Feuille d'exercices n°7 : Coniques

PTSI B Lycée Eiffel

5 décembre 2012

Exercice 1 (* à **)

Déterminer une équation cartésienne réduite des coniques suivantes :

- ellipse de foyers $F(2,0)$ et $F'(-2,0)$, et de directrices $D : x = 3$ et $x = -3$.
- hyperbole de foyers $F(1,0)$ et $F'(-1,0)$ et d'excentricité 2.
- ellipse d'excentricité $\dfrac{1}{3}$ et de paramètre $p = 1$.
- hyperbole d'asymptotes $D : y = \dfrac{1}{2}x$ et $D' : y = -\dfrac{1}{2}x$, de sommet $A\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ et $A'\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$.

Exercice 2 (**)

Démontrer les propriétés suivantes des paraboles (on prendra la parabole d'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormal fixé). On note M un point de la parabole distinct du sommet, et H son projeté orthogonal sur la directrice.

1. La tangente à la parabole en M coupe sa tangente au sommet au milieu du segment $[FH]$.
2. Deux tangentes à la parabole qui sont perpendiculaires se coupent sur la directrice.
3. Les droites horizontales se réfléchissent sur la parabole en droites passant par son foyer (par réflexion, on entend que la normale à la parabole au point d'intersection de la droite incidente et de la parabole est bissectrice de la droite incidente et de la droite réfléchie).

Exercice 3 (**)

On considère une ellipse de foyers F et F', et D une droite passant par F et coupant l'ellipse en deux points M et P. Montrer que la quantité $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FP}$ est indépendante du choix de la droite D, et déterminer le minimum de $\dfrac{1}{FM^2} + \dfrac{1}{FP^2}$ quand la droite varie.

Exercice 4 (** à ***)

Démontrer les propriétés suivantes des ellipses (on considèrera une ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ dans un repère orthonormal fixé).

1. Si M est un point de l'ellipse, et T la tangente à l'ellipse en M, la quantité $d(F,T) \times d(F',T)$ est indépendante du choix de M.
2. Si M est un point de l'ellipse, et P et P' les points d'intersection de la tangente en M avec les tangentes aux sommets A et A', alors $AP \times A'P'$ est indépendant du choix de M.
3. Une droite passant par un des foyers de l'ellipse est réfléchie sur l'ellipse en une droite passant par l'autre foyer.
4. Si M et P sont deux points de l'ellipse pour lesquels la tangente en M est parallèle à (OP), l'aire du triangle OPM est indépendante du choix des points M et P.

Exercice 5 (*)

Montrer qu'une hyperbole a deux asymptotes perpendiculaires si et seulement si $a = b$, ou $e = \sqrt{2}$. Une telle hyperbole est appelée **hyperbole équilatère**.

Exercice 6 (** à ***)

Démontrer les propriétés suivantes des hyperboles :

1. Si un point M de l'hyperbole a pour projetés H et H' sur les deux asymptotes, $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MH'}$ ne dépend pas du choix de M.
2. Si on note P le projeté orthogonal de F sur la tangente à l'hyperbole en M, ce point P se situe sur le cercle tangent à l'hyperbole en ses deux sommets.
3. Une droite passant par un des foyers de l'hyperbole est réfléchie sur l'hyperbole en une droite passant par l'autre foyer.
4. Si on note $\mathcal{C}$ le cercle de centre F et de rayon $2a$, les points extérieurs à $\mathcal{C}$ équidistants de F' et de $\mathcal{C}$ sont situés sur l'hyperbole.

Exercice 7 (*)

Reconnaitre les coniques suivantes à partir de leur équation polaire :

- $r = \dfrac{3}{2 + \cos(\theta)}$
- $r = \dfrac{4}{1 + \cos(\frac{\theta}{3})}$
- $r = \dfrac{1}{2 + \sin(\theta)}$
- $r = \dfrac{2}{2 + \cos(\theta) + \sin(\theta)}$
- $r = \dfrac{1}{1 + 2\cos(\theta) + 3\sin(\theta)}$

Exercice 8 (** à ***)

Déterminer la nature de chacune des coniques suivantes, et donner ses éléments caractéristiques :

1. $4x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$
2. $2x^2 + y^2 + \sqrt{3}xy = 1$
3. $4x^2 - y^2 = 0$
4. $x^2 + 6xy + y^2 + 4\sqrt{2}x = 0$
5. $x^2 - 4x + 6y - 2 = 0$
6. $x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$
7. $xy = 4$
8. $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$