

# Espaces vectoriels

PTSI B Lycée Eiffel

6 avril 2013

*Supposé qu'Euclide et ses prédécesseurs aient considéré  
le triangle comme une moitié de carré ou, mieux, d'un parallélogramme :  
ils auraient été immédiatement conduits au vecteur,  
c'est-à-dire à la structure de l'espace comme espace vectoriel.*

MICHEL SERRES

*Comment habille-t-on un espace vectoriel ?  
Avec une combinaison linéaire !*

## Introduction

Nous entamons avec ce premier chapitre consacré aux espaces vectoriels une partie essentielle de votre programme, consacrée à l'algèbre linéaire. Elle fait logiquement suite au chapitre d'introduction sur les structures algébriques et vise à mettre en place une théorie générale permettant de « faire de la géométrie » sur un ensemble. Ceci dit, malgré le terme qui est utilisé, un espace vectoriel ne sera pas nécessairement constitué de vecteurs, du moins au sens où vous comprenez ce mot, mais peut très bien contenir, par exemple, des matrices ou des fonctions. L'essentiel est de bien comprendre que tous les ensembles étudiés ici admettent une structure proche, qui permet de définir des objets et de démontrer des propriétés dans un cadre très général, quitte à ensuite les appliquer sur des cas plus précis. Dans ce premier chapitre (et dans le suivant), on se concentrera sur le côté cartésien de la géométrie que vous connaissez dans le plan ou dans l'espace, c'est-à-dire tout ce qui fait intervenir les calculs de coordonnées. Plus tard dans l'année, nous reviendrons sur les propriétés métriques des espaces vectoriels, en ajoutant des notions de longueurs et de distances par exemple. Ce chapitre est généralement considéré par les élèves comme difficile, parce que vous n'avez pas (encore) l'habitude de travailler dans le cadre assez formel de l'algèbre linéaire. Pourtant, les calculs effectués sont en général très simples (en gros uniquement des résolutions de systèmes) et les notions abordées ne font que reproduire ce que vous maîtrisez dans le plan ou l'espace. L'essentiel dans ce domaine tout neuf pour vous est de bien comprendre les définitions, et d'être très rigoureux dans l'emploi des notations.

### Objectifs du chapitre :

- maîtriser tout le vocabulaire introduit dans ce chapitre, et connaître parfaitement les différentes méthodes permettant de faire les calculs classiques (noyau, image, démonstration de la supplémentarité).

- savoir résoudre sans la moindre hésitation les petits systèmes linéaires, et exprimer leurs solutions sous forme vectorielle.
- faire le lien entre calcul matriciel et espaces vectoriels.

# 1 Espaces et sous-espaces vectoriels

## 1.1 Définitions, exemples

**Définition 1.** Un ensemble  $E$  est un **espace vectoriel sur**  $\mathbb{K}$  s'il est muni d'une addition  $E \times E \rightarrow E$  et d'un produit extérieur  $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$  vérifiant les conditions suivantes :

- $(E, +)$  est un groupe commutatif.
- Le produit est compatible avec le produit de  $\mathbb{K}$  :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$ .
- L'élément neutre  $1 \in \mathbb{K}$  est un élément neutre pour le produit extérieur :  $\forall x \in E, 1.x = x$ .
- Le produit est doublement distributif par rapport à l'addition :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$  et  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E^2, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$ .

*Remarque 1.* Ces conditions peuvent paraître complexes, mais on ne les vérifie jamais en pratique, et on peut en fait les résumer simplement par le fait qu'il y a deux opérations sur notre ensemble  $E$  : une addition, et un produit extérieur, qui vérifient des conditions assez naturelles. En pratique, dans tous les exemples que nous étudierons cette année, on aura toujours  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Définition 2.** Les éléments d'un espace vectoriel  $E$  sont appelés **vecteurs**, et les éléments de  $\mathbb{K}$  par lesquels on peut les multiplier sont appelés **scalaires**.

**Exemples :**

- L'ensemble des vecteurs du plan (de même que l'ensemble des vecteurs de l'espace), muni de la somme vectorielle et du produit des vecteurs par les réels, est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  (encore heureux!).
- L'ensemble des  $n$ -uplets de réels  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , muni de la somme terme à terme et du produit par un réel terme à terme est un espace vectoriel réel, noté  $\mathbb{R}^n$ . On peut identifier l'espace des vecteurs du plan avec  $\mathbb{R}^2$  en identifiant un vecteur avec ses coordonnées dans une base du plan.
- L'ensemble des suites réelles est un espace vectoriel réel, la somme de deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  étant la suite  $(u_n + v_n)$ , et le produit d'une suite  $(u_n)$  par un réel  $\lambda$  étant la suite  $(\lambda u_n)$ . De même, l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est un espace vectoriel.
- L'ensemble de toutes les fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est un espace vectoriel, inclus dans celui de toutes les fonctions. L'ensemble de toutes les fonctions de classe  $\mathbb{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  est aussi un espace vectoriel, inclus dans le précédent.
- L'ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes est un espace vectoriel (on a prouvé toutes les propriétés de la définition précédente dans le cas des matrices lors de notre chapitre consacré au calcul matriciel). Attention toutefois, l'ensemble de toutes les matrices (sans spécification de taille) n'est pas un espace vectoriel (on ne peut pas additionner deux matrices de taille différente).
- L'ensemble  $\mathbb{R}_n[X]$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  est un espace vectoriel (mais l'ensemble des polynômes de degré exactement  $n$  ne serait pas un espace vectoriel). L'ensemble  $\mathbb{R}[X]$  de tous les polynômes à coefficients réels est aussi un espace vectoriel.

## 1.2 Familles de vecteurs

**Définition 3.** Une **famille de vecteurs** dans un espace vectoriel  $E$  est un  $k$ -uplet  $(e_1, \dots, e_k)$  d'éléments de  $E$ .

*Remarque 2.* Attention bien sûr à ne pas confondre une famille de vecteurs de  $E$ , et un vecteur qui est souvent lui-même un  $n$ -uplet de réels.

**Définition 4.** Une **combinaison linéaire** d'une famille  $(e_1, \dots, e_k)$  de vecteurs de  $E$  est un vecteur  $x \in E$  qui peut s'écrire sous la forme  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i$ , pour un  $k$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  d'éléments de  $\mathbb{K}$ .

**Exemples :** Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ , le vecteur  $(2, 5, -3)$  est combinaison linéaire des vecteurs  $(1, -2, 6)$  et  $(-1, 11, -21)$ , puisque  $3(1, -2, 6) + (-1, 11, -21) = (2, 5, -3)$ . Par contre, le vecteur  $(0, 9, 2)$  n'est pas combinaison linéaire de ces deux même vecteurs (pour déterminer si un vecteur  $x$  donné est combinaison linéaire d'une famille, on écrit le système obtenu en obligeant l'égalité  $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k$ ).

Dans l'espace vectoriel des matrices à 3 lignes et 3 colonnes  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 8 & 7 & -4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  est telle que  $A^2$  est combinaison linéaire de  $A$  et de  $I$ , puisque  $A^2 = \begin{pmatrix} -7 & -8 & 8 \\ 32 & 25 & -1 \\ 16 & 8 & 1 \end{pmatrix} = 4A - 3I$ .

**Définition 5.** Soit  $(e_1, \dots, e_k)$  une famille de vecteurs. L'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille est noté  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ .

**Définition 6.** Une famille  $(e_1, \dots, e_k)$  est **génératrice** si tout élément de  $E$  peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille  $(e_1, \dots, e_k)$  :  $\forall x \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k, x = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i$ . Autrement dit,  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = E$ .

*Remarque 3.* Pour prouver qu'une famille est génératrice, il faut prouver que l'équation  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i$ , qui peut s'écrire comme un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients  $\lambda_i$ , admet toujours une solution.

**Exemples :** Dans  $\mathbb{R}_n[X]$ , la famille  $(1, X, X^2, \dots, X^n)$  est génératrice par définition même de ce qu'est un polynôme : il peut s'écrire sous la forme  $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_n X^n$ .

Dans  $\mathbb{R}^3$ , la famille de trois vecteurs  $((1, 0, 1), (0, 1, -1), (1, 1, 1))$  est génératrice. En effet, soit  $(x, y, z)$  un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^3$ , on peut écrire  $(x, y, z) = \lambda_1(1, 0, 1) + \lambda_2(0, 1, -1) + \lambda_3(1, 1, 1)$  si le

système  $\begin{cases} \lambda_1 & + \lambda_3 = x \\ & \lambda_2 + \lambda_3 = y \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = z \end{cases}$  admet une solution. C'est toujours le cas : en soustrayant

la troisième équation à la première,  $\lambda_2 = x - z$ , puis en reportant dans la deuxième équation  $\lambda_3 = y - x + z$ , et enfin  $\lambda_1 = x - \lambda_3 = 2x - y - z$ .

**Définition 7.** Une famille de vecteurs  $(e_1, \dots, e_k)$  est **libre** si aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille (on dit que ses vecteurs sont linéairement indépendants).

Autrement dit, si  $\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i = 0$ , alors  $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \lambda_i = 0$ . Dans le cas contraire, on dit que la famille de vecteurs est **liée**.

*Remarque 4.* Pour prouver qu'une famille est libre, il faut vérifier que le système linéaire homogène obtenu en écrivant l'égalité  $\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i = 0$  est de Cramer (le système a toujours pour solution la solution nulle, la famille est libre seulement s'il n'y a pas d'autre solution).

**Exemple :** Dans  $\mathbb{R}^3$ , la famille  $((2, 1, 0), (1, -1, -1), (0, 3, -1))$  est libre car le système

$\begin{cases} 2x + y & = 0 \\ x - y - z & = 0 \\ & 3y - z = 0 \end{cases}$  a pour unique solution  $(0, 0, 0)$  : en effet,  $z = 3y, x = y + z = 4y$ , donc  $2x + y = 5y = 0$ , et les trois inconnues sont donc nulles.

**Exemple 2 :** La famille  $(1, X, X^2, \dots, X^n)$  déjà citée plus haut est en fait une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Exemple 3 :** Dans l'espace vectoriel des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , la famille constituée des quatre fonctions  $f_1 : x \mapsto e^x$ ;  $f_2 : x \mapsto e^{2x}$ ;  $f_3 : x \mapsto e^{3x}$  et  $f_4 : x \mapsto e^{4x}$  constitue une famille libre. Supposons pour le prouver que  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0$ . Si  $\lambda_4 \neq 0$ , alors on aura  $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) + \lambda_4 f_4(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda_4 e^{4x}$ , ce qui est incompatible avec le fait que la fonction est censée être toujours nulle. Une fois que  $\lambda_4 = 0$ , si on suppose ensuite que  $\lambda_3 \neq 0$ , on aboutira de même à une contradiction, puis on prouvera ensuite  $\lambda_2 = 0$  par la même méthode, et on conclura enfin que les quatre coefficients doivent être nuls.

**Définition 8.** Une famille de vecteurs est une **base** d'un espace vectoriel  $E$  si elle est à la fois libre et génératrice. Autrement dit, tout élément de  $E$  peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de la famille.

**Définition 9.** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in E$ . Les réels  $\lambda_i$  sont appelés **coordonnées** de  $x$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ , et les vecteurs  $\lambda_i e_i$  **composantes** de  $x$  dans cette même base.

### 1.3 Sous-espaces vectoriels

**Définition 10.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . Un sous-ensemble  $F$  de  $E$  est un **sous-espace vectoriel** s'il est lui-même un espace vectoriel (muni de l'addition et de la multiplication définies sur  $E$ ).

**Proposition 1.**  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si

- $0 \in F$
- $\forall x, y \in F, x + y \in F$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \lambda x \in F$ .

*Remarque 5.* On dit que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  s'il est non vide et stable par addition et par multiplication par un réel. La proposition est évidente. On peut d'ailleurs remplacer les deux dernières conditions par la suivante :  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2, \lambda x + \mu y \in F$ .

**Exemples :** L'ensemble des matrices diagonales est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . En effet, la somme de deux matrices diagonales est diagonale, et le produit d'une matrice diagonale par un réel est diagonale.

Dans  $\mathbb{R}^3$ , l'ensemble  $F = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$  est un sous-espace vectoriel mais  $G = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}$  n'en est pas un (il ne contient pas 0, et n'est stable ni par somme ni par produit par un réel!).

$\mathbb{R}_n[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$  (quelle que soit la valeur de  $n$ ).

L'ensemble des fonctions solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle  $y'' - 3y' + 2y = 0$  est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . En effet, la somme de deux solutions d'une équation différentielle homogène, ou le produit d'une solution par un réel, est solution de la même équation.

**Exercice :** Soit  $E$  l'espace vectoriel des suites réelles. Parmi tous les sous-ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

1. les suites croissantes.
2. les suites monotones.
3. les suites constantes.
4. les suites ayant une limite finie.
5. les suites géométriques.

6. les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
7. Les suites périodiques.

### Corrigé de l'exercice

1. Ce n'est pas un sous-ev, le produit d'une suite croissante (et non constante) par  $-1$  étant rarement une suite croissante.
2. Ce n'est pas un sous-ev non plus, car la somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante n'est pas toujours monotone (en fait, on en est loin, toute suite réelle peut s'écrire comme somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante).
3. C'est un sous-ev.
4. C'est un sous-ev (règles de calcul usuelles sur les limites).
5. Ce n'est pas un sous-ev, la somme de deux suites géométriques n'ayant pas la même raison n'est pas une suite géométrique (mais une suite récurrente linéaire d'ordre 2).
6. Ce n'est pas un sous-ev, pour à peu près la même raison que les suites géométriques : une suite récurrente linéaire d'ordre 2 peut se mettre sous la forme  $\alpha r^n + \beta s^n$  (somme de deux suites géométriques); si on en additionne deux ayant des racines  $r$  et  $s$  différentes, on n'a aucune raison d'obtenir une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
7. C'est un sous-ev, si  $(u_n)$  est périodique de période  $p$  et  $(v_n)$  périodique de période  $q$ , leur somme sera périodique de période  $pq$  (car  $pq$  est une période commune à  $(u_n)$  et  $(v_n)$ ). Les autres propriétés sont facilement vérifiées.

**Proposition 2.** Soit  $(e_1, \dots, e_k)$  une famille de vecteurs de  $E$ , alors  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant  $e_1, e_2, \dots, e_k$  (c'est-à-dire que, si  $F$  est un sous-espace vectoriel contenant tous les vecteurs de la famille, alors nécessairement  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \subset F$ ). On l'appelle **sous-espace vectoriel engendré** par la famille.

*Démonstration.* Une somme de deux combinaisons linéaires est bien une combinaison linéaire :  $\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^k \mu_i e_i = \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \mu_i) e_i$ , et de même pour un produit par un réel :  $\rho \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^k (\rho \lambda_i) e_i$ , donc  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . De plus, un sous-espace contenant les éléments de la famille contient aussi ses combinaisons linéaires puisqu'un sous-espace est stable par combinaisons linéaires, donc il contient forcément  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ .  $\square$

**Exemple :** L'ensemble des éléments de  $\mathbb{R}^3$  de la forme  $(2x + y, 3x - 2y, -x)$ ,  $x$  et  $y$  étant deux réels, est un sous-espace vectoriel. Il s'agit en fait du sous-espace vectoriel engendré par les deux vecteurs  $(2, 3, -1)$  et  $(1, -2, 0)$ , puisque  $(2x + y, 3x - 2y, -x) = x(2, 3, -1) + y(1, -2, 0)$  s'écrit bien comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs.

**Exemple très important :** L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de  $k$  équations à  $n$  inconnues est un sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathbb{R}^n$ . On peut d'ailleurs toujours décrire un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  à l'aide d'un tel système d'équations.

**Exemple :** L'ensemble  $F$  des solutions du système  $\begin{cases} 2x & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 3z & = & 0 \end{cases}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . Si on résout le système, on trouve facilement que  $F = \{(x, 7x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 7, 2) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 7, 2))$ .

**Proposition 3.** L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

**Exemple :** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on définit  $F$  comme l'ensemble des solutions de l'équation  $x - y + 2z = 0$ , et  $G = \text{Vect}((1, 0, -1), (-2, 1, 1))$ . Ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ , leur intersection en est donc aussi un. Pour la décrire le plus simplement possible, le mieux est d'écrire les vecteurs de  $G$  comme combinaison linéaires, et de leur faire vérifier l'équation définissant  $F$  :  $x \in G \Leftrightarrow x = (\lambda - 2\mu, \mu, \mu - \lambda)$ , pour un certain couple de réels  $(\lambda, \mu)$ . Le vecteur  $x$  appartient aussi à  $F$  si  $\lambda - 2\mu - \mu + 2\mu - 2\lambda = 0$ , soit  $-\lambda - \mu = 0$ , donc  $\mu = -\lambda$ . On a alors  $x = (3\lambda, -\lambda, -2\lambda)$ , dont on déduit que  $F \cap G = \text{Vect}((3, -1, -2))$ .

*Remarque 6.* L'union de deux sous-espaces vectoriels n'est par contre en général pas du tout un sous-espace vectoriel. Par exemple, l'union de deux droites non confondues dans  $\mathbb{R}^2$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$  (ces derniers étant uniquement, outre  $\mathbb{R}^2$  tout entier et le sous-espace vectoriel réduit au vecteur nul, les droites passant par l'origine). Ce qui joue en quelque sorte le rôle d'union de sous-espaces vectoriels est la notions que nous allons maintenant définir.

**Définition 11.** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel  $E$ . La **somme** des espaces  $F$  et  $G$ , notée tout simplement  $F + G$ , est l'ensemble  $F + G = \{(x + y) \mid x \in F, y \in G\}$ .

**Proposition 4.** La somme  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois  $F$  et  $G$ .

*Démonstration.* C'est facile :  $\lambda(x + y) + \mu(x' + y') = (\lambda x + \mu y) + (\lambda x' + \mu y')$ , donc  $F + G$  est stable par combinaisons linéaires en supposant que  $F$  et  $G$  le sont. Par ailleurs, un sous-espace vectoriel contenant  $F$  et  $G$  contiendra toutes les combinaisons linéaires d'éléments de  $F$  et de  $G$ , et a fortiori  $F + G$ .  $\square$

**Définition 12.** Deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  d'un même espace vectoriel  $E$  sont **supplémentaires** s'ils vérifient les deux conditions suivantes :

- $F \cap G = \{0\}$ .
- $F + G = E$ .

Si  $F$  et  $G$  sont supplémentaires, on note  $F \oplus G = E$ .

*Remarque 7.* Ces deux conditions assurent en fait que tout vecteur de  $E$  peut s'écrire comme somme d'un vecteur de  $F$  et d'un vecteur de  $G$  (c'est exactement la deuxième condition donnée) et que cette décomposition est unique : en effet, si  $x + y = x' + y'$ , avec  $(x, x') \in F$  et  $(y, y') \in G$ , alors  $x - x' = y' - y$ . Or,  $x - x' \in F$  et  $y' - y \in G$ , ce qui implique en appliquant notre première condition que  $x - x' = y' - y = 0$ , autrement dit qu'on a écrit deux fois la même décomposition.

**Exemple :** Dans l'espace, un plan (vectoriel, donc passant par l'origine) et une droite qui n'est pas incluse dans ce plan sont toujours supplémentaires. La notion de complémentarité signifie en fait que les deux sous-espaces « se complètent bien » pour permettre d'obtenir par combinaisons linéaires l'espace  $E$  tout entier. Nous pourrions interpréter plus facilement cette intuition dans un prochain chapitre consacré à la dimension des espaces vectoriels (ici, le plan de dimension 2 est supplémentaire d'une droite de dimension 1 dans l'espace qui est de dimension  $3 = 2 + 1$ ).

**Exemple :** Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , si on note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des matrices symétriques et  $\mathcal{A}$  celui des matrices antisymétriques, alors  $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  :

- $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$  est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , et de même pour  $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ .

Plus simplement, on peut aussi dire que la condition  $A = {}^t A$  (ou  $A = -{}^t A$  est stable par combinaisons linéaires).

- $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$ , puisque la seule matrice vérifiant  $A = {}^t A = -A$  est la matrice nulle.
- $\mathcal{S} + \mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , car on peut décomposer une matrice quelconque de la façon suivante :
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & \frac{b-c}{2} \\ \frac{c-b}{2} & c \end{pmatrix}.$$

## 1.4 Espaces vectoriels classiques

**Proposition 5.** Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{K}^n$ , la famille de vecteurs  $((1, 0, 0, \dots, 0); (0, 1, 0, \dots, 0); \dots; (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0); \dots; (0, 0, \dots, 0, 1))$  est une base, appelée **base canonique** de  $\mathbb{K}^n$ .

*Démonstration.* Donnons un nom aux vecteurs de la base :  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , où le 1 est situé en  $i$ -ème position. Soit  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ , alors  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , donc la famille est

génératrice. Elle est clairement libre, puisque l'égalité  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$  est équivalente à la condition  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ . Il s'agit donc bien d'une base. C'est la base qu'on utilise habituellement pour les calculs dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ .  $\square$

**Proposition 6.** Dans l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , la famille constituée des matrices  $E_{i,j}$  (pour  $1 \leq$

$$i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq p), \text{ où } E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \dots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ est une base appelée } \mathbf{base}$$

**canonique** de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

*Démonstration.* La famille  $(E_{i,j})$  est bien génératrice puisque, si  $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , on a  $M = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} m_{i,j} E_{i,j}$ . Supposons maintenant qu'une combinaison linéaire des matrices de la famille

soit nulle :  $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0$ . La somme de gauche étant simplement la matrice dont le coefficient

d'indice  $i, j$  vaut  $\lambda_{i,j}$ , elle est nulle seulement si tous les  $\lambda_{i,j}$  sont nuls, la famille est donc bien libre.  $\square$

*Remarque 8.* Les coordonnées d'une matrice dans cette base canonique sont simplement ses coefficients, lus de gauche à droite et de haut en bas. Remarquons que, comme dans le cas de  $\mathbb{K}^n$ , la base a été obtenue en mettant successivement des 1 à tous les endroits possibles, et en remplissant avec des 0. C'est un principe que nous allons retrouver dans notre troisième exemple d'espace vectoriel classique.

**Proposition 7.** Dans  $\mathbb{K}_n[X]$ , la famille  $(1, X, X^2, \dots, X^n)$  est une base appelée **base canonique**.

*Démonstration.* La famille est génératrice par définition de ce qu'est l'ensemble  $\mathbb{K}_n[X]$ . Elle est libre, car si on suppose que  $\sum_{i=0}^n a_i X^i = 0$ , on est face à un polynôme admettant une bonne infinité de racines, ce qui n'est possible que pour le polynôme nul (du moins sur  $\mathbb{R}$  ou sur  $\mathbb{C}$ ).  $\square$

*Remarque 9.* Les coordonnées d'un polynôme dans la base canonique sont simplement ses coefficients, donnés par ordre de puissances croissantes.

**Définition 13.** Une famille **échelonnée** de polynômes de  $\mathbb{K}_n[X]$  est une famille constituée de  $n + 1$  polynômes de degrés respectifs  $0, 1, 2, \dots, n + 1$ .

**Proposition 8.** Toute famille échelonnée de polynômes est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

*Démonstration.* Procédons par récurrence sur l'entier  $n$ . Si  $n = 0$ , une famille échelonnée de polynômes est réduite à un seul polynôme constant non nul (puisque de degré 0 et pas  $-\infty$ ), qui constitue bien une base de  $\mathbb{K}_0[X]$ . Supposons la propriété vérifiée au rang  $n$ , et considérons une famille de polynômes échelonnée  $(P_0, P_1, \dots, P_{n+1})$ . Par hypothèse de récurrence,  $(P_0, \dots, P_n)$  constitue

une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ . Prouvons que notre famille est génératrice : soit  $Q \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$ , on peut écrire  $Q = a_{n+1}X^{n+1} + Q_1$ , avec  $d^\circ(Q_1) \leq n$ . De même,  $P_{n+1} = b_{n+1}X^{n+1} + R$ , avec  $d^\circ(R) \leq n$  et  $b_{n+1} \neq 0$  puisque  $P_{n+1}$  est supposé de degré  $n+1$ . On peut alors écrire  $Q = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}P_{n+1} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}R + Q_1$ . Comme  $Q_1 - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}R$  est par construction un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$ , on peut l'écrire comme combinaison linéaire de  $P_0, P_1, \dots, P_n$ , donc  $Q$  est une combinaison linéaire de notre famille. Prouvons désormais que notre famille est libre : si  $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i P_i = 0$ , alors  $\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i + \lambda_{n+1} R = -\lambda_{n+1} b_{n+1} X^{n+1}$ . Comme le membre de gauche est de degré au plus  $n$ , cela n'est possible que si  $\lambda_{n+1} = 0$ . Mais alors on a une combinaison linéaire annulant la famille  $(P_0, \dots, P_n)$  qui est libre, tous ses coefficients sont nécessairement nuls. Notre famille est donc libre en plus d'être génératrice, c'est une base.  $\square$

**Proposition 9.** L'ensemble  $S$  des suites vérifiant la récurrence linéaire  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles. Dans le cas où son équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , les deux suites géométriques  $u = (u_n)$  et  $v = (v_n)$  définies par  $u_n = r_1^n$  et  $v_n = r_2^n$  forment une base de  $S$ . Si l'équation caractéristique a une solution double  $r$ , les suites définies par  $u_n = r^n$  et  $v_n = nr^n$  forment une base de  $S$ . Si l'équation admet deux racines complexes conjuguées  $z_1 = re^{i\theta}$  et  $z_2 = re^{-i\theta}$ , les suites définies par  $u_n = r^n \cos(n\theta)$  et  $v_n = r^n \sin(n\theta)$  forment une base de  $S$ .

*Remarque 10.* Cette proposition n'est pas une nouveauté, c'est exactement la même que celle que nous avons déjà vue sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, exprimée un peu différemment.

*Démonstration.* L'ensemble  $S$  est clairement un sous-espace vectoriel : la somme de deux suites vérifiant la récurrence la vérifie aussi (il suffit d'additionner les équations), de même pour le produit par un réel.

Notons à présent  $x$  la suite vérifiant  $x_0 = 1, x_1 = 0$  et qui appartient à  $S$  (donc qui vérifie la récurrence pour  $n \geq 2$ ) et  $y$  la suite de  $S$  vérifiant  $y_0 = 0$  et  $y_1 = 1$ . La famille  $(x, y)$  est libre (en effet, les deux suites ne sont pas proportionnelles), mais également génératrice de  $S$ . En effet, soit  $z$  un élément de  $S$ ,  $a = z_0$  et  $b = z_1$ , on a en fait  $z = ax + by$  : cela est vrai pour les deux premiers termes de la suite, et ensuite cela le reste par récurrence double. On en déduit que  $(x, y)$  est une base de  $S$ .

Plaçons-nous dans le cas de deux racines distinctes : on a déjà prouvé dans le chapitre sur les suites que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  étaient dans  $S$ . De plus, elles forment une famille libre (elles ont le même premier terme, mais pas le même deuxième terme). Pour prouver qu'elles forment une famille génératrice, il suffit de constater que  $u = x + r_1 y$  et  $v = x + r_2 y$ , donc  $y = \frac{v - u}{r_2 - r_1}$ , et  $x = \frac{r_2 u - r_1 v}{r_2 - r_1}$ . Puisque toute suite de  $S$  peut s'écrire comme combinaison linéaire de  $x$  et de  $y$ , en remplaçant ces dernières par les formules qu'on vient d'obtenir, elle peut également s'écrire comme combinaison linéaire de  $u$  et  $v$ , qui forme donc une famille génératrice de  $S$ . Puisqu'elle est libre, c'est une base. Les autres cas sont très similaires.  $\square$

## 2 Applications linéaires

### 2.1 Noyau et image

**Définition 14.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels, une **application linéaire** de  $E$  dans  $F$  est une application  $f : E \rightarrow F$  vérifiant les conditions suivantes :

- $\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(\lambda x) = \lambda f(x)$

*Remarque 11.* Autrement dit, une application linéaire est un morphisme de groupes qui est également compatible avec le produit extérieur.



**Proposition 10.** Une application  $f : E \rightarrow F$  est linéaire si et seulement si  $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(x, y) \in E^2, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ .

*Démonstration.* Si  $f$  vérifie les conditions de la définition, alors  $f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x) + f(\mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$  en utilisant successivement les deux propriétés. Réciproquement, en prenant  $\lambda = \mu = 1$ , on retrouve la première condition ; et en prenant  $y = 0$  (qui, rappelons-le, a forcément une image nulle par un morphisme de groupes), on retrouve la deuxième.  $\square$

*Remarque 12.* Autrement dit, une application est linéaire si elle est compatible avec les combinaisons linéaires. On a d'ailleurs plus généralement, pour une application linéaire,  $f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(e_i)$ .

**Exemples :** Bien que les conditions définissant une application linéaire soient assez restrictives, on peut trouver des exemples extrêmement variés dans les différents espaces vectoriels que nous avons commencé à étudier.

- L'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y) = (2x - 3y, 4x + y, -x + 2y)$  est une application linéaire.
- L'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y) = (2x - 3, 4 + y, -x + 2y)$  n'est pas une application linéaire (on peut constater par exemple qu'en général  $f(2x, 2y) \neq 2f(x, y)$ ).
- L'application  $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définie par  $f(M) = AM$  est une application linéaire, quelle que soit la matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
- L'application  $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définie par  $f(M) = M^2$  n'est pas une application linéaire (en général,  $(M + N)^2 \neq M^2 + N^2$ ).
- Soit  $E$  l'ensemble des suites réelles. L'application  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f(u_n) = (u_0, u_8, u_{35})$  est une application linéaire.
- Soit  $E$  l'ensemble des fonctions  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . L'application  $f : E \rightarrow E$  définie par  $f(g) = g'$  est une application linéaire.
- Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle  $[0; 1]$ . L'application  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(g) = \int_0^1 g(t) dt$  est une application linéaire.
- L'application  $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$  définie par  $f(P) = 2X^2P'' - XP'$  est une application linéaire.

**Définition 15.** Une application linéaire  $f : E \rightarrow F$  est aussi appelée **morphisme** de  $E$  dans  $F$ . On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble de toutes les applications linéaires de  $E$  dans  $F$ .

Une application linéaire  $f : E \rightarrow E$  est appelée **endomorphisme** de l'espace vectoriel  $E$ . On note plus simplement  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .

Une application linéaire bijective est appelée **isomorphisme**.

Un endomorphisme bijectif est appelée **automorphisme**. L'ensemble des automorphismes d'un ev  $E$  est noté  $GL(E)$ .

**Proposition 11.** Si  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ , c'est aussi le cas de  $\mathcal{L}(E, F)$ .

*Démonstration.* La somme de deux applications linéaires est linéaire, l'élément neutre étant l'application nulle, et l'opposé d'une application linéaire étant toujours défini. De plus, les produits par des constantes d'applications linéaires sont linéaires, et les relations de distributivité sont immédiates.  $\square$

**Définition 16.** Le **noyau** d'une application linéaire  $f : E \rightarrow F$  est l'ensemble  $\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ .

L'**image** d'une application linéaire  $f : E \rightarrow F$  est l'ensemble  $\text{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\}$ .

*Remarque 13.* Les lettres Ker sont les premières du mot allemand Kernel qui signifie, comme vous auriez pu le deviner, noyau.

**Proposition 12.** Si  $f : E \rightarrow F$  est une application linéaire, alors l'image d'un sous-espace vectoriel de  $E$  est toujours un sous-espace vectoriel de  $F$  ; et l'image réciproque de tout sous-espace vectoriel de  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Corollaire 1.** Si  $f : E \rightarrow F$  est une application linéaire, alors  $\ker(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , et  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

*Démonstration.* Soit  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , et  $(x, y) \in f(G)^2$ , alors  $x = f(z)$  et  $y = f(w)$ , avec  $(z, w) \in G^2$ . Comme l'application est linéaire,  $\lambda x + \mu y = \lambda f(z) + \mu f(w) = f(\lambda z + \mu w) \in f(G)$  puisque  $\lambda z + \mu w \in G$  en tant que combinaison linéaire d'éléments du sous-espace vectoriel  $G$ . L'image de  $G$  est donc stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de  $G$ . C'est le même principe pour l'image réciproque : soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $F$ , et  $(z, w) \in f^{-1}(H)$ , alors  $f(z) = x \in H$  et  $f(w) = y \in H$ , donc  $f(\lambda z + \mu w) = \lambda x + \mu y \in H$ , et  $\lambda z + \mu w \in f^{-1}(H)$ .  $\square$

**Exemple :** Déterminons le noyau de l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par  $(x, y, z) \mapsto (x - y + z, 3x - 2y + 5z, -x - 3z)$ . Les éléments du noyau sont les triplets de réels  $(x, y, z)$  solutions du système 
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x - 2y + 5z = 0 \\ -x - 3z = 0 \end{cases}$$
. Le système n'est pas de Cramer ( $2L_1 - L_2 = L_3$ ), les solutions sont les triplets de la forme  $(-3z, -2z, z)$ , avec  $z \in \mathbb{R}$ . Autrement dit,  $\ker(f) = \text{Vect}((-3, -2, 1))$ .

**Exemple 2 :** L'application  $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$  définie par  $f(P) = P'$  a pour noyau l'ensemble des polynômes constants.

**Proposition 13.** Une application linéaire  $f$  est injective si et seulement si  $\ker(f) = \{0\}$ . Une application linéaire  $f : E \rightarrow F$  est surjective si et seulement si  $\text{Im}(f) = F$ .

*Démonstration.* La deuxième propriété est évidente, c'est la définition de la surjectivité. Démontrons donc la première, qui est beaucoup plus intéressante puisqu'elle revient à dire que, pour démontrer qu'une application linéaire est injective, il suffit de démontrer qu'un seul élément bien particulier n'a pas plus d'un antécédent par  $f$ . Supposons d'abord le noyau réduit au vecteur nul et montrons que  $f$  est injective : soient  $(x, y) \in E^2$  tels que  $f(x) = f(y)$ , alors  $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$ , donc  $x - y \in \ker(f)$ , donc  $x - y = 0$ , c'est-à-dire  $x = y$ , ce qui prouve bien l'injectivité. Réciproquement, supposons  $f$  injective, alors 0 a un seul antécédent par  $f$ . Or, le vecteur nul est toujours un antécédent de 0 par une application linéaire. Ceci prouve bien qu'il est le seul élément de  $E$  à appartenir à  $\ker(f)$ .  $\square$

**Proposition 14.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , alors  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ .

*Démonstration.* Comme les vecteurs  $f(e_1), \dots, f(e_n)$  appartiennent évidemment à  $\text{Im}(f)$ , on a nécessairement  $\text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \subset \text{Im}(f)$ . De plus, si  $y \in \text{Im}(f)$ , alors  $y = f(x)$  avec  $x \in E$ , et comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , on peut écrire  $x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i$ . Alors  $y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(e_i)$ , donc  $y \in \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ , et les deux ensembles sont bien égaux.  $\square$

*Remarque 14.* Attention, en général,  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  n'est pas une base de  $\text{Im}(f)$ , mais seulement une famille génératrice. Remarquons également qu'une application linéaire est parfaitement déterminée par la simple donnée des images des vecteurs d'une base, puisqu'on peut reconstituer toutes les autres images par combinaisons linéaires.

**Exemple 1 :** La méthode élémentaire pour calculer une image est d'utiliser la définition. Prenons par exemple l'application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y) = (2x - y, x + 2y, -2x + y)$ . Un triplet  $(a, b, c)$  appartient à  $\text{Im}(f)$  si et seulement si le système

$$\begin{cases} 2x - y = a \\ x + 2y = b \\ -2x + y = c \end{cases}$$

admet une solution. Les membres de gauche des deux équations extrêmes étant opposés, il faut nécessairement avoir  $a = -c$ , et on vérifie facilement que cette condition est suffisante. On a donc  $\text{Im}(f) = \{(a, b, -a) \mid a, b \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, -1); (0, 1, 0))$ .

**Exemple 2 :** En pratique, on utilisera plutôt notre dernière proposition, car c'est beaucoup plus rapide! Reprenons le même exemple. La base canonique de  $\mathbb{R}^2$  est constituée des deux vecteurs  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ , donc l'image est engendrée par  $f(1, 0) = (2, 1, -2)$  et  $f(0, 1) = (-1, 2, 1)$ . On a donc  $\text{Im}(f) = \text{Vect}((2, 1, -2); (-1, 2, 1))$  (ce ne sont pas les mêmes vecteurs que tout à l'heure mais on peut vérifier qu'ils engendrent le même espace vectoriel).

**Proposition 15.** Si  $f$  est un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ , alors sa réciproque  $f^{-1}$  est un isomorphisme de  $F$  dans  $E$ .

*Démonstration.* La seule chose à vérifier est que la réciproque est une application linéaire. Soient donc  $(z, w) \in F^2$  et notons  $x = f^{-1}(z)$  et  $y = f^{-1}(w)$ . Par linéarité de  $f$ , on peut dire que  $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda z + \mu w$ , donc  $f^{-1}(\lambda z + \mu w) = \lambda x + \mu y = \lambda f^{-1}(z) + \mu f^{-1}(w)$ , ce qui prouve la linéarité de  $f^{-1}$ .  $\square$

*Remarque 15.*  $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$  est un anneau : c'est déjà un groupe commutatif pour l'addition, l'identité (qui est évidemment une application linéaire) est élément neutre pour la composition, et la composée de deux applications linéaires est facilement linéaire. L'ensemble des éléments inversibles de cet anneau est  $GL(E)$ . On se permet de noter notamment d'utiliser la notation  $f^2$  pour désigner  $f \circ f$ , et plus généralement  $f^n$  pour les composées ultérieures (cette notation n'aura absolument rien à voir avec des puissances qui n'ont de toute façon aucun sens dans un espace vectoriel quelconque). Remarquons que cet anneau n'est pas commutatif, deux endomorphismes n'ayant en général aucune raison de commuter.

## 2.2 Applications linéaires classiques

Nous allons retrouver dans ce paragraphe un premier lien vraiment concret entre algèbre linéaire et géométrie, en étudiant quelques types d'applications linéaires bien particulières, que vous connaissez déjà en géométrie plane depuis longtemps.

**Définition 17.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ . L'**homothétie de rapport**  $\lambda$  est l'endomorphisme de  $E$  de la forme  $\lambda \text{id}$ , où  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

*Remarque 16.* Cela correspond bien à la notion usuelle d'homothétie de rapport  $\lambda$ , toujours centrée en l'origine quand on travaille dans un espace vectoriel.

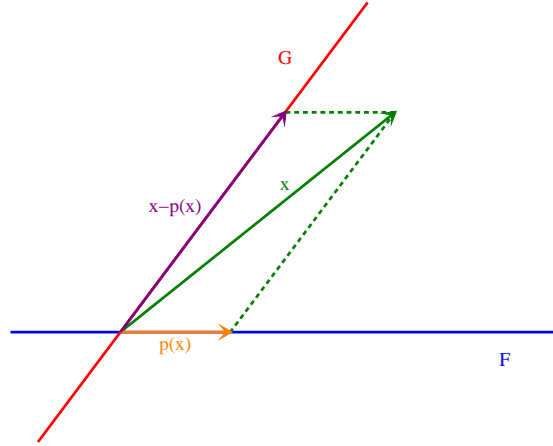
**Proposition 16.** Si  $\lambda \neq 0$ , l'homothétie de rapport  $\lambda$  est un automorphisme de  $E$ , son automorphisme réciproque est l'homothétie de rapport  $\frac{1}{\lambda}$ .

*Démonstration.* Une démonstration à la portée de tous :  $(\lambda \text{id}) \circ \left(\frac{1}{\lambda} \text{id}\right) = \text{id}$ .  $\square$

*Remarque 17.* En tant que multiples de l'identité, les homothéties commutent avec tous les autres endomorphismes de  $E$ . On peut d'ailleurs prouver que ce sont les seules applications linéaires dans ce cas.

**Définition 18.** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel  $E$ . La **projection sur  $F$  parallèlement à  $G$**  est l'application linéaire  $p : x \mapsto x_F$ , où on note, pour tout vecteur  $x \in E$ ,  $x_F$  l'élément de  $F$  obtenu en décomposant  $x$  dans  $F \oplus G$ . Autrement dit, si  $x = x_F + x_G$ , avec  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$ , alors  $p(x) = x_F$ .

*Remarque 18.* L'application est bien linéaire, car la décomposition de  $\lambda x + \mu y$  dans  $F \oplus G$  est simplement  $(\lambda x_F + \mu y_F) + (\lambda x_G + \mu y_G)$ . Pour un exemple plus parlant, une projection sur une droite de  $\mathbb{R}^2$  parallèlement à une autre droite donne des images construites comme ceci :



Notons qu'il est indispensable de préciser l'espace  $G$  parallèlement auquel on projette, il n'y a pour l'instant aucune notion de projection orthogonale dans un espace vectoriel.

**Proposition 17.** Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $p$  est un projecteur (terme synonyme de projection) si et seulement si  $p \circ p = p$ . Dans ce cas, avec les notations de la définition,

- $F = \text{Im}(p)$  et  $G = \text{ker}(p)$ .
- $E = \text{ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$ .
- $x \in \text{Im}(p) \Leftrightarrow p(x) = x$ .

*Démonstration.* Si  $p$  est un projecteur, on a effectivement  $p(p(x)) = p(x_F) = x_F = p(x)$ . Avant de montrer la réciproque, prouvons les autres propriétés, qui sont toutes faciles : si  $x \in \text{ker}(p)$ , alors  $x_F = 0$ , ce qui est équivalent à dire que  $x = x_G \in G$ . De même,  $\text{Im}(p) \subset F$  est évident, et tout élément de  $f$  est sa propre image par  $p$ , donc  $\text{Im}(p) = F$ . L'égalité  $E = \text{ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$  découle alors du fait que  $E = F \oplus G$ . Enfin,  $p(x) = x$  équivaut à  $x = x_F$ , donc  $x \in F = \text{Im}(p)$ . Revenons alors à notre réciproque : si  $p \circ p = p$ , notons  $F = \text{Im}(p)$  et  $G = \text{ker}(p)$ . On vérifie facilement que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires : d'une part, si  $x \in \text{ker}(p) \cap \text{Im}(p)$ , alors  $x = p(y)$  et  $p(x) = 0$ , ce qui implique  $p \circ p(y) = 0$ , donc  $p(y) = x = 0$ ; d'autre part, on peut toujours écrire  $x = p(x) + (x - p(x))$ , avec  $p(x) \in \text{Im}(p)$ , et  $x - p(x) \in \text{ker}(p)$  puisque  $p(x - p(x)) = p(x) - p \circ p(x) = 0$ . On peut donc écrire  $x = x_K + x_G$ , avec  $x_F = p(x)$ , ce qui prouve bien que  $p$  est le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ .  $\square$

**Exemple :** L'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $p(x, y) = \left( \frac{x+y}{2}; \frac{x+y}{2} \right)$  est une projection. Le plus simple pour le prouver est de constater que  $p \circ p = p$  (c'est ici très rapide). Le noyau de  $p$  est constitué des vecteurs pour lesquels  $x + y = 0$ , autrement dit  $F = \text{ker}(p) = \text{Vect}((1, -1))$ , et l'image de ceux vérifiant  $p(x, y) = (x, y)$ , soit  $\frac{x+y}{2} = x = y$ , donc  $x = y$ . Autrement dit,  $\text{Im}(p) = \text{Vect}((1, 1))$ .

*Remarque 19.* Si  $p$  est le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$ ,  $q = \text{id} - p$  est le projecteur sur  $G$  parallèlement à  $F$ . En effet, avec les notations introduites ci-dessus,  $q(x) = x_G = x - x_F = (\text{id} - p)(x)$ .

**Définition 19.** Avec les mêmes hypothèses et notations que dans la définition des projections, la **symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$**  est l'application linéaire  $s : x \mapsto x_F - x_G$ .

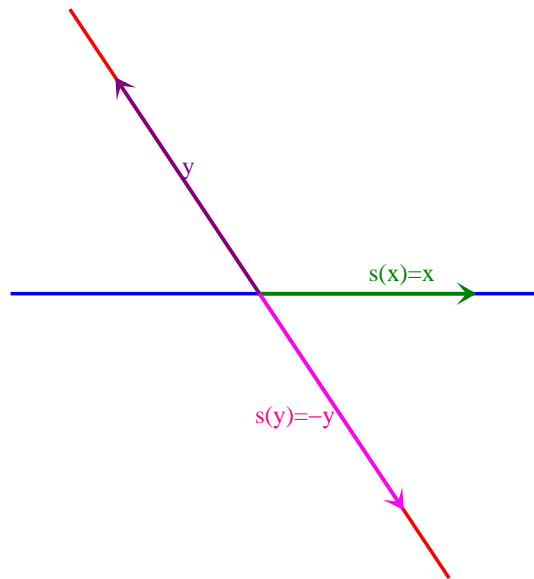
**Proposition 18.** Un endomorphisme  $s \in \mathcal{L}(E)$  est une symétrie si et seulement si  $s \circ s = \text{id}$ . Dans ce cas,

- $F = \text{ker}(s - \text{id})$  et  $G = \text{ker}(s + \text{id})$ .
- $E = \text{ker}(s - \text{id}) \oplus \text{ker}(s + \text{id})$ .
- $s = 2p - \text{id}$ , en notant  $p$  la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

*Démonstration.* Il est une fois de plus facile de commencer par les dernières propriétés. La condition  $s(x) = x$  correspond à  $x = x_F \in F$ , la condition  $s(x) = -x$  correspond à  $x = x_G \in G$ . La

supplémentarité des deux noyaux en découle. Quant à la dernière propriété, elle est immédiate :  $(2p - \text{id})(x) = 2x_F - (x_F + x_G) = x_F - x_G = s(x)$ . Le fait que  $s$  vérifie  $s \circ s(x) = x$  est à peu près immédiat, et la réciproque peut se prouver de façon similaire à ce qu'on a fait pour les projections. On prouve que  $F = \ker(s - \text{id})$  et  $G = \ker(s + \text{id})$  sont supplémentaires : si  $x \in F \cap G$ , alors  $s(x) = x$  et  $s(x) = -x$ , donc  $s \circ s(x) = s(-x) = -s(x) = -x$ , soit  $x = -x$  puisque  $s \circ s = \text{id}$ , et  $x = 0$ ; par ailleurs,  $x = \frac{x + s(x)}{2} + \frac{x - s(x)}{2}$ , le premier élément vérifie  $s\left(\frac{x + s(x)}{2}\right) = \frac{s(x) + x}{2}$ , donc il appartient à  $F$ ; le deuxième appartient de même à  $G$ . Enfin,  $x_F - x_G = \frac{x + s(x)}{2} - \frac{x - s(x)}{2} = s(x)$ , donc  $s$  est bien une symétrie.  $\square$

*Remarque 20.* Ces conditions signifient simplement que ce par rapport à quoi on symétrise est laissé fixe par  $s$ , et ce parallèlement à quoi on symétrise est envoyé sur son opposé :



**Exemple :** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on cherche à déterminer une expression analytique de la symétrie par rapport à  $F = \text{Vect}((1, 0, 1))$  et parallèlement à  $G = \text{Vect}((1, 2, 3); (1, 0, 0))$ . Il faudrait déjà commencer par prouver que  $F \oplus G = E$ . Comme nous avons de toute façon besoin de connaître la décomposition d'un vecteur dans  $F \oplus G$  pour calculer son image par  $s$ , le calcul ne peut pas faire de mal. Considérons donc  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , et cherchons trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $(x, y, z) = a(1, 0, 1) + b(1, 2, 3) + c(1, 0, 0)$ . Il n'est même pas indispensable d'écrire entièrement le système : la deuxième coordonnée donne immédiatement  $y = 2b$ , soit  $b = \frac{y}{2}$ ; puis la troisième donne  $a + 3b = z$ , soit  $a = z - 3b = z - \frac{3}{2}y$ , et enfin via la première coordonnée  $x = a + b + c$ , donc  $c = x - a - b = x + y - z$ . Finalement, le système admet toujours une solution unique, ce qui prouve la supplémentarité de  $F$  et de  $G$ . Par ailleurs,  $s(x, y, z) = a(1, 0, 1) - b(1, 2, 3) - c(1, 0, 0) = \left(z - \frac{3}{2}y, 0, z - \frac{3}{2}y\right) - \left(\frac{1}{2}y, y, \frac{3}{2}y\right) - (x + y - z, 0, 0) = (-x - 3y + 2z, -y, z - 3y)$ . On vérifie facilement que  $s \circ s = \text{id}$  avec cette expression.

**Définition 20.** Toujours avec les mêmes notations que dans les définitions précédentes, l'**affinité de rapport  $\lambda$  par rapport à  $F$  et parallèlement à  $G$**  est l'application linéaire  $a : x \mapsto x_F + \lambda x_G$ .

*Remarque 21.* Les projections et symétries sont des cas particuliers d'affinités, lorsque  $\lambda = 0$  et  $\lambda = -1$  respectivement. Si  $\lambda \neq 0$ , l'affinité est un automorphisme, dont la réciproque est l'affinité de rapport  $\frac{1}{\lambda}$ . Notons aussi que, pour un affinité  $a$ , on a toujours  $E = \ker(a - \text{id}) \oplus \ker(a - \lambda \text{id})$ .

### 2.3 Aspect matriciel

Une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  étant caractérisée par les images des vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , ou encore par les coordonnées de ces images dans la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ , on peut tout savoir d'une application linéaire en connaissant simplement  $n$  fois  $p$  coordonnées. C'est ce qui va permettre de créer un lien entre applications linéaires et matrices, et de justifier l'introduction de calcul matriciel effectuée dans un précédent chapitre, toutes les opérations sur les matrices s'interprétant naturellement en termes d'applications linéaires.

**Définition 21.** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base d'un espace vectoriel  $E$  et  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ . La **matrice de  $\mathcal{F}$  dans la base  $\mathcal{B}$**  est la matrice  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  dont la  $j$  ème colonne est composée des coordonnées de  $u_j$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Autrement dit, si  $u_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ , alors  $M_{i,j} = \lambda_i$ .

**Définition 22.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$  une base de  $F$  (on suppose donc dans tout ce paragraphe que les espaces vectoriels  $E$  et  $F$  possèdent des bases constituées d'un nombre fini de vecteurs). La **matrice représentative de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$**  est la matrice de la famille  $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . On la note  $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ .

**Exemple :** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $f(x, y, z) = (4x - 3y + z, -2x + y - 5z)$ , la matrice de  $f$  dans les bases canoniques est  $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ .

*Remarque 22.* Dans le cas d'un endomorphisme, on prendra souvent  $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ , et on notera simplement la matrice  $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ .

**Proposition 19.** En gardant les notations précédentes, si on note  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  la matrice-colonne

des coordonnées dans  $\mathcal{B}$  d'un élément  $x \in E$  et  $f(X) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$  celle des coordonnées de son image dans  $\mathcal{B}'$ , alors  $f(X) = MX$ , où  $M$  est la matrice représentant  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .

*Démonstration.* En effet, on a  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , et par définition de la matrice  $M$ , on a  $f(e_i) = \sum_{j=1}^p m_{ji} f_j$ .

On a donc  $f(X) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^p m_{ji} f_j = \sum_{j=1}^p \left( \sum_{i=1}^n x_i m_{ji} \right) f_j$ . Or, l'unique terme de la  $j$ -ème ligne de la matrice colonne  $MX$  vaut précisément  $\sum_{i=1}^n m_{ji} x_i$ , donc l'égalité demandée est bien vérifiée.  $\square$

**Proposition 20.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ , et  $M$  la matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ , alors la matrice de  $\lambda f$  dans ces mêmes bases est  $\lambda M$ .

De même, si  $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ , et  $M, N$  leurs matrices respectives, la matrice de  $f + g$  est  $M + N$ . Plus intéressant, si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ , et  $M, N$  leurs matrices respectives, alors la matrice de  $g \circ f$  est  $NM$ .

*Démonstration.* En effet, si  $f(X) = MX$  et  $g(X) = NX$ ,  $\lambda f(X) = \lambda MX$ ;  $f(X) + g(X) = MX + NX = (M + N)X$  et, lorsque cela a un sens,  $g \circ f(X) = g(MX) = NMX$ .  $\square$

**Exemple :** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  définie par  $(x, y, z) \mapsto (x - y, 2x + z)$ , et  $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  définie par  $(x, y) \mapsto (x + y, 3x - y, -x + 2y)$ . Les matrices respectives de ces deux applications linéaires dans les

bases canoniques sont  $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Comme  $NM = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , on peut en déduire que  $g \circ f(x, y, z) = (3x - y + z, x - 3y - z, 3x + y + 2z)$ .

**Proposition 21.** Un endomorphisme est bijectif si et seulement si sa matrice  $M$  dans une base  $\mathcal{B}$  est inversible. Dans ce cas, la matrice de  $f^{-1}$  dans cette même base est  $M^{-1}$ .

*Démonstration.* C'est une application immédiate du dernier point de la proposition précédente :  $f \circ f^{-1} = \text{id}$ , donc en notant  $N$  la matrice de  $f^{-1}$  dans la base  $\mathcal{B}$ ,  $MN = I$ , ce qui signifie exactement que  $N = M^{-1}$ .  $\square$

Il ne nous reste plus qu'à comprendre une chose fondamentale : comment déterminer la matrice de  $f$  dans une autre base  $\mathcal{C}$  si on la connaît dans une base  $\mathcal{B}$ .

**Définition 23.** Soient  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{C} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$  deux bases d'un même espace vectoriel  $E$ , la **matrice de passage** de la base  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{C}$  est la matrice de la famille  $\mathcal{C}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Proposition 22.** Si  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{C}$ , alors  $P$  est une matrice inversible, et la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{B}$  est  $P^{-1}$ .

*Démonstration.* La matrice  $P$  peut être vue différemment : il s'agit de la matrice de l'application identité dans les bases  $\mathcal{C}$  (au départ) et  $\mathcal{B}$  (à l'arrivée). En effet, les colonnes de  $P$  contiennent exactement les coordonnées des vecteurs  $g_j$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Si on note  $Q$  la matrice de cette même application identité dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  (qui est aussi la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  vers  $\mathcal{B}$ ), le produit des deux matrices représentera l'application identité dans la base  $\mathcal{C}$ , au départ comme à l'arrivée. Mais cette dernière matrice est évidemment la matrice  $I$ , donc  $QP = I$ , ou encore  $Q = P^{-1}$ .  $\square$

**Proposition 23.** Soit  $x \in E$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  la matrice-colonne de ses coordonnées dans une base  $\mathcal{B}$ , et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  la matrice-colonne de ses coordonnées dans une seconde base  $\mathcal{C}$ . Alors  $X = PY$  (ou  $Y = P^{-1}X$ ), où  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  vers  $\mathcal{C}$ .

*Démonstration.* Explicitons les hypothèses utiles :  $x = \sum_{j=1}^n y_j g_j$  (en gardant les notations utilisées plus haut pour les vecteurs des deux bases), et  $g_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$ , donc  $x = \sum_{j=1}^n y_j \left( \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n p_{ij} y_j \right) e_i$ . Par unicité de la décomposition dans une base, on peut en déduire que  $x_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} y_j$ , soit exactement  $X = PY$ .  $\square$

**Théorème 1.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  deux bases de  $E$ ,  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{C}'$  deux bases de  $F$ . En notant  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ ,  $N = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}(f)$ ,  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  et  $Q$  la matrice de passage de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{C}'$ , alors  $N = Q^{-1}MP$ . En particulier, dans le cas d'un endomorphisme,  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P$ , où  $P$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$ .

*Démonstration.* Sans expliciter les calculs, on peut exploiter les résultats précédents. Soit  $X$  la matrice-colonne des coordonnées de  $x$  dans la base  $\mathcal{C}$ , alors  $PX$  est la matrice de  $x$  dans  $\mathcal{B}$ , puis  $MPX$  représente la matrice de  $f(X)$  toujours dans la base  $\mathcal{B}$ , et enfin  $P^{-1}MPX$  est la matrice de  $f(x)$  dans la base  $\mathcal{C}$ . Or,  $NX$  représente également les coordonnées de  $f(x)$  dans  $\mathcal{C}$ , donc  $NX = P^{-1}MPX$ . Comme cela est vrai pour tout vecteur  $x$ , en particulier pour ceux de la base canonique, les matrices  $N$  et  $P^{-1}MP$  représentent la même application linéaire dans  $\mathcal{C}$ , et sont donc égales.  $\square$

**Exemple :** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  ayant pour matrice dans la base canonique  $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,

et notons  $\mathcal{B} = ((1, 1, -1); (1, 0, -1); (1, -1, 0))$ . Vérifions que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  : si  $(x, y, z) = a(1, 1, -1) + b(1, 0, -1) + c(1, -1, 0)$ , alors  $a - c = y$  et  $-a - b = z$ , donc  $-b - c = y + z$ . Comme par ailleurs  $a + b + c = x$ , on trouve en additionnant  $a = x + y + z$ , puis  $c = a - y = x + z$ , et  $b = -a - z = -x - y - 2z$ . Autrement dit, la matrice de passage de la base canonique vers  $\mathcal{C}$  est

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ , et  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On peut calculer la matrice de  $f$  dans la

base  $\mathcal{B}$  :  $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . On peut d'ailleurs s'en rendre compte autrement, en calculant

directement les images des vecteurs de la base  $\mathcal{B}$  par l'application  $f$  :  $f(1, 1, -1) = (1, 1, -1)$ ;  $f(1, 0, -1) = (2, 0, -2) = 2(1, 0, -1)$  et  $f(1, -1, 0) = (3, -3, 0)$ , ce qui explique que la matrice soit effectivement diagonale. Nous venons en fait d'effectuer sans le dire notre première diagonalisation de matrices, mais vous attendrez l'an prochain pour en apprendre (beaucoup) plus sur ce sujet.