac{a^2}{a^2 + b^2} x_M + \dfrac{ab}{a^2 + b^2} y_M$. De même le deuxième projeté H' vérifie d'une part $ay + bx = 0$, et d'autre part $a(x - x_M) - b(y - y_M) = 0$, soit $ax - by = ax_M - by_M$. On en déduit que $x_{H'} = \dfrac{a^2}{a^2 + b^2} x_M - \dfrac{ab}{a^2 + b^2} y_M$, puis $y_{H'} = -\dfrac{ab}{a^2 + b^2} x_M + \dfrac{b^2}{a^2 + b^2} y_M$. On peut donc calculer $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MH'} = (x_H - x_M)(x_{H'} - x_M) + (y_H - y_M)(y_{H'} - y_M) = \dfrac{1}{(a^2 + b^2)^2}[(-b^2 x_M + aby_M)(-b^2 x_M - aby_M) + (abx_M - a^2 y_M)(-abx_M - a^2 y_M)] = \dfrac{b^4 x_M^2 - a^2 b^2 y_M^2 + a^4 y_M^2 - a^2 b^2 x_M^2}{(a^2 + b^2)^2} = \dfrac{(b^2 - a^2)(b^2 x_M^2 - a^2 y_M^2))}{(a^2 + b^2)^2} = \dfrac{a^2 b^2 (b^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)^2}$ en utilisant le fait que le point M appartient à l'hyperbole. Cette quantité ne dépend effectivement pas du point M. On constate par ailleurs qu'elle est toujours nulle dans

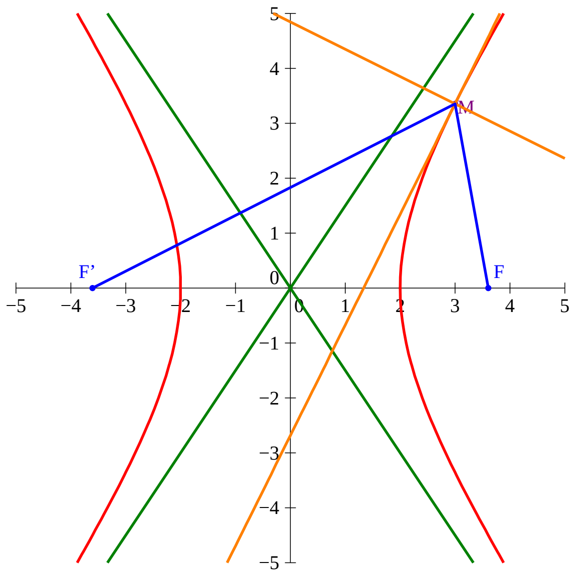
le cas d'une hyperbole équilatère ($a = b$), ce qui est logique puisque les asymptotes sont alors orthogonales (et les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{MH'}$ aussi).



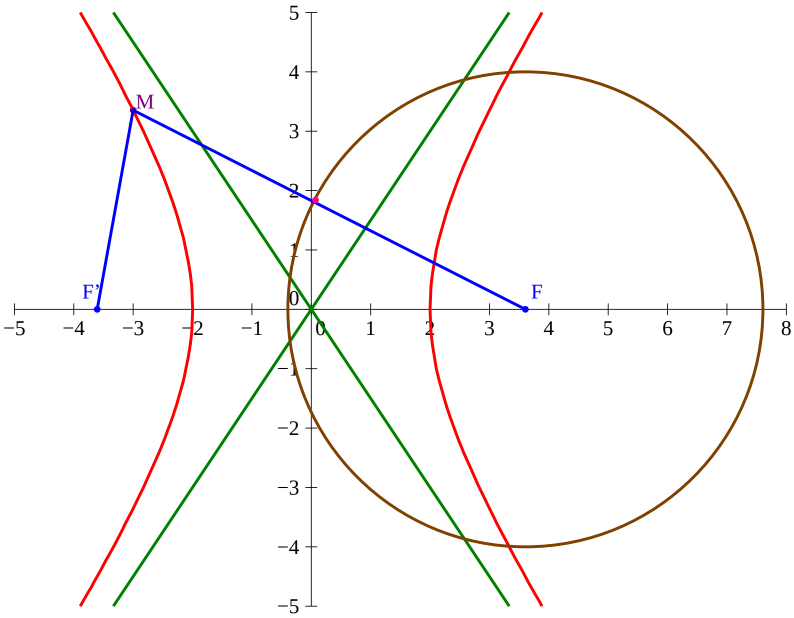
2. Le cercle en question est simplement le cercle centré en l'origine de rayon a. La tangente en M a pour équation $b^2xx_M - a^2yy_M = a^2b^2$. Cette tangente est dirigée par le vecteur (a^2y_M, b^2x_M), qui doit donc être orthogonal à $\overrightarrow{FP}$, ce qui impose, en notant $P(x, y)$, la condition $(x-c)a^2y_M + b^2x_My = 0$. En multipliant la première équation par b^2x_M, la deuxième par a^2y_M et en additionnant, on obtient $(b^4x_M^2 + a^4y_M^2)x = a^2b^4x_M + ca^4y_M^2$, soit $x_P = \dfrac{a^2b^4x_M + ca^4y_M^2}{b^4x_M^2 + a^4y_M^2}$ (on peut tenter de simplifier mais ça n'a pas grand intérêt). De même, en inversant les coefficients et en soustrayant les deux équations, on trouve $y_P = \dfrac{ca^2b^2x_My_M - a^4b^2y_M}{b^4x_M^2 + a^4y_M^2}$. Calculons désormais $x_P^2 + y_P^2$ (on écrit uniquement le numérateur, le dénominateur valant $(b^4x_M^2 + a^4y_M^2)^2$) : $(a^2b^4x_M + ca^4y_M^2)^2 + (ca^2b^2x_My_M - a^4b^2y_M)^2 = a^4b^8x_M^2 + 2ca^6b^4x_My_M^2 + c^2a^8y_M^4 + c^2a^4b^4x_M^2y_M^2 - 2ca^6b^4x_My_M^2 + a^8b^4y_M^2$. Les doubles produits s'annulent, en remplaçant c^2 par $a^2 + b^2$, il reste $a^4b^8x^2 + a^{10}y^4 + b^2a^8y^4 + a^6b^4x^2y^2 + a^4b^6x^2y^2 + a^8b^4y^2$. Puisqu'on veut prouver que le quotient est égal à a^2, divisons tout par a^2 pour laisser, en utilisant l'équation de l'hyperbole pour certaines simplifications, $a^2b^8x^2 + a^8y^4 + b^2a^4y^2(b^2x^2 - a^2b^2) + a^4b^4x^2y^2 + b^6x^2(b^2x^2 - a^2b^2) + a^6b^4y^2 = a^2b^8x^2 + a^8y^4 + b^4a^4x^2y^2 - a^6b^4y^2 + a^4b^4x^2y^2 + b^8x^4 - a^2b^8x^2 + a^6b^4y^2$. Incroyable miracle, il ne reste que les termes $a^8y^4 + 2a^4b^4x^2y^2 + b^8x^4$, soit $(b^4x^2 + a^4y^2)^2$, qui est exactement le dénominateur obtenu plus haut. Conclusion : $x_P^2 + y_P^2 = a^2$, soit $OP = a$, ce qui prouve que le point P appartient bien au cercle demandé. Si vous avez une méthode moins barbare à soumettre, je vous écoute volontiers ...



3. On va reprendre la même technique que pour l'ellipse, seuls quelques signes changeront. On a toujours $\overrightarrow{FM}(x_M - c, y_M)$, et $\overrightarrow{F'M}(x_M + c, y_M)$, par contre le vecteur directeur de la tangente est $\overrightarrow{u}(a^2y_M, b^2x_M)$. On va choisir un vecteur unitaire opposé à celui qu'on avait pris dans le cas de l'ellipse pour la droite $(F'M)$ car dans le cas de l'hyperbole la tangente est bissectrice intérieure de l'angle (alternativement, on prend un vecteur directeur de la normale et on cherche à obtenir un produit scalaire nul). On trouve alors $(F'M\overrightarrow{FM} - FM\overrightarrow{F'M}).\overrightarrow{u} = (F'M(x-c) - FM(x+c))a^2y + (F'M - FM)b^2xy$. On va supposer qu'on s'est placés sur la branche de l'hyperbole pour laquelle $FM - F'M = 2a$ (sinon tous les signes changent et la conclusion est la même), on doit alors prouver que $(x-c)F'M - (x+c)FM = \dfrac{2ab^2xy}{a^2y} = \dfrac{2b^2x}{a}$, soit $c(FM + F'M) = -2ax - \dfrac{2b^2x}{a} = \dfrac{-2(a^2+b^2)x}{a} = -\dfrac{2c^2x}{a}$. La fin du calcul est la même que pour l'ellipse (aux signes des distances aux directrices près).

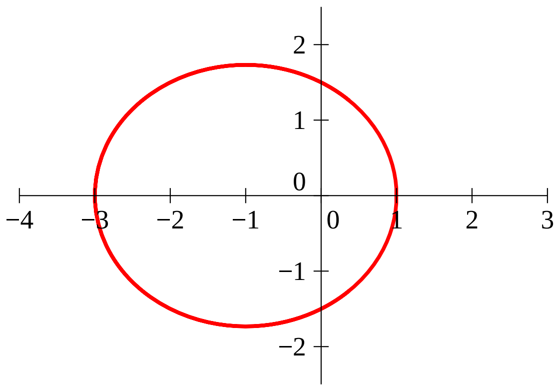


4. Enfin une question qui ne demande aucun calcul ou presque. En effet, si un point M est situé à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}$, on aura $d(M, \mathcal{C}) = MF - 2a$, donc la condition $d(M, \mathcal{C}) = d(M, F')$ s'écrit $MF - 2a = MF'$, soit $MF - MF' = 2a$. On reconnait la définition bifocale de l'hyperbole, les points sont bien situés dessus.

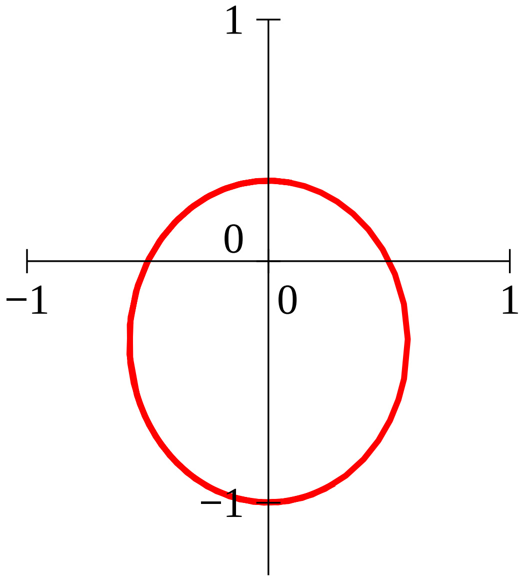


Exercice 7 (*)

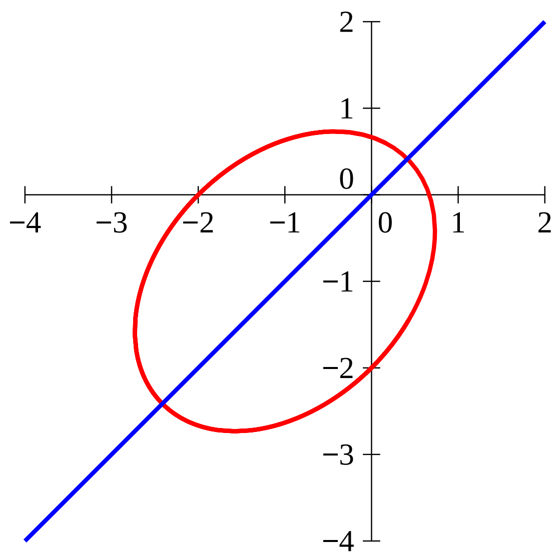
- On peut écrire alternativement $r = \dfrac{\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{2}\cos(\theta)}$, ce qui correspond à une conique de paramètre $p = \dfrac{3}{2}$ et d'excentricité $e = \dfrac{1}{2}$. Il s'agit donc d'une ellipse dont un des foyers est l'origine et l'axe focal est l'axe des abscisses. On peut calculer à partir de ces données $a = \dfrac{p}{1-e^2} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = 2$, puis $c = ea = 1$, donc $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$.



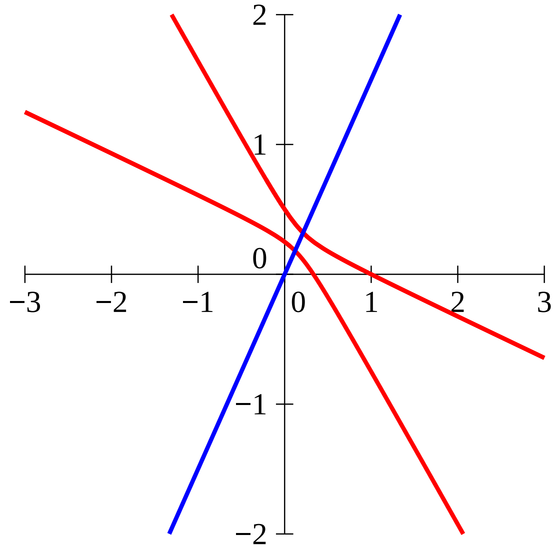
- Cette équation n'étant absolument pas celle d'une conique, elle n'a rien à faire dans cette liste. il faut au moins sortir le quotient par 3 de la parenthèse pour espérer trouver une conique.
- On peut écrire $r = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{2})}$, on est donc en présence d'une conique dont un des foyers est l'origine et l'axe focal sera l'axe des ordonnées (puisqu'on a une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$), de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$ et d'excentricité $e = \dfrac{1}{2}$. Il s'agit encore d'une ellipse, on calcule comme précédemment $a = \dfrac{p}{1-e^2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{2}{3}$, puis $c = ea = \dfrac{1}{3}$, donc $b = \sqrt{\dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.



- On écrit cette fois, en utilisant le fait que $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(\theta)+\cos(\theta))$, que $r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sin(\theta+\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}$. On reconnait une conique de foyer O et donc l'axe focal est la première bissectrice, de paramètre $p=1$ et d'excentricité $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$. C'est encore une fois une ellipse, avec $a=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$, puis $c=1$ et $b=\sqrt{3}$.

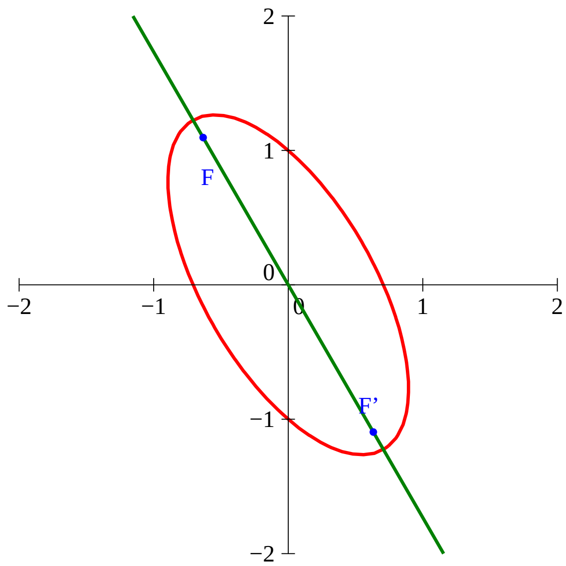


- On peut écrire $r = \frac{1}{1+\sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\cos(\theta)+\frac{3}{\sqrt{13}}\sin(\theta)\right)} = \frac{1}{1+\sqrt{13}\sin(\theta-\theta_0)}$, où θ_0 est un angle dont le cosinus vaut $\frac{2}{\sqrt{13}}$ et le sinus $\frac{3}{\sqrt{13}}$ (un tel angle existe puisque la somme des carrés des deux valeurs vaut 1). On trouve alors une conique d'axe focal décalé d'un angle bizarre, et dont le paramètre est $p=1$ et l'excentricité $e=\sqrt{13}$. Il s'agit donc d'une hyperbole, on peut calculer $a=\frac{p}{e^2-1}=\frac{1}{12}$, puis $c=\frac{\sqrt{13}}{12}$ et $b=\sqrt{c^2-a^2}=\frac{1}{\sqrt{12}}$.

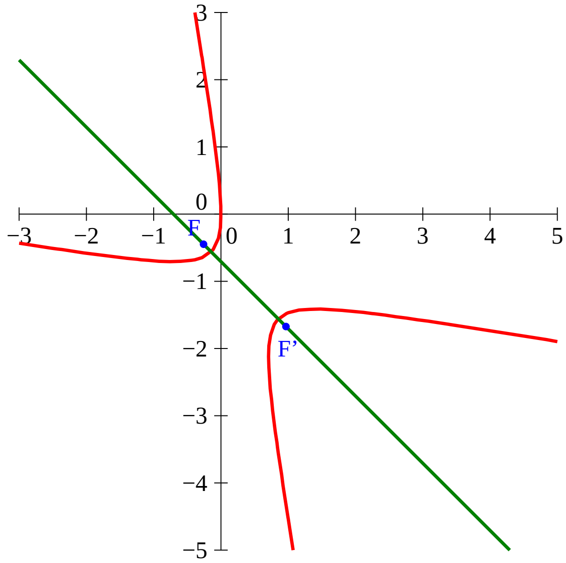


Exercice 8 (** à ***)

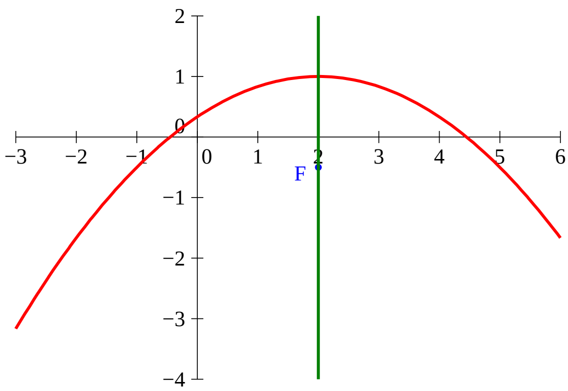
1. On peut toujours commencer par calculer le discriminant $\delta = 4$, il s'agit d'une conique de type ellipse. Réduisons-là : $4x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 4\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{4} + (y-2)^2 - 4 + 12 = 4\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + (y-2)^2 + \frac{23}{4}$. Cette quantité étant manifestement toujours très positive, la conique est vide.
2. Pour information, le discriminant vaut $2 - \frac{3}{4}$, c'est une conique de type ellipse. Il faut effectuer une rotation d'angle θ pour se débarasser du terme en xy. Posons donc $x = X\cos(\theta) - Y\sin(\theta)$ et $y = X\sin(\theta) + Y\cos(\theta)$, l'équation s'écrit alors $2(X\cos(\theta) - Y\sin(\theta))^2 + (X\sin(\theta) + Y\cos(\theta))^2 + \sqrt{3}(X\cos(\theta) - Y\sin(\theta))(X\sin(\theta) + Y\cos(\theta)) = 1$, soit $X^2(2\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) + \sqrt{3}\cos(\theta)\sin(\theta)) + Y^2(2\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta)\cos(\theta)) + XY(-4\cos(\theta)\sin(\theta) + 2\sin(\theta)\cos(\theta) + \sqrt{3}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)))$. Pour éliminer le terme en XY, il faut donc avoir $\sqrt{3}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$, soit (si on connait ses formules trigonométriques), $\sqrt{3}\cos(2\theta) = \sin(2\theta)$, ou encore $\tan(2\theta) = \sqrt{3}$. On peut donc prendre $2\theta = \frac{\pi}{3}$, soit $\theta = \frac{\pi}{6}$.
   L'équation devient alors $X^2\left(2 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + Y^2\left(2 \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 1$, soit $\frac{5}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 = 1$. On reconnait bien une ellipse de demi-grand axe $\sqrt{2}$ (attention à bien prendre la plus grande des deux valeurs) et de demi-petit axe $\sqrt{\frac{2}{5}}$. L'axe focal (dans l'ancien repère) sera la droite faisant un angle $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$ avec l'horizontale (si on tient à préciser les choses, elle a pour équation $y = -\sqrt{3}x$). On peut calculer $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2 - \frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{8}{5}}$. Les deux foyers seront donc les points $F\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}; \sqrt{\frac{6}{5}}\right)$ et $F'\left(\sqrt{\frac{2}{5}}; -\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$ (les coordonnées sont obtenues en multipliant c par les cosinus et sinus de l'angle $\frac{2\pi}{3}$).



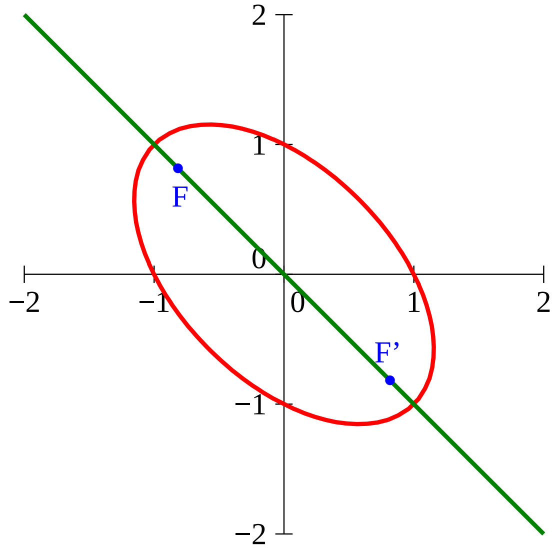
3. Pas besoin de calculer quoi que ce soit ici, une petite factorisation suffit : $(2x-y)(2x+y)=0$, la conique est donc réunion des deux droites d'équations respectives $y=2x$ et $y=-2x$.
4. Comme $\delta = 1-\frac{6}{4} = -\frac{1}{2}$, on a une conique de type hyperbole. Effectuons pour commencer une petite rotation de $\frac{\pi}{4}$ en posant $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)$ et $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$, pour obtenir l'équation $\frac{1}{2}(X-Y)^2+3(X+Y)(X-Y)+\frac{1}{2}(X+Y)^2+4(X-Y)=0$, soit $4X^2-2Y^2+4X-4Y=0$. On peut tout diviser par 2, et mettre sous forme canonique : $2\left(X+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-(Y+1)^2+1=0$, soit, en posant $X'=X+\frac{1}{2}$ et $Y'=Y+1$, $Y'^2-2X'^2=\frac{1}{2}$, ou $2Y'^2-4X'^2=1$. On reconnait une hyperbole d'axe focal vertical, vérifiant $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $b=\frac{1}{2}$. Le centre de l'hyperbole vérifie $X'=Y'=0$, soit $X=-\frac{1}{2}$ et $Y=-1$, donc $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$ et $y=-\frac{3\sqrt{2}}{4}$. L'axe focal dans le repère de départ fait un angle $\frac{3\pi}{4}$ avec l'horizontale et passe par le centre, il a donc une équation de la forme $y=-x+b$, avec $b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. On peut également calculer $c=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Le premier foyer vérifie donc $X'=0$ et $Y'=\frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $X=-\frac{1}{2}$ et $Y=\frac{\sqrt{3}-2}{2}$, puis $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{-\sqrt{3}+1}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, et $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}-3}{2}=\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{4}$. De même pour le deuxième foyer, on part de $X'=0$ et $Y'=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ pour trouver $X=-\frac{1}{2}$ et $Y=\frac{-\sqrt{3}-2}{2}$, puis $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{-\sqrt{3}-3}{2}=\frac{-\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{4}$.



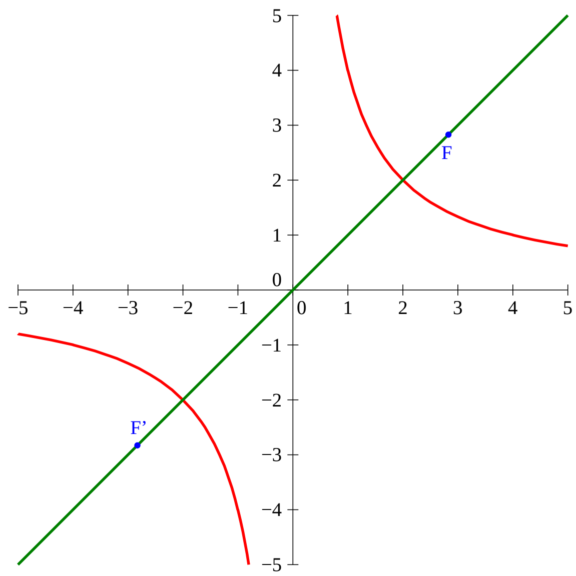
5. Le discriminant vaut 0, on a donc une conique de type parabole. On peut directement factoriser : $x^2 - 4x + 6y - 2 = (x-2)^2 - 4 + 6y - 2$. En posant $X = x - 2$ et $Y = y - 1$, on a donc $X^2 = -6Y$, ce qui est bien l'équation d'une parabole de paramètre $p = 3$, orientée vers le bas (l'axe focal est vertical). Dans l'ancien repère, le sommet aura pour coordonnées $(2; 1)$, et le foyer $\left(2; -\frac{1}{2}\right)$. La directrice aura pour équation $y = \frac{5}{2}$.



6. Le discriminant vaut $\delta = 1 - \frac{1}{4}$, on a une conique de type ellipse. On va effectuer notre rotation habituelle de $\frac{\pi}{4}$, ce qui donne $\frac{1}{2}(X-Y)^2 + \frac{1}{2}(X+Y)^2 + \frac{1}{2}(X-Y)(X+Y) - 1 = \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 - 1 = 0$. On reconnait bien une ellipse, de demi-grand axe $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$, d'où $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. L'axe focal est vertical dans le nouveau repère, il s'agit donc de la deuxième bissectrice dans l'ancien, et les foyers sont $F\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ et $F'\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.



7. C'est une conique de type hyperbole puisque $\delta = -4$. On peut encore une fois se dispenser de calcul en étant un peu astucieux. On sait que $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$, donc l'équation peut se mettre sous la forme $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 16$. Pour faire un changement de repère orthonormé, on pose $X = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$, et $Y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$ (ce qui correspond à une rotation de $\dfrac{\pi}{4}$) pour trouver $X^2 - Y^2 = 8$. On reconnait une hyperbole, avec $a = b = 2\sqrt{2}$, donc $c = \sqrt{a^2+b^2} = 4$. Dans l'ancien repère, l'axe focal sera la première bissectrice (ou si vous préférez la droite d'équation $y = x$), et les foyers seront les points $F(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ et $F'(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$.



8. On peut constater que $\delta = 1 - 1 = 0$, c'est donc une conique de type parabole. Notons que, dans ce cas, si vous cherchez à commencer par une translation pour trouver le centre de la conique, vous allez avoir des soucis pusique les paraboles n'ont pas de centre. On peut directement effectuer la rotation en posant comme d'habitude $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)$ et $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)$. On obtient alors $\dfrac{1}{2}(X-Y)^2 - (X-Y)(X+Y) + \dfrac{1}{2}(X+Y)^2 - 3\sqrt{2}(X-Y) - 5\sqrt{2}(X+Y) + 9 = 2Y^2 - 8\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}Y + 9 = 0$ (le terme en X^2 disparait, c'est normal pour une parabole). Autrement

dit, $2\left(Y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1-8\sqrt{2}X+9=0$, soit encore $2\left(Y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=8\sqrt{2}\left(X-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. En posant $X'=X-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $Y'=Y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on se retrouve donc avec $Y'^2=4\sqrt{2}X'$, équation d'une parabole de paramètre $2\sqrt{2}$. Le sommet a pour coordonnées dans le nouveau repère $X'=Y'=0$, soit $X=Y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, puis $x=0$ et $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=1$. L'axe focal fait un angle de $\dfrac{\pi}{4}$ avec l'horizontale et il passe par le point $(0,1)$, il a donc pour équation $y=x+1$. Le foyer vérifie $X'=\sqrt{2}$ et $Y'=0$, soit $X=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ et $Y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, puis $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=1$, et $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 2\sqrt{2}=2$. On a donc simplement $F(1;2)$. Il est ici très facile de calculer également une équation de la directrice : elle est parallèle à la deuxième bissectrice et passe par le point symétrique de F par rapport à $(0;1)$, donc par le point $K(-1;0)$, et a pour équation $y=-x-1$.