Feuille d'exercices n°2 : Complexes

PTSI B Lycée Eiffel

25 septembre 2012

Exercice 1 (*)

Écrire chacun des nombres complexes suivants sous forme algébrique et/ou trigonométrique.

- $z = (1 + 2i)^3$
- $z = \dfrac{4}{1 - i}$
- $z = (2 + i)^2 \times \dfrac{1 - i}{4 + i}$
- $z = e^{-i\frac{37\pi}{4}}$
- $z = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$
- $z = (1 - i\sqrt{3})^{11}$
- $z = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^5$
- $z = \left(\dfrac{2 + \sqrt{3} + (2\sqrt{3} - 1)i}{2 - i}\right)^{17}$
- $z = e^{(1+i)\ln(3)}$

Exercice 2 (*)

Pour chacun des nombres complexes a suivants, calculer l'inverse de a et résoudre l'équation $z^3 = a$.

- $a = -8i$
- $a = e^{i\frac{5\pi}{12}}$
- $a = 2 + 11i$
- $a = \dfrac{i + \sqrt{3}}{i - \sqrt{3}}$

Exercice 3 (**)

Pour chacun des problèmes indépendants suivants, on essaira de faire deux résolutions : l'une par le calcul, l'autre géométrique.

1. Déterminer les valeurs de z pour lesquelles z, $\dfrac{1}{z}$ et $1 - z$ ont même module.
2. Déterminer les valeurs de z pour lesquelles z, z^2 et z^4 ont des images alignées dans le plan complexe.
3. Trouver tous les nombres complexes z vérifiant $|z| = |z - 4|$ et $\arg(z) = \arg(z + 1 + i)$.
4. Trouver tous les nombres complexes z pour lequels les images de z, i et iz forment un triangle équilatéral dans le plan complexe.

Exercice 4 (* à ***)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 2z + 5 = 0$
2. $iz^2 + (2 - 3i)z + 5i - 5 = 0$
3. $2z^2 + iz + 1 - i = 0$
4. $z^2 = -\overline{z}^2$
5. $z^4 - 2\cos(\theta)z^2 + 1 = 0$
6. $3z^2 - 5|z^2| + 2 = 0$
7. $z^4 = 24i - 7$

8. $\overline{z} = z^n$
9. $4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = 0$ (cette équation admet une racine réelle)
10. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$

Exercice 5 (**)

On considère l'équation $(z+1)^5 = (z-1)^5$.

1. Résoudre cette équation de façon bourrine en développant tout.
2. Résoudre cette même équation de façon subtile en utilisant les racines cinquièmes de l'unité.
3. En comparant les deux résultats obtenus, déterminer une valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice 6 (**)

Si p et q sont deux entiers naturels distincts, à quoi ressemble $\mathbb{U}_p \cap \mathbb{U}_q$?

Exercice 7 (*)

Linéariser les expressions suivantes : $\cos^6(x)$; $\sin^2(x)\cos^3(x)$; $\cos(x)\sin^5(x)$.

Exprimer $\cos(5x)\sin^2(3x)$ en fonction de puissances de $\cos(x)$; exprimer $\sin(2x)+\sin(4x)+\sin(6x)+\sin(8x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exercice 8 (***)

Simplifier les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(kx)}{\cos^k x}$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$.

Exercice 9 (* à **)

Démontrer les propriétés suivantes (questions indépendantes) :

1. Pour tous nombres complexes u et v, $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$ (identité du parallélogramme).
2. Si $|u| = |v| = 1$ et $uv \neq -1$, alors $\dfrac{u+v}{1+uv} \in \mathbb{R}$.
3. Si $|z| = 1$, on a soit $|1+z| \geqslant 1$, soit $|1+z^2| \geqslant 1$. Peut-on avoir les deux simultanément ?

Exercice 10 (* à **)

Donner toutes les formes possibles de l'équation des cercles suivants (forme complexe factorisée $|z-a| = r$; forme complexe développée $z\overline{z} - \overline{a}z - a\overline{z} + b = 0$; forme cartésienne factorisée $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$; et forme cartésienne développée $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$). Préciser si nécessaire le centre et le rayon du cercle.

- cercle de centre $A(2-i)$ et de rayon 3
- cercle de diamètre $[AB]$, avec $A(-1+2i)$ et $B(3+4i)$
- cercle d'équation complexe développée $z\overline{z} + iz - i\overline{z} - 3 = 0$
- cercle d'équation cartésienne développée $x^2 + y^2 - 2x - 3y + 9 = 0$
- cercle passant par les points $A(1-i)$, $B(-1-i)$ et $C(5i)$
- cercle tangent aux axes réel et imaginaire, et passant par le point $A(6+7i)$

Exercice 11 (* à ***)

On considère dans le plan complexe les points $A(-3+i)$; $B(1-2i)$; $C(1+3i)$ et $D(2+2i)$. Déterminer l'affixe de chacun des objets géométriques suivants :

1. milieu du segment $[BC]$
2. vecteur $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
3. point d'intersection des droites (AC) et (BD)
4. barycentre du système $((B,1);(C,-2),(D,2))$
5. vecteur directeur (normé) de la droite (CD), vecteur normal (normé) à la droite (AB)
6. points d'intersection du cercle de diamètre $[AD]$ et de la droite (BC)
7. centre de gravité, orthocentre, centres des cercles inscrit et circonscrit du triangle ABD

Exercice 12 (* à **)

Déterminer l'écriture complexe de chacune des transformations géométriques suivantes.

- translation de vecteur $\overrightarrow{u}(3-2i)$
- rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$
- rotation de centre $A(1-2i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$
- symétrie par rapport à la droite d'équation cartésienne $y = x$
- symétrie par rapport au point $B(3i)$
- homothétie de rapport $\dfrac{1}{2}$ et de centre $C(-2+i)$
- composée de ces deux dernières transformations

Inversement, caractériser géométriquement chacune des applications complexes suivantes.

- $f(z) = \overline{z} - 3$
- $f(z) = (1-i)z + 2i - 1$
- $f(z) = 2\overline{z}$
- $f(z) = 3z - 4i + 2$
- $f(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$
- $f(z) = -i\overline{z} + 2i - 1$

Exercice 13 (**)

On considère l'application du plan complexe dans lui-même $f : z \mapsto z^2 + z + 1$.

1. Déterminer les images par f des nombres 1, $2i - 5$ et $e^{i\frac{\pi}{4}}$.
2. Déterminer les antécedents par f de $1 + i$.
3. Déterminer les nombres complexes invariants par f.
4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes ayant une image réelle par f.
5. Déterminer le lieu des points M alignés avec leur image par f et avec 1.

Exercice 14 (**)

On considère l'application $f : z \mapsto \dfrac{z+1}{z-2}$, et on note $A = \mathbb{C}\backslash\{2\}$ et $B = \mathbb{C}\backslash\{1\}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de A vers B. Déterminer une expression simple de sa réciproque f^{-1}.
2. Déterminer l'image réciproque de $\mathbb{U}$ (c'est-à-dire l'ensemble des z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$) et celle du disque unité $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$.

3. Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{U}$ tels que $f(z) \in \mathbb{U}$.
4. Quel est l'ensemble de définition de l'application $f \circ f$? Est-elle également bijective, et si oui, vers quel ensemble ?

Exercice 15 (***)

On considère dans cet exercice l'application définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{C}^*$ dans lui-même, et déterminer son application réciproque f^{-1}.
2. Déterminer les nombres complexes z pour lesquels $\operatorname{Re}(f(z)) > 0$. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3. Montrer sur un exemple que l'application f ne conserve pas les milieux (autrement dit que l'image par f du milieu d'un segment $[AB]$ n'est pas toujours le milieu du segment $[f(A)f(B)]$).
4. Déterminer l'image par f de l'axe réel et de l'axe imaginaire.
5. Montrer plus généralement que l'image par f d'une droite passant par l'origine est toujours une droite passant par l'origine (mais privée du point O).
6. On considère désormais la droite passant par les points $A(1)$ et $B(i)$. Montrer que l'image de tout point de cette droite appartient à un cercle de centre $C\left(\dfrac{1-i}{2}\right)$. Réciproquement, déterminer les points de ce cercle ayant un antécédent par f sur la droite (AB).
7. Généraliser en déterminant l'image d'une droite quelconque du plan complexe (ne passant pas par l'origine).
8. Quelle est l'image par f d'un cercle passant par l'origine ?
9. Déterminer l'image par f du cercle trigonométrique, puis plus généralement celle du cercle de centre O et de rayon r.
10. Déterminer enfin l'image d'un cercle ne passant pas par l'origine et n'étant pas centré en O.

Exercice 16 (****)

On souhaite colorier tout le plan complexe à l'aide de trois couleurs, par exemple le bleu, le rouge et le vert (qui revient en fait à définir une fonction ayant pour ensemble de départ $\mathbb{C}$ et pour ensemble d'arrivée l'ensemble à trois éléments $\{\text{bleu}\,;\,\text{rouge}\,;\,\text{vert}\}$). Peut-on effectuer ce coloriage de façon à ce que deux points du plan complexe situés à distance 1 l'un de l'autre soient toujours de couleur différente ?